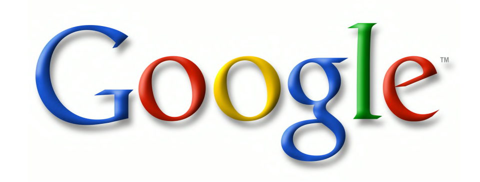
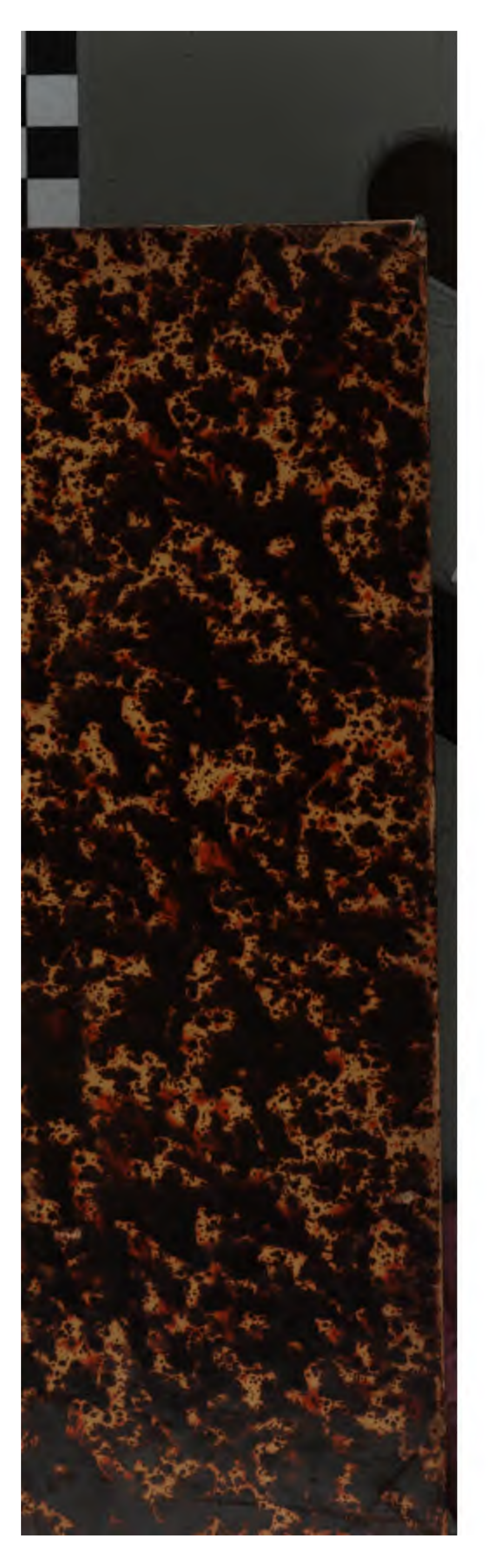





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME VI

A PARIS
CHEZ J.-B. BAILLIÈRE
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE MÉDECINE
rue Hautefeuille, 19.
A LONDRES, chez H. BAILLIÈRE, 219, Regent Street.—A NEW-YORK, chez H. BAILLIÈRE, 290, Broadway
A MADRID, chez BAILLY-BAILLIÈRE, calle del Principe, 11

A BORDEAUX
CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE
Cours du Chapeau-Rouge, 34

1868

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Composition du Bureau pour l'année 1867-1868.

MM. O. DE LACOLONGE ✻, *président*.
GLOTIN ✻, *vice-président*.
P. VERGELY, *secrétaire*.
SERRÉ-GUINO, *secrétaire-adjoint*.
HOÜEL, *archiviste*.
MICÉ, *trésorier*.
ABRIA, O. ✻,
BAUDRIMONT ✻,
H. GINTRAC ✻,
JEANNEL, O. ✻,
SANSAS,
} *membres du Conseil*.

Membres titulaires.

MM. ABADIE, licencié ès sciences, professeur au collége de Blaye.
ABRIA, O. ✻, doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, pharmacien, membre de la Société Chimique de Paris.
AZAM, professeur à l'École de Médecine.
BAUDRIMONT ✻, agrégé libre de la Faculté de Médecine de Paris, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
BAUDRIMONT (Édouard), chef des travaux de physique et de chimie à la Faculté des Sciences.
BÉRO, ingén. civil, anc. élève de l'École Centrale des Arts et Manufactures.
BERT, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour Impériale.
CHATARD, docteur en médecine.
COLOT, licencié ès sciences.
DANNECY, pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-André.
DELFORTRIE, juge de paix à La Brède.
DELMAS, docteur en médecine.
DOUAUD, docteur en médecine.
DUPUY, professeur au Lycée Impérial.
FOURNET, fabricant de produits chimiques.
GINTRAC (Henry) ✻, professeur à l'École de Médecine.
GLOTIN ✻, ancien officier de la Marine Impériale.
GUÉPIN, docteur en médecine.
GUESTIER (Daniel), négociant.
HOÜEL, professeur à la Faculté des Sciences.
HUMBLOT, professeur au Lycée Impérial.
JEANNEL, O. ✻, professeur à l'École de Médecine.
LACOLONGE (DE) ✻, chef d'escadron d'artillerie en retraite.
LADEVI-ROCHE, licencié ès sciences.
LAGANNE.
LAGRANDVAL (DE), professeur au Lycée Impérial.
LANDE, 1er interne à l'Hôpital St-André, prosecteur à l'École de Médecine.
LANELONGUE, docteur en médecine, prof. suppléant à l'École de Médecine.
LANGLADE (DE), ingénieur civil, ancien élève de l'École Polytechnique.
LAVERGNE (comte DE) ✻.

MM. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences.
LINDER ✻, ingénieur au Corps Impérial des Mines.
LUZUN, docteur en médecine.
MARX, docteur en médecine.
MÉTADIER (Ad.), docteur en médecine, licencié ès sciences.
MÉTADIER (P.), professeur à l'École de Médecine.
MICÉ, licencié ès sciences, professeur à l'École de Médecine.
MORISOT, professeur au Lycée Impérial.
ORÉ, docteur ès sciences, professeur à l'École de Médecine, chirurgien en chef de l'hôpital Saint-André.
PEREZ, professeur à la Faculté des Sciences.
PÉRIER, pharmacien à Pauillac (Gironde).
PERRENS, professeur à l'École de Médecine.
PEYROT, ancien interne à l'hôpital Saint-André.
POTOCKI, licencié ès sciences, conducteur des Ponts-et-Chaussées.
PRAT, pharmacien à Bordeaux.
RAGAIN, conducteur des Ponts-et-Chaussées.
RATHEAU ✻, commandant du Génie.
REIMONENCQ, docteur en médecine.
ROBAGLIA ✻, ingénieur des Ponts-et-Chaussées.
RODIER, professeur du cours de physique de la Société Philomathique.
ROYER, licencié ès sciences mathématiques et physiques, chef d'institution.
SAMY, préparateur à la Faculté des Sciences.
SANSAS, avocat à la Cour Impériale.
SERRÉ-GUINO, professeur au Lycée Impérial.
SIRECH, médecin.
SOLLES, docteur en médecine.
SOUS, docteur en médecine.
VALAT, ancien recteur.
VERGELY, docteur en médecine.

Membres correspondants.

MM. BOUDET (Félix), secrétaire général de la Société de Secours des Amis des Sciences, à Paris.
BOUÉ, régent de physique au collége de Sarlat (Dordogne).
BURGADE, docteur en médecine, à Libourne.
DELBOS, docteur ès sciences, directeur de l'École des Sciences appliquées de Mulhouse.
GARRIGAT, docteur en médecine.
JOURDAIN, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.
KEMMERER DE SAINT-MARTIN, docteur en médecine, île de Ré.
LARRET (de), docteur en médecine à Saint-Astier (Gironde).
LE BESGUE ✻, correspondant de l'Institut de France (Académie des Sciences), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
MANÈS ✻, officier de l'armée.
MONTESQUIOU (Louis de), docteur en médecine, près d'Agen.
MUSSET, docteur ès sciences, chef d'institution à Toulouse.
PICKMAN, manufacturier à Séville.
RAMEY (Eugène), naturaliste à Paris.
RODET, ingénieur de la Manufacture des Tabacs de Paris, ancien élève de l'École Polytechnique.
SENTEX, docteur en médecine à Saint-Sever (Landes).

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1867-68.

Président : M. O. DE LACOLONGE. — *Secrétaires :* MM. le Dr VERGELY et SERRÉ.

Séance du 7 novembre 1867. — Publications reçues :

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon. 2e série, tomes XI, XII, XIII; in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXI, 1867, nos 6, 7, 8.

INSTITUT ÉGYPTIEN D'ALEXANDRIE. — *Mémoires et Travaux originaux.* T. I, 1862; in-4°. — *Bulletin de l'Institut égyptien.* Nos 1-9, 1859-65; in-8°.

Il Nuovo Cimento. T. XXV, 1867; in-8°.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen. Années 1860-66; in-8°. — *Rapport sur le prix Le Sauvage,* 1862.

Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs. 3e série, t. I-X, 1856-64; 4e série, tomes I et II, 1866-67; in-8°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. T. III et IV, 1866; in-8°.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Colmar. Années 1, 2, 3, 4, 6, 7 (1859-67); in-8°.

K. böhm. Gesellschaft.... Société royale des Sciences de Bohême. Mémoires. T. X-XIV (1859-66); in-4°. — Comptes rendus des séances (1859-66); 16 livr. in-8°.

Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de Genève. T. XI-XVII (1re partie), XVIII (2e partie), XIX (1re partie), avec suppl. (1846-67); 16 vol. in-4°.

Boston Society.... Société d'Histoire naturelle de Boston. Mémoires. T. I, 1re et 2e partie, 1866-67; in-4°. — *Proceedings,* 1866-67, in-8°.

Annals.... Annales du Lycée d'Histoire naturelle de New-York. T. VIII, nos 11-14, 1866-67; in-8°.

Proceedings.... Comptes rendus de l'Académie des Sciences naturelles de Philadelphie. Année 1866; in-8°.

Annual Report.... Annuaire de l'Institut Smithsonien, pour l'année 1865; in-8°.

Bulletins de l'Académie royale de Belgique. T. XXI, XXII et XXIII, 1866-67; in-8°.

Annuaire de l'Académie royale de Belgique, pour l'année 1867; in-18.

Monatsbericht.... Compte rendu mensuel de l'Académie des Sciences de Berlin. Mai, juillet 1867; in-8°.

Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen. 2e année, 1866; in-8°.

Recueil des Travaux de la Société médicale d'Indre-et-Loire. Année 1867; in-8°.

Distribution des récompenses accordées aux Sociétés savantes, le 17 avril 1867; in-8°.

Séance du 21 novembre. — La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Sont élus pour l'année 1867-68 :

Président..........................	M. O. de LACOLONGE.
Vice-Président......................	M. GLOTIN.
Secrétaire..........................	M. le Dr VERGELY.
Vice-Secrétaire.....................	M. SERRÉ.
Archiviste..........................	M. HOÜEL.
Trésorier...........................	M. le Dr MICÉ.
Membres du Conseil d'administration.	MM. ABRIA, BAUDRIMONT, H. GINTRAC, JEANNEL, SANSAS.

— Publications reçues :

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. T. XI (1, 2, 3, 4) et T. XII (1); in-4°, 1866-67.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXI, n° 9.

Séance du 5 décembre. — M. O. de Lacolonge lit une communication *Sur les puits foncés*. (Voir au t. V des *Mémoires* de la Société.)

— Publications reçues :

Bulletin de la Société Philomathique de Paris. T. IV, janvier-mai 1867; 2 fascic. in-8°.

Memorie.... Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne. 2e série, t. I-VI, 1862-66; in-4°.

Collezione.... Œuvres complètes de Galvani. Bologne, 1841. 1 vol. in-4°, avec supplément.

Rendiconto.... Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne. 1864-67, 4 fascic. in-8°.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Neuchâtel. T. I-IV, 1835-59; in-4°.

Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchâtel. T. II-VII, 1847-67; 13 fascic. in-8°.

Anzeiger.... Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Vienne, classe physico-mathématique. Année 1866-67; in-8°.

Séance du 19 décembre. — M. Hoüel donne lecture d'un travail envoyé par M. Bert sur la mort des Poissons de mer dans l'eau douce.

— M. de Lagrandval lit une notice nécrologique sur M. de Lavernelle, ancien membre de la Société.

— MM. Delfortrie, Perez et Potocki, sont élus membres de la Société.

— Publications reçues :

Mémoires de la Société impériale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille. 3e série, t. III, 1866; in-8°.

Actes de la Société Helvétique des Sciences naturelles. 50e session, 1866; in-8°.

Mittheilungen... Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Berne. Nos 385-618, 1857-67; 10 fascic. in-8°.

Séance du 9 janvier 1868. — M. Delfortrie donne lecture d'un Mémoire sur l'existence d'une cité palustre, dont l'emplacement a été découvert à Bordeaux, dans la construction du grand égout. Il présente à la Société plusieurs objets trouvés dans ces fouilles. (Voir t. V des *Mémoires* de la Société.)

— MM. Robaglia et Rodier sont élus membres de la Société.

— Publications reçues :

Bulletin de la Société de Climatologie algérienne. 4e année, 1867, n° 7; in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXI, n° 10; in-8°.

Monatsbericht.... Compte rendu de l'Académie des Sciences de Berlin. Août 1867; in-8°.

Recherches sur la veine-porte rénale chez les Oiseaux, les Reptiles, les Batraciens et les Poissons, par M. S. Jourdain. 1860; in-4°.

Coup d'œil sur le système circulatoire de l'Astérie commune, par M. S. Jourdain. 1867; in-4°.

Verhandlungen.... Actes de la Société des Sciences naturelles de Brünn. T. V, 1866; in-8°.

Verslagen.... Actes de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam. 1re série, t. I-XVII; 2e série, t. I, 1853-66; in-8°.

Processen verbaal. 1865-1866; 2 fascic. — *Jaarboek....* Annuaire de l'Académie d'Amsterdam. 1866, 1 vol.

Anzeiger.... Bulletin de l'Académie des Sciences de Vienne. Années 1864-1865, 2 vol. in-8°.

Séance du 16 janvier. — M. Hoüel lit la traduction d'une Notice biographique sur les géomètres hongrois W. et J. Bolyai, adressée à la Société par M. Fr. Schmidt, architecte à Temesvár (Hongrie). (Voir le t. V des *Mémoires* de la Société.)

— Publications reçues :

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. 1867, n° 7; in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXI, n° 11.

Mémoires de la Société impériale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille. 1re série, 1849-1853, 5 vol. et 1 de Tables; 2e série, 1854-1863, 10 vol. et 1 de Tables; 3e série, 1864-1866, 3 vol. in-8°.

Séance du 30 janvier. — M. Hoüel donne un aperçu de la 2e partie de son travail sur les quantités complexes. (Voir le t. VI des *Mémoires* de la Société.)

— M. Fournet est élu membre de la Société.

— Publications reçues :

Det Kongelige.... Envoi de l'Université royale de Christiania : Observations météorologiques faites sur les côtes de Norvège, de 1861 à 1866. 2 vol. in-4° oblong.

Società Reale di Napoli.... Société royale de Naples. Actes de l'Académie des Sciences physiques et mathématiques. T. I et II, 1863-1865; in-4°. — Comptes rendus de l'Académie des Sciences physiques et mathématiques. Années I-VI, 1862 à mai 1867; in-4°.

Journal d'Éducation physique, morale et intellectuelle, par M. Clouzet aîné. Années 1-18, et les quatre premiers numéros de la 19e année. Bordeaux, 1849-1868; in-8°.

Séance du 13 février. — M. Jeannel communique un travail sur

la dissolution du sesquioxyde de fer dans le perchlorure de fer officinal. Voici les conclusions de ce travail : La présence de l'acide sulfurique ou des sulfates, même en très petites proportions, est la cause des différences qu'on a remarquées dans la solubilité de l'hydrate ferrique et dans la stabilité des sels ferriques. L'hydrate ferrique, préparé avec les précautions nécessaires pour qu'il ne retienne aucune trace d'acide sulfurique, est très facilement soluble à froid, même dans les acides étendus, pourvu qu'ils soient exempts d'acide sulfurique ou de sulfates. Il donne alors des sels stables. La solution officinale de perchlorure de fer peut être préparée directement au moyen de l'acide chlorhydrique pur et de l'hydrate ferrique exempt de sulfate. La solution officinale de perchlorure de fer peut dissoudre facilement jusqu'à 5 équivalents de sesquioxyde de fer à l'état d'hydrate à 75 °/₀ d'eau. Le chloroxyde ferrique ainsi obtenu est stable, très soluble dans l'eau, nullement caustique, et présente au plus haut point les propriétés astringentes, coagulantes et colorantes des sels ferriques. Il est décomposé par les plus petites quantités de sulfate ou d'acide sulfurique.

— Publications reçues :

Monatsbericht.... Compte rendu de l'Académie des Sciences de Berlin. Septembre et octobre 1867; in-8°.

Verhandlungen.... Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg. T. IV, n° 5; in-8°.

Transactions.... Mémoires de la Société philosophique de Cambrige. T. X, 2e part.; t. XI, 1re part.; 1864-1866; in-4°.

Séance du 27 février. — M. Valat annonce à la Société la communication d'un Mémoire sur les polyèdres semi-réguliers. Ce Mémoire avait été présenté à l'Académie des Sciences de Paris, au mois de Juillet 1854. Il avait été soumis à l'examen d'une Commission dont M. Poinsot faisait partie. La mort de ce savant détermina M. Valat à retirer son Mémoire. En 1866, l'auteur en communiqua un extrait à la réunion des Sociétés savantes à la Sorbonne. Depuis, il a publié, dans les *Actes de l'Académie de Bordeaux,* une Note relative à quelques conséquences de ce Mémoire.

— M. Jeannel revient sur sa communication relative au chloroxyde ferrique. Il en a préparé à l'état solide; ce corps, très soluble dans l'eau, est précipité de sa dissolution par les acides citrique et tartrique. L'auteur a obtenu un chloroxyde ferrique renfermant 7 équivalents de sesquioxyde de fer pour 1 de perchlorure; c'est un liquide foncé, de densité 1,21. Il a obtenu également un liquide renfermant 2 équivalents de sesquioxyde de fer pour 1 équivalent

d'acide azotique. L'auteur en conclut qu'il y a deux classes de sels de sesquioxyde de fer, les uns sont neutres, les autres peuvent dissoudre un excès de sesquioxyde de fer. Le citrate ferrique desséché vers 30° ou 40° est insoluble dans l'eau, mais soluble dans un excès d'acide citrique ou dans l'ammoniaque.

— Publications reçues :

Verhandlungen.... Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg. T. III (nos 2 à 5), t. IV (nos 1 à 4), 1862-1866; in-8°.

Nachrichten.... Comptes rendus de la Société royale des Sciences et de l'Université de Georges-Auguste, pour l'année 1866. Gœttingue; in-12.

Verhandlungen.... Actes de la Société d'Histoire naturelle de Presbourg. 8e et 9e année, 1864-1866; in-8°.

Abhandlungen.... Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Halle. T. IX et T. X (1er et 2e cahier), 1864-1867; in-4°.

Abhandlungen.... Mémoires de Mathématiques et de Physique de l'Académie royale des Sciences de Berlin. 1863-1865; 5 fascic. in-4°.

Journal de Médecine de Bordeaux. Février 1868.

Revue agricole, industrielle, artistique et littéraire. Décembre 1867; in-8°.

Report.... Rapport de la Commission des Patentes des États-Unis, pour les années 1863-1864; 4 vol. in-8°.

Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow. 1866-1867, vol. VI, n° 3; in-8°.

Commissão Geologica.... Commission géologique de Portugal. De l'existence de l'homme dans notre sol à des époques très reculées, prouvée par l'étude des cavernes. 1er Mémoire, par Delgado. Lisbonne, 1867; in-4°. (130 p., 2 pl.)

Séance du 12 mars. — M. Valat donne lecture à la Société de son Mémoire sur les polyèdres semi-réguliers. (Voir t. V des *Mémoires.*)

— M. Baudrimont fait à la Société une communication relative à la comparaison de la lumière et du son, au point de vue des intervalles qui séparent les diverses couleurs du spectre; ces intervalles étant entendus comme en acoustique.

— Publications reçues :

Schriften.... Publications de la Société pour la propagation des Sciences naturelles. T. VII. Vienne, 1868; 1 vol. in-12.

Rapport fait à l'Académie royale des Sciences des Pays-Bas, le 25 janvier 1868; in-8°.

Monatsbericht.... Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin. Novembre 1867; in-8°.

Il Nuovo Cimento. T. XXVI, novembre et décembre 1867, et t. XXVII, janvier 1868; in-8°.

Journal d'Éducation physique, morale et intellectuelle, par Clouzet aîné. 19e année, n° 5; in-8°.

Sitzungsberichte.... Comptes rendus des séances de l'Académie royale des Sciences de Bavière. 1867, t. II, cah. 2 et 3; in-8°.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris. T. IV, juin-août 1867; in-8°.

Le ver à soie du chêne à l'Exposition universelle de 1867, par Camille Personnat. Brochure in-8°.

Actes de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. 1867, n° 3; in-8°.

Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen. 1re année, 1865; in-8°.

Séance du 26 mars. — M. Royer lit une Notice nécrologique sur M. T. Billiot, membre décédé de la Société.

— M. Ratheau est élu membre titulaire, et M. le Dr Boudet membre correspondant de la Société.

— Publications reçues :

Discours sur le mouvement de la population en France; par M. F. Boudet.

Discours sur la mortalité des jeunes enfants; par le même.

Observations sur le lait artificiel de M. Liebig; par le même.

Il Nuovo Cimento. T. XXVI, juillet-octobre 1867; 3 fasc. in-8°.

Annali delle Università Toscane. T. IX, 1867; in-4°.

Journal de Médecine de Bordeaux; mars 1868; in-8°.

De la classification de certains opercules de Gastéropodes. — Lettre à M. F. Crépin, professeur à Gand. — Descriptions et figures de quelques coquilles fossiles du terrain tertiaire et de la craie. — Excursion de la Société Linnéenne à Cazeneuve; par M. Charles Des Moulins. — Broch. in-8°; 1867-68.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. Années 1862-65; 5 vol. in-8°; Nancy.

Séance du 30 avril. — M. Baudrimont donne lecture d'un travail qu'il a communiqué à la réunion des Sociétés savantes de Paris, intitulé : *Origine et conservation de la force et du mouvement.*

— Publications reçues :

Revue agricole, industrielle, artistique et littéraire. T. XXII, nos 1 et 2; in-8°.

Sitzungsberichte.... Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de Munich. 1867; t. I, 4e cah., et t. II, 1er cah.; in-8°.

Die Entwickelung..... Le développement des idées dans les Sciences naturelles; par J. v. Liebig. Broch. in-4°. Munich, 1866.

Die Bedeutung..... Résultats des mesures récentes du degré du méridien; par C. M. Bauernfeind. Broch. in-4°. Munich, 1866.

P. Trémaux. — *Principe universel de la vie, de tout mouvement et de l'état de la matière*. 1re livraison; in-12.

Journal d'Éducation physique, morale et intellectuelle. 19e année, n° 6; in-8°.

W. I. Loomis. — *Discovery*..... Découverte de l'origine de la gravitation. — *A new Resolution*..... Nouvelle détermination des diamètres et des distances des corps célestes par l'Arithmétique ordinaire. New-York; 1866-68. 2 broch. in-8°.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris. T. IV; oct.-déc. 1867; in-8°.

S. Jourdain. — *Notice géologique et anatomique sur une espèce de Chétoptère* (Chætopterus Quatrefagesi). 1868; broch. in-8°.

Nachrichten.... Comptes rendus de la Société royale des Sciences et de l'Université de Gœttingue. Année 1867; in-12.

Abhandlungen..... Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1866. — Sciences mathématiques et sciences physiques. 2 vol. in-4°.

Memorie..... Mémoires de l'Institut royal Lombard des Sciences et des Lettres. — *Sciences*. T. X, 3 fasc.; 1865-66. — *Lettres*. T. X, 5 fasc.; 1865-67. Milan; gr. in-4°.

Reale Istituto Lombardo. — Institut royal Lombard. — Comptes-rendus. — *Sciences*. T. I, II, III, et t. IV (fasc. 1, 2, 3). — *Lettres*. T. I, II, III, et t. IV (fasc. 1, 2, 3). Milan, 1864-67; in-8°.

Journal de Médecine de Bordeaux. Avril, 1868; in-8°.

A. Forti. — *Della vita e delle opere di Luigi Lagrange*. Pise; broch. in-8°.

Séance du 14 mai. — M. de Lacolonge communique à la Société un travail intitulé : *Examen d'un moyen proposé pour faire contribuer la traction des locomotives à leur adhérence*. (Voir t. V des *Mémoires*.)

— M. Baudrimont présente à la Société un travail commencé depuis longtemps sur l'élasticité des corps hétérophones. Il fait passer sous les yeux de la Société les nombreuses figures nodales qu'il a obtenues en faisant vibrer des plaques de quarz coupées dans diverses directions.

— M. A. LAGANNE est élu membre de la Société.

— Publications reçues :

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XXIV; 1867; in-8°.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1868; in-12.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. — Classe des Sciences. T. X-XVI; 1860-67. — Classe des Lettres. T. VII-XII; 1858-65; gr. in-8°.

Journal d'Éducation physique, morale et intellectuelle; par CLOUZET. Mai 1868; in-8°.

Sitzungsberichte..... Comptes-rendus de l'Académie de Munich. 1863; t. I, 4e cah.; in-8°.

Oversigt..... Comptes-rendus des travaux de la Société royale des Sciences de Danemark. Années 1855-66, 12 vol. Année 1867, 3 fasc. Copenhague; gr. in-8°.

Monatsbericht..... Compte-rendu mensuel de l'Académie des Sciences de Berlin. Décembre 1867; in-8°.

Atti..... Actes de l'Institut royal Vénitien des Sciences, Lettres et Arts. T. XIII, 3e série; livr. 1, 2, 3, 4; 1867-68; in-8°.

Bulletin de l'Académie delphinale. 3e série, t. III. Grenoble, 1867; in-8°.

Introduction à la Flore d'Algérie. — Phanérogamie. — Groupe des glumacées; par COSSON et DURIEU DE MAISONNEUVE. Paris, 1854-67; broch. in-fol.

A. LAGANNE. — *Note sur les érosions des calcaires dénudés de la vallée de la Vézère et de ses affluents.* Br. in-8°.

Journal de Médecine de Bordeaux. Années 1857-1865; 9 vol. in-8°. — Année 1866, n° 4.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. T. XXII; mars 1868. Valenciennes; in-8°.

Verhandlungen..... Actes de la Société d'histoire naturelle de la Prusse Rhénane et de la Wesphalie. T. XV-XXIV, 1858-67. Bonn. In-8°.

Séance du 28 mai. — M. DELFORTRIE lit un Mémoire sur la découverte à Cubzac (Gironde) d'une station préhistorique appartenant à l'âge de la pierre polie. (Voir tome V des *Mémoires*.) Il montre à la Société plusieurs des objets qui ont été trouvés dans les fouilles exécutées à Cubzac. Un de ces objets, ayant la forme d'une petite hache parfaitement finie, ayant été indiqué par M. Delfortrie comme un instrument dont il ignore l'usage, M. SAN-

sas dit en avoir vu d'exactement semblables en Afrique; les femmes arabes les emploient pour se tatouer; la seule différence consiste en ce que l'instrument arabe est en acier fondu.

— M. Glotin présente quelques observations relatives à la communication faite par M. de Lacolonge dans la séance précédente. Il y aurait, selon lui, avantage à attacher le levier au milieu du wagon, au lieu de l'attacher à une de ses extrémités.

— Publications reçues :

Il Nuovo Cimento. T. XXVII, février-avril 1868. Pise; in-8°.

Académie impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux; Compte rendu des Séances. 1867-68, nos 9 et 10; in-8°.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen. 1868; in-8°.

Séance du 11 juin. — M. Lespiault présente à la Société divers instruments, tels que la toupie gyroscopique de Froment et le culbuteur de Hardy. Il accompagne les expériences d'explications; tous les mouvements de ces appareils reposent sur la considération et la composition des couples.

— M. de Lacolonge montre à la Société divers objets : ce sont des débris de roues hydrauliques en bois trouvés dans des mines de cuivre en Portugal. Ces roues, dont il présente un dessin, remontent à l'époque de l'exploitation de ces mines par les Romains; le bois en est parfaitement conservé, grâce au sel de cuivre dont il est imprégné.

— M. de Lacolonge explique le jeu de la machine pneumatique de M. Deleuil par la perte de la force vive qu'éprouve l'air de la part des chicanes du piston.

— Publications reçues :

Abhandlungen.... Mémoires publiés par la Société d'Histoire naturelle de Brême. T. I, 3e cah., 1868; in-8°.

Journal d'Éducation; par M. Clouzet. 19e année, n° 8; in-8°.

Séance du 25 juin. — M. Baudrimont présente quelques observations relatives à l'expérience de M. Monnier, d'après laquelle le poids d'un corps varierait avec sa température. Selon M. Baudrimont, les résultats obtenus proviennent des variations de température que la balance éprouve de la part des courants d'air ou de causes analogues. Il a lui-même souvent observé des effets semblables.

— M. Lespiault communique quelques faits relatifs au mouvement d'un corps solide sur un plan fixe horizontal. On sait que, lorsqu'on fait tourner rapidement un ellipsoïde homogène allongé

autour d'un des diamètres de son équateur, cet ellipsoïde prend, au bout de quelques secondes, un mouvement permanent de rotation autour de son grand axe, qui se redresse verticalement. M. Lespiault attribue cet effet aux réactions *normales* du plan, qui se transmettent au centre de gravité du corps, comme des forces agissant de bas en haut. Il en conclut, par induction, que si l'ellipsoïde n'est pas homogène, son axe doit toujours se placer de manière que le centre de gravité soit le plus haut possible.

M. Lespiault fait devant la Société plusieurs expériences à l'appui de son hypothèse.

— Publications reçues :

Abhandlungen.... Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin. — Sciences mathématiques et physiques. Années 1859, 1860, 1861, 1862; 7 fasc.; in-4°.

Atti.... Actes de l'Académie royale des Sciences de Turin. T. II, fasc. 4, 5, 6, 7; 1867; in-8°.

Atti.... Actes de l'Institut royal Vénitien des Sciences, Lettres et Arts. Troisième série, t. XII, fasc. 2-10, 1866-67; in-8°.

Accademia Pontaniana. Actes. T. V, VI, VII, VIII. Naples, 1853-1864; in-4°. — *Rendiconti....* Comptes rendus des séances. 1854-1865; in-8°.

Envois de l'*Accademia Pontaniana: Agli Scienzati d'Italia del VII Congresso.* 1845; in-4°. — *Alla memoria di Fr. Avellino.* 1850; in-4°. — CESARE CANTÙ : *Origine della lingua italiana.* 1865; in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Avril 1868; in-8°.

Journal de Médecine de Bordeaux. Juin 1868; in-8°.

Séance du 9 juillet. — M. LESPIAULT, revenant sur la communication qu'il a faite à la séance précédente, montre que si l'ellipsoïde est exactement équilibré, de manière que lorsque le corps est placé sur un plan horizontal son grand axe reste aussi horizontal, cet axe ne tend pas à se placer verticalement quand on imprime au corps un mouvement de rotation; que ce dernier phénomène se présente néanmoins si l'impulsion primitive donnée au corps n'est pas exactement horizontale, ou si, pendant le mouvement de rotation, on donne un petit choc vertical au corps.

— M. HOÜEL donne lecture d'un extrait d'un Mémoire de M. le Dr GRONAU, de Danzig, relatif à l'historique de la théorie de la résistance de l'air [1].

[1] *Historische Entwickelung der Lehre vom Luftwiderstande.* (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Danzig, 1865.)

On doit faire remonter jusqu'à Galilée seulement les premiers essais sérieux de résolution du problème de la chute des corps pesants. Galilée détermina, comme on sait, la loi rigoureuse de la chute des corps dans le vide, et il remarqua les altérations que la présence de l'air fait subir à cette loi. Ainsi, en tirant de haut en bas des balles de mousquet contre une même plaque de fer, il vit que l'aplatissement de la balle diminuait à mesure que le coup partait de plus haut, résultat contraire à ce qui aurait eu lieu dans le vide.

Les expériences de Galilée furent confirmées par celles de Riccioli, de Dechales, etc. Dechales remarqua, le premier, que la vitesse d'un corps qui tombe dans l'air tend à prendre une valeur finie et constante, la résistance du milieu finissant par détruire l'accélération due à la pesanteur.

Laissant de côté l'expérience de Mariotte, dont les résultats ont été contestés de son temps par Lahire, nous passons aux travaux de Newton sur ce sujet important. Ce grand génie, comprenant toutes les difficultés du problème, s'appliqua à tenir compte de toutes les circonstances qui peuvent modifier la résistance des milieux. C'est ainsi qu'il parvint aux résultats suivants : 1° La résistance d'un milieu est proportionnelle à la densité de ce milieu; 2° elle est inversement proportionnelle à la densité du corps mobile; 3° la résistance d'un milieu contre un plan mobile perpendiculairement à lui-même est égale à une colonne de ce fluide, ayant pour base le plan mobile, et une hauteur égale à celle dont devrait tomber un corps dans le vide pour acquérir sa vitesse actuelle; de sorte que, pour des vitesses égales, la résistance est proportionnelle à l'aire du plan mobile; 4° la résistance qu'un milieu exerce obliquement sur un plan est proportionnelle au carré du sinus de l'inclinaison. Il admit, enfin, que la résistance du milieu était proportionnelle au carré de la vitesse du mobile, après toutefois avoir constaté par l'expérience que la loi se vérifiait le plus ordinairement. Les expériences de Hawksbee, puis celles de Desaguliers, montrèrent que la théorie de Newton est généralement satisfaisante, du moins pour les vitesses moyennes. Il résulte des observations de ces savants, aussi bien que des calculs de Lambert (1765), que tout corps qui tombe dans un milieu résistant acquiert, au bout d'un certain temps, une vitesse qu'il conserve ensuite pendant toute la durée de sa chute; que cette vitesse maximum est d'autant moindre et d'autant plus vite acquise que la densité du mobile est moindre, et que celle du milieu est plus considérable. Le parachute, importé de l'Inde en

Europe, et employé par tous les aéronautes, peut servir de preuve à cette assertion.

— M. Jeannel présente à la Société un échantillon de phosphate de chaux des os, qu'il a obtenu en faisant bouillir pendant un temps assez long des os dans une lessive de soude fortement alcaline. Cette poudre est à un état de tenuité considérable; elle ne fait pas effervescence lorsqu'on la traite par un acide.

Séance du 9 juillet. — Publications reçues :

Elementi di Calcolo infinitesimale; par R. Rubini. Première partie : Calcul différentiel. Naples, 1868; in-8°.

Monatsbericht.... Compte rendu de l'Académie des Sciences de Berlin. Janvier, février et mars 1868; in-8°.

Atti del R. Istituto Veneto. T. XII, 1re livr., 1866. Venise; in-8°.

Memorie del R. Istituto Veneto. T. XIV, 1868. Venise; in-4°.

Journal d'Éducation; par M. Clouzet. 19e année, n° 9; in-8°.

Coup-d'œil sur le système veineux et lymphatique de la Raie bouclée; par S. Jourdain. Br. in-8°.

Journal de Médecine de Bordeaux. Années 1867, 1868; janvier 1868; in-8°.

Séance du 26 juillet. — M. Baudrimont présente à la Société la Leçon d'ouverture de son Cours de Chimie à la Faculté des Sciences.

— M. Delfortrie lit une Note relative aux fouilles qui viennent d'être exécutées à Bordeaux, en face de l'Entrepôt. L'excavation a présenté la coupe suivante :

1° Pavé et terre	1m.
2° Graviers avec coquilles lacustres	1m50.
3° Graviers avec coquilles marines	2m.
4° Graviers, galets, gros blocs de silex noirs, ossements fracturés	2m20.

M. Delfortrie dépose sur le bureau des coquilles provenant des bancs n° 2 et n° 3, et plusieurs os; un fragment de métatarsien fortement strié, une défense de *Sus* striée, un andouiller de cerf scié provenant du banc n° 4.

D'après M. Delfortrie, ces trois derniers objets prouvent l'existence d'une station anté-historique sur notre littoral. La couche marine observée près de l'Entrepôt, celle qu'il a reconnue sur la place Rohan, lui font admettre cette conclusion : qu'à deux époques successives, la plage a été soulevée devant Bordeaux.

— Publications reçues :

Il Nuovo Cimento. T. XXVII; mai et juin 1868; in-8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Mai 1868; in-8°.

Discours prononcés au Sénat dans les séances des 22 et 23 mai 1868; par MM. Duruy et Ch. Robert. In-8°.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris. T. V; janvier à mars 1868; in-8°.

Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs, 4e série, 3e volume, 1867. Besançon; in-8°.

Séance du 6 août. — M. Perez communique les résultats de recherches qu'il a faites sur la formation de l'œuf, principalement chez les *Nématodes,* le *Bombyx mori,* l'*Helix aspersa.*

Chez tous ces animaux, l'œuf apparaît sous forme d'un noyau de cellule. La couche périphérique de ce noyau se détache en une membrane, qui est la membrane propre de l'ovule, la membrane vitelline. Le reste du noyau primitif s'accroît, et donne naissance par le même procédé à une nouvelle membrane, la vésicule germinative. Un dépôt de granulations de plus en plus abondantes se produit dans le contenu liquide de la cellule ovulaire, et le vitellus se constitue.

M. Perez s'est surtout attaché à établir la préformation de la membrane vitelline. C'est, selon lui, pour n'avoir pas suivi avec assez d'attention les premiers développements de l'œuf, que la plupart des ovologistes (Henle, Wagner, Valentin, von Siebold, Van Beneden, Claparède, etc., etc.) ont nié l'existence de cette membrane pendant toute la durée de la formation du vitellus, et ont cru qu'elle apparaissait seulement au terme de cette formation. Mais cette membrane est facile à constater dans l'ovule encore très jeune et peu ou point granuleux; et dans les œufs plus chargés de granules, chez divers Ascarides notamment, il suffit d'expulser de la région supérieure de l'ovaire une colonne d'ovules, pour voir se former sur les flancs de cette colonne une multitude de festons de la plus grande élégance. C'est le résultat de l'expansion des membranes propres de plusieurs ovules.

Dans l'œuf plus avancé, la membrane vitelline a perdu cette propriété endosmotique si énergique; elle ne se sépare plus du contenu granuleux sous-jacent, dont il est fort difficile de la distinguer. Elle s'en isole de nouveau, et redevient distincte dans l'œuf complètement mûr et revêtu de sa coque.

Revenant ensuite à la genèse de l'ovule, M. Perez déclare ne

pouvoir admettre que cet élément dérive d'un autre élément transformé (cellule épithéliale ou autre), comme l'affirment les partisans de la théorie cellulaire, telle qu'elle est professée aujourd'hui en Allemagne. Il n'y a jamais d'épithélium dans les culs-de-sac ovariens. Dans certaines espèces, cette absence est manifeste. Chez d'autres, là où les auteurs ont cru voir et ont figuré des épithéliums, ils ont pris pour tels de jeunes ovules, erreur qui n'eût point été commise si l'on eût suivi la genèse de l'ovule dès son apparition à l'état de simple noyau.

Le noyau primitif de l'ovule naît spontanément dans une exsudation liquide, homogène ou granuleuse, qui recouvre presque toujours le fond du cul-de-sac ovarien, et que l'on a prise pour un épaississement de la paroi. Mais l'action prolongée de l'eau dilue cette substance et en montre la véritable nature, en laissant inaltérée la membrane propre du fond du cul-de-sac, qui est au contraire fort mince. Cette substance blastématique est si abondante chez certaines ascarides *(A. mystax* et *suilla)*, qu'elle occupe à l'extrémité du tube une longueur considérable, souvent égale à douze ou quinze fois sa largeur.

La genèse et le développement de la cellule mâle, ou cellule-mère des spermatozoïdes, reproduisent fidèlement, dans ce qu'il y a d'essentiel, les phénomènes que présentent la naissance et l'évolution de l'ovule. (Nématodes, *Bombyx, Helix, Rana, Triton.*)

— M. Serré lit, au nom de M. Abria, une *Note relative à la chaleur spécifique de la farine;* elle avait été desséchée pendant plusieurs jours, et ne contenait par conséquent que très peu d'humidité. Les résultats de trois expériences ont été les suivants : 0,2673; 0,2671; 0,2693, dont la moyenne est 0,268 ou 0,27.

— M. Hoüel continue la lecture de l'extrait du Mémoire de M. Gronau, relatif à l'historique de la théorie de la résistance de l'air.

Benzenberg entreprit des expériences à ce sujet en faisant tomber des balles de plomb de différentes hauteurs dans la tour Saint-Michel, à Hambourg; il voulait prouver l'inexactitude de l'hypothèse de Newton, que la résistance de l'aire est proportionnelle au carré de la vitesse. Mais en tenant compte des difficultés inhérentes à l'expérience même, en appliquant le calcul aux résultats trouvés, comme l'ont fait Brandes, contemporain de Benzenberg, et M. Gronau lui-même, on arrive à ce résultat, que les écarts sont de la nature de ceux qui se rencontrent dans toutes les expériences. Mais les recherches de Benzenberg conduisirent à un résultat plus important : c'est la preuve de la rotation de la terre sur elle-même qu'on

déduisit de l'écart observé vers l'est. Cependant, l'écart trouvé par Benzenberg était un peu trop grand, comme l'ont prouvé depuis les expériences exécutées avec toutes les précautions possibles par Reich au Puits des Trois-Frères, à Freiberg. En appliquant le calcul aux résultats obtenus par Reich, l'auteur trouve que la loi de Newton est admissible pour les hauteurs de chute qui vont jusqu'à 500 pieds de Paris.

L'auteur applique de même le calcul aux résultats obtenus par Günther et Bernoulli, en Russie (1729); puis, plus tard, par Ch. Hutton, à Woolwich, sur des boulets lancés verticalement. Il semble que la résistance de l'air a d'autant moins d'influence que le boulet a un plus gros volume. On a étudié la résistance de l'air, non seulement au moyen du tir vertical, mais encore au moyen du tir oblique. Au point de vue théorique, la question présente des difficultés telles, qu'aucune solution pratique n'en a été donnée, malgré le talent des mathématiciens qui s'en sont occupés. Les résultats expérimentaux ont conduit à admettre que la résistance de l'air était proportionnelle à une puissance de la vitesse supérieure à la deuxième; mais ici encore les difficultés sont nombreuses, à cause des quantités dont on a besoin dans ces expériences, et qui ne sont pas déterminées avec la précison nécessaire. La loi du carré de la vitesse n'étant vraie que pour des vitesses moyennes, et cessant d'être exacte pour des vitesses très grandes et pour des vitesses faibles, l'auteur se propose d'appliquer le calcul aux expériences de chute de corps dans l'eau faite par Newton, en supposant la résistance proportionnelle à $v + v^2$. Newton, en effet, admettait deux manières d'agir de l'air sur un corps en mouvement : 1° la résistance *respective,* comme l'appelait Leibniz, le milieu résistant étant une masse inerte qui doit être déplacée par le mobile; 2° la résistance absolue due à l'adhésion du milieu pour le mobile. La première, d'après Newton, est proportionnelle à v^2; la seconde à v.

— M. Ratheau donne sur quelques explications, à propos de la précédente communication, la déviation du boulet à la sortie du canon. Dans les pièces non rayées, elle dépend du dernier battement du projectile dans la pièce; dans les pièces rayées, la déviation est due surtout au mouvement de rotation dont le projectile est animé. Cette déviation a toujours lieu dans le même sens, et peut attendre 1/6 de la distance parcourue. Aussi, les pièces rayées sont-elles munies de deux systèmes de hausse : l'un vertical, l'autre horizontal. Des expériences récentes ont montré que cette déviation variait d'une pièce à l'autre.

— Publications reçues :

Monatsbericht.... Compte rendu de l'Académie royale des Sciences de Berlin. Avril 1868; in-8°.

Revue agricole, industrielle, etc.... T. XXII, n° 6; juin 1868; in-8°.

Journal d'Éducation; par M. Clouzet. Août 1868; in-8°.

Bulletin de la Société de Climatologie algérienne. 4e année, n° 8; in-8°.

Actes de l'Académie impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. 1867, 4e trimestre; in-8°.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; par M. Perez. *Recherches sur l'Anguillule terrestre.* 1866; in-4°.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1867-1868.

Bulletin de la Société de Climatologie algérienne. ALGER. — In-8°.

4e année, 1867, nos 4-8. — BERTHERAND : La longévité dans le nord de l'Afrique à l'époque romaine. — BESANÇON : Essai de topographie médicale de la ville de Constantine, par le Dr REBOULEAU (analyse) (6 p.). — BOURJOT : Liste des Poissons du marché d'Alger (3 art., 75 p.). — FEUILLET : La colonisation de l'Algérie par l'élément européen est-elle viable? (18 p.) — GRELLOIS : Notice historique et critique sur l'*aura*. — JOUAULT : Examen de la doctrine de Montesquieu sur le rapport des lois avec la nature du climat (12 p.). — JOURDAN : Flore murale du Tombeau de la Chrétienne (40 p.). — MARÈS : Notice sur les sondages de la plaine de la Mitidja, par M. VATONNE (analyse). — MENECIER : Le climat a-t-il une part dans le développement de la rage en Algérie? (2 art., 17 p.). — PUZIN : Le climat algérien et la phthisie pulmonaire (5 p.). De l'influence de l'air maritime sur la phthisie pulmonaire (3 p.). — SANTERRE et PUZIN : Réponse à quelques assertions de M. de Quatrefages. — SÉRIZIAT : Études sur l'oasis de Biskra (4 art., 175 p.).

5e année, 1868, nos 1-3. — BAZILLE, Topographie médicale du Fort-Napoléon (17 p.). — BERTHERAND : L'*Acera anthropophora* (3 p.). La médecine légale en Algérie (7 p.). — BERTHERAND et BOURJOT : Fouilles des dolmens des Beni-Messous. Déductions anthropologiques (14 p.). — BOURJOT : Liste des Poissons du marché d'Alger (*suite*) (11 p.). Découverte d'une grotte à la Pointe-Pescade (10 p.). Histoire naturelle du massif d'Alger (7 p.). — GAUCHER : Le typhus abortif à Aïn-Temouchent (7 p.). — JOBERT : Création d'un établissement d'aliénés en Algérie (15 p.). — LALLEMANT : Catalogue des Coléoptères de l'Algérie (18 p.).

Mémoires de la Société Académique de Maine-et-Loire. ANGERS. — In-8°.

T. XXI, 1867. — DIEZ : Monuments littéraires du vieux-haut Allemand. Sens qu'il faut donner au mot *deutsch* (62 p.).

T. XXII, 1868. — BOREAU : Herborisations faites en Maine-et-Loire en 1866 (16 p.). — DECHARME : Météorologie. Halos et couronnes observés à Angers en 1866-67. Bolide et étoiles filantes. Tremblement de terre (45 p.). — BOUCHÉ : De l'Essai sur les grandeurs des différents ordres, de M. DEBACQ. — FRANCHET : Essai sur les espèces du genre *Verbascum*, croissant spontanément dans le France, et plus particulièrement sur leurs hybrides (140 p.).

Berichte des naturhistorischen Vereins in AUGSBURG. (Comptes rendus de la Société d'Histoire naturelle d'AUGSBOURG.) — In-8°.

N° 16, 1863. — KÖRBER : Poisons animaux et végétaux (3 p.). Sur les races animales et humaines (60 p.). — HORKEL : L'eau dans les combinaisons chimiques (6 p.). — SCHELLER : Emploi des Mollusques comme aliments et pour d'autres usages (5 p.). — BUCHNER : Esquisse d'un tableau de la flore de Kaufbeuren, comparée à celle d'Augsbourg (26 p.). — RÖTHE : Analyse chimique du basalte d'Eichelkopf, près Gettenbach (Hesse). — REHM : Flore des Lichens de l'Allgäu (44 p.). — MAY : Les Guêpes carnassières des environs de Dillingen (2 p.). Les *Rynchota heteroptera*, punaises des environs de Dillingen (2 p.).

N° 17, 1864. — WALSER : Trichoptères de Bavière. Les Phryganides trouvées jusqu'à ce jour aux environs de Schwabhausen (Haute-Bavière), etc. (47 p.). — ECKERT : Analyse chimique de la source du Mauerbad, à Augsbourg (15 p.). — REHM : Flore des Lichens de l'Allgäu (2e art.) (9 p.). — CAFLISCH : Additions au « Tableau de la flore d'Augsbourg » (9 p.). — MAYER : Observations botaniques sur Krumbach et ses environs (6 p.).

N° 18, 1865. — MAACK : Recherches paléontologiques sur des Lophiodons fossiles, encore inconnus, de Heidenheim, en Franconie (76 p., 14 pl.). Analyse d'une Leçon sur la théorie de Darwin (8 p.). — MOLENDO : Étude sur les Mousses des Alpes de l'Allgäu (164 p.).

N° 19, 1867. — NEIDHART : Les plantes considérées au point de vue des religions, des superstitions et des traditions populaires (66 p.). — RÖTHE : Sur quelques dolomites et autres espèces de roches du Ries et des Alpes (22 p.). — REHM : Flore des Lichens de

l'Allgäu (3e art.) (5 p.). — KITTEL : Additions au Tableau systématique des Coléoptères d'Augsbourg (7 p.). — CAFLISCH : Additions à la flore d'Augsbourg (12 p.). — SCHELLER : Sur les Hirondelles (27 p.).

***Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu* BERLIN.** (Compte rendu mensuel de l'Académie Royale des Sciences de Prusse, à BERLIN.) — In-8°.

Année 1867.

Décembre. — PETERS : Sur l'*os tympanicum* et sur les osselets de l'oreille des Ornithorynques. — BRAUN : Sur les Characées d'Afrique (2 art., 9-71 p.). — POGGENDORFF : Étude d'un nouvel appareil électrique de Holtz (42 p.). — EHRENBERG : Développement ultérieur du *Hyalonema lusitanicum* et des Spongiacées (15 p.). — KUNDT : Sur la vitesse du son dans l'air renfermé dans des tuyaux (7 p.). — PETERS : Sur la famille des Chauves-souris (8 p.).

Année 1868.

Janvier. — HOFMANN : Sur l'acide ménaphdoxylique et ses combinaisons (10 p.). Sur les isoméries dans la série des éthers sulfocyanhydriques (8 p.). — SCHNEIDER : Le cyanure d'argent en présence du chlorure de soufre. — DOVE : Température et humidité des vents en Perse.

Février. — PETERS : Sur le *Malopterurus electricus* de Mozambique. — KUNDT : Sur la production de vibrations et de figures acoustiques permanentes dans les fluides élastiques et dans les liquides au moyen de plaques sonores fixes (5 p.). — PETERS : Sur un jeune exemplaire de *Cepola rubescens.* — QUINCKE : Sur la constante de la capillarité dans les corps solides (11 p.). — REICHERT : Remarque sur une communication de Peters (1867, p. 727). — PETERS : Sur un sous-genre de Vespertiliens, et sur de nouveaux Poissons.

Mars. — MAGNUS : Sur la polarisation de la chaleur à 100° C., et sur le mouvement dans la propagation de la chaleur (10 p.). — GRUBE : Hérisson de mer vivipare. — BURMEISTER : Otariées de la côte de la Plata. — POGGENDORFF : Sur un cas encore peu étudié de conductibilité électrique du verre (5 p.). — HOFMANN : Sur la composition de l'hypersulfure d'hydrogène.

Avril. — VOM RATH : Nouvelle modification cristalline de l'acide silicique (6 p., 1 pl.). — RAMMELSBERG : Sur la formation des hyperiodates (8 p.). — HELMHOLTZ : Sur les mouvements discontinus des fluides (13 p.). — MAGNUS : Sur la polarisation de la chaleur rayonnante émise par les fluides à 100° C. (3 p.). — PETERS : Quatrième volume de la zoologie de son voyage à Mozambique

(2 p.). Poissons recueillis par F. Jagor dans l'Archipel des Indes-Orientales (27 p.). — Hofmann : Sur la ménaphtylamine. — Clebsch : Sur les surfaces du quatrième ordre à courbe double du second ordre (6 p.).

Mai. — Spörer : Sur une tache solaire remarquable, observée en 1867, du 9 septembre au 11 décembre (13 p.). — Ehrenberg : Sur la terre rouge indiquée comme servant de nourriture aux nègres de la Guinée, etc. — Magnus : Sur la faculté de la sylvine de laisser passer la chaleur. — Weierstrass : Sur la théorie des formes quadratiques et bilinéaires (19 p.). — Kronecker : Remarques sur le Mémoire précédent (8 p.). — Poggendorff : Construction perfectionnée de la chaîne de Grove. — Quincke : Sur la capillarité des corps en fusion (7 p.).

Juin. — Peters : Sur les Vespertiliens appartenant aux *Glossophagæ,* et sur une nouvelle espèce du genre *Coleura* (7 p.).

Juillet. — Reusch : Sur l'étude par les grains de sable des micas à deux axes (5 p.). — Wiedemann : Sur le magnétisme des combinaisons chimiques (7 p.). — Poggendorff : Indépendance entre le courant par influence et la résistance des substances conductrices (7 p.). — Peters : Nouvelle espèce de Rongeur, *Chiropodomus penicillatus;* quelques Amphibies et Poissons nouveaux ou peu connus (13 p.). — Hofmann : Sur la guanidine (3 p.). Sur l'éther sulfocyanhydrique correspondant à l'huile de moutarde. — Paalzow : Sur la résistance galvanique des fluides (6 p.).

Août. — Riess : Sur les ventilateurs électriques (19 p.). — Braun : Sur les espèces australiennes du genre *Isoëtes* (23 p.).

Septembre et *Octobre.* — Braun : Communication relative au voyage du Dr Schweinfurth. — Ehrenberg : Extraits de lettres du Dr Haast sur le gisement des *Dinornis* de la Nouvelle-Zélande.

Novembre. — Adresse à M. Ehrenberg (5 p.). — Peters : Sur les osselets de l'oreille et les cartilages de Meckel chez les Crocodiles (7 p.). Sur un nouveau genre de Silure, découvert par le baron v. der Decken, et sur quelques autres Poissons d'eau douce de l'Afrique orientale (6 p.). — Martens : Sur une nouvelle espèce et un nouveau sous-genre de Cyprinoïdes, sur quelques nouveaux Crustacés et sur les Écrevisses d'eau douce de la Nouvelle-Hollande (13 p.).

Décembre. — Borchardt : Sur une formule de Leibniz. — Peters : Chauves-souris recueillies à Bornéo par le marquis G. Doria (2 p.). Nouveaux Mammifères, et Amphibies nouveaux ou peu connus (6 p.). — Ehrenberg : Sondages exécutés par l'Expédition allemande au Pôle nord. — Dove : Orage des 6 et 7 décembre 1868.

***Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in* BERN. (Mémoires de la Société des Naturalistes de BERNE.) — In-8°.**

Année 1867, n°s 619-653.

BACHMANN : Sur les Brachiopodes néocomiens alpestres des bords du lac des Quatre-Cantons (10 p.). Sur le grès du muschelkalk du pays de Reiden, canton de Lucerne. Sur la présence d'une *Lingula* dans la molasse marine (14 p.). — BAUMANN : Sur l'acclimatation de l'Araignée à soie du Japon. — v. FELLENBERG : Analyse de l'eau de la source chaude de Rosenbühl, près Berne (17 p.). — FISCHER : Examen de deux échantillons de neige rouge des Alpes suisses (4 p.). — v. FISCHER-OOSTER : Les *Rubus* des environs de Berne (43 p., 1 pl.). — FORSTER : Sur la composition des phosphores artificiels (70 p.). — HASLER : Flotteur enregistreur (3 p.). — LAUTERBURG : Rapport de la Commission hydrométrique pour 1866 (53 p.). — SCHAER : Sur une nouvelle combinaison de l'ozone de nature organique (14 p.). — STUDER : Sur la géologie du Morgenberghorn (5 p., 1 pl.). — THIESSING : Notice sur quelques cavernes des Cévennes (7 p.). — WLID : Absorption de la lumière par l'air (19 p.). — WYDLER : Note sur les végétaux indigènes de la Suisse (15 p.).

***Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in* RHEINFELDEN, *am 9, 10 und 11 September 1867*. (Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles, à RHEINFELDEN, les 9, 10 et 11 septembre 1867.) — In-8°.**

DENZLER : Mesures de profondeur prises dans quelques lacs de la Suisse. — DESOR : Sur les causes du fœhn (9 p.). — A. FAVRE : Appel à la Commission géologique en faveur de la conservation des blocs erratiques (10 p.). — HAUSSAMMANN : Sur l'oxygène ozonisé dans le sang (18 p.). — HEER : Sur la flore miocène des Terres Polaires (14 p.).

***Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs*. BESANÇON. — In-8°.**

4e série, 3e volume, 1867.

LECLERC : Monographie de l'appareil fructifère de l'*Ipomœa purpurea* (8 p.). — CASTAN : Un cachet inédit d'oculiste romain (5 p., 1 pl.). — BERTHAUD : Sur la démonstration du principe d'Archimède (3 p.). Sur le nombre de vibrations des sons de la gamme. — GIROD : La fabrique d'Horlogerie de Besançon et la Société d'Emulation du Doubs, en 1867. — DE ROCHAS D'AIGLUN : De l'organisation des armes spéciales chez les Romains (13 p.).

Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westphalens. (Actes de la Société d'Histoire naturelle de la Prusse Rhénane et de la Westphalie.) — BONN. In-8°.

15e année, 1858. — v. DER MARCK : Les dépôts diluviens et les dépôts d'alluvions dans le bassin de la craie de Münster (47 p.). Les restes organiques des silex diluviens de Hamm (29 p., 2 pl.). — KALTENBACH : Les Phytophages de la classe des Insectes de l'Allemagne *(suite)* (116 p.). — ASCHERSON : Observations sur la flore de la principauté de Waldeck (7 p.). — JUNG : Existence de pierre d'aimant dans la grotte d'Alte Bircke, à Eisern, près de Siegen (8 p.). — WUTZER : Salubrité de la ville de Bonn (73 p.). — RÖMER : La chaîne jurassique du Weser (159 p., 1 carte). — v. STROMBECK : Sur le *gault* des environs de Frankenmühle, près de Ahaus (7 p.).

16e année, 1859. — v. DER MARCK : Recherches chimiques sur les roches calcaires de Westphalie (2e série, 19 p.). — STOLLWERCK : Rectifications et additions à un travail sur les Lépidoptères du cercle de Crefeld (14 p.). — MÜLLER : Additions à la flore des Mousses de Westphalie (14 p.). — BECKHAUS : Remarques sur la *Flora westphalica* de KARSCH (17 p.). — WEINKAUFF : Les dépôts tertiaires dans le cercle de Creuznach (13 p.). — SANDBERGER : Notes géognostiques et paléontologiques sur la Prusse rhénane (9 p.). — FÖRSTER : Deuxième centurie d'Hyménoptères nouveaux (38 p.). — BERGEMANN : Remarques sur un minéral ferrugineux de Horhausen (4 p.). — FUHLROTT : Restes humains d'une grotte de la vallée de Düssel (23 p. et pl.). — KRANTZ : Contributions à la géologie et à la minéralogie de la Prusse rhénane (8 p., 1 pl.). — v. STROMBECK : Sur la formation houillère de Westphalie (54 p.). — KALTENBACH : Les Phytophages de la classe des Insectes d'Allemagne *(suite)* (84 p.). — WEBER : Alex. de Humboldt et son influence sur la science (88 p.). — TREVIRANUS : Sur deux monstruosités végétales (9 p. et fig.). — VAN DEN BINKHORST : Esquisse géologique et paléontologique des couches crayeuses du duché de Limbourg. — BECKHAUS : Sur la flore cryptogamique de Westphalie : Lichens (22 p.).

17e année, 1860. — HENRY : Sur les radicelles des *Sedum Telephium, S. maximum* et *S. fabaria* (13 p., 2 pl.). — SCHLÜTER : Remarques géognostiques relatives à la Westphalie (27 p., 1 pl.). — STOLLWERCK : Lépidoptères du cercle de Crefeld, suite et fin des Microlépidoptères (53 p.). — FÖRSTER : Une centurie d'Hyménoptères nouveaux (61 p.). — WAGENER : Sur les couches liasiques de Falkenhagen dans la principauté de Lippe-Detmold (25 p.). — MÜLLER, BECKHAUS et ASCHERSON : Sur la flore phanérogamique de

la province de Westphalie, de Karsch (17 p.). — Ascherson : Contribution à la flore de Westphalie (3 p.). — Bräucker : Catalogue des fossiles devoniens du cercle de Gummersbach et de Waldbroel (4 p.). — Kaltenbach : Phytophages de la classe des Insectes d'Allemagne (58 p.). — Trainer : Sur l'existence de la calamine dans le calcaire devonien d'Iserlohn (13 p.). — Hosius : Sur la géognosie de la Westphalie (13 p., 1 pl.). — Treviranus : Nouvelles remarques sur des feuilles monstrueuses de l'*Aristolochia macrophylla* (4 p., 1 pl.). — Caspary : Flore du Dôme de Cologne (2 p.). — Weber : Sur les monstruosités végétales (56 p., 2 pl.). — Löhr : Observations météorologiques faites à Cologne, de 1849 à 1859.

18e année, 1861. — Von Dechen : Description géognostique du Vorden-Eifel (190 p.) — Stollwerck : Notes entomologiques (8 p.). — Hildebrand : Extension des Conifères de l'époque actuelle et des périodes géologiques antérieures (186 p. et 4 pl.). — Vom Rath : Sur la forme cristalline de la Bucklandite du lac de Laacher (6 p., 1 pl.). — Treviranus : Sur un moyen de protéger les herbiers contre les Insectes, en enveloppant chaque espèce de plante dans un sac de papier (6 p.). — Deicke : Recherches chimiques sur les minerais de l'usine de zinc de Birkengang, près de Stolberg (4 p.).

19e année, 1862. — Kaltenbach : Les Phytophages de la classe des Insectes d'Allemagne *(suite)* (106 p.). — Heine : Recherches géognostiques dans les environs d'Ibbenbüren (60 p., 2 pl.). — Rosbach : Notice sur le *Rhinoceros antiquitatis*, près de Wasserbillig. — Evercken : Contributions à la flore phanérogamique de Westphalie (43 p.). — Förster : Synopsis des familles et des genres des *Bracon* (64 p., 1 pl.). — Stollwerck : Troisième suite au catalogue des papillons du cercle de Crefeld (8 p.). — Treviranus : De la fécondation imparfaite chez les végétaux (5 p.). — Koch : Sur l'Eisenspilite (7 p.). — Kliever : Géognosie du Siegerland (12 p.). — Cornelius : Sur les migrations de Libellules (8 p.). Quelques monstruosités animales. — Treviranus : Sur une floraison extraordinaire de l'*Agave americana* (4 p.). — Löhr : Sur la conservation des plantes dans les herbiers (2 p.).

20e année, 1863. — Max Schultze : La structure de la carapace des Diatomées comparée à certaines enveloppes artificielles formées de fluorure de silicium (42 p.). — Stollwerck : Faune des Lépidoptères de la Prusse Rhénane (117 p.). — v. Dechen : Description géognostique du lac de Laacher et des terrains volcaniques environnants (430 p.).

21e année, 1864. — Treviranus : Encore un mot sur la conservation des herbiers (3 p.). — Caspary : Nouvelles stations de quel-

ques plantes rares de la flore de Bonn. — R. WAGNER : Formation jurassique de la région comprise entre la forêt de Teutoburg et le Weser (29 p.). Fossiles du grès de Hils (8 p.). — HILDEBRAND : Contributions à la flore de Bonn (8 p.). — WINTER : Les Mousses du pays de Saar (34 p.). — MÜLLER : Géographie des Mousses observées en Westphalie (140 p., 2 pl.). — v. HOININGEN : Sur la présence d'un conglomérat trachytique dans la mine de plomb et de zinc d'Altglück, près de Bennenscheid (4 p.). — KALTENBACH : Les Phytophages de la classe des Insectes d'Allemagne (176 p.).

22 année, 1865. — DIPPEL : Contributions à l'histologie des plantes (9 p., 1 pl.). — EHLERT : La flore de Winterberg (21 p.). — UBAGHS : Les couches à Bryozoaires de la craie de Maestricht (32 p., 2 pl.). — WIRTGEN : Sur la végétation du Haut-Eifel (229 p.). — — MÜLLER : Une nouvelle mousse de Westphalie (7 p.).

23e année, 1866. — HILDEBRAND : Flore de Bonn (154 p.). — LASPEYRES : Sur la présence du cæsium et du rubidium dans une roche siliceuse plutonique de la Prusse Rhénane (16 p.). — v. DECHEN : Notice sur la carte géologique de la Prusse Rhénane et de la Westphalie (47 p., 1 carte).

24e année, 1867. — DRONKE : Sur la théorie mécanique de la chaleur (20 p.). — KALTENBACH : Phytophages allemands de la classe des Insectes (97 p.). — MÜLLER : Deux nouvelles stations de Mousses de Westphalie. Première contribution à la géographie des Mousses de Westphalie (14 p.). — SCHÜLKE : Catalogue des fossiles des environs de Brilons (7 p.). — SPEYER : Faune lépidoptérique de la principauté de Waldeck (152 p.). — BENDER et DRONKE : Recherches chimiques sur l'eau minérale de Heilbrunner dans la vallée de Brohl. — BRASELMAMN : Un *Blaps obtusa* monstrueux (2 p., 1 fig.). — HILDEBRAND : Sur une branche de bouleau entourée d'un chèvrefeuille (4 p., fig.). — MUCK : Sur un oxyde et un hydroxyde de fer d'une composition particulière (6 p.). — KRANTZ : Catalogue d'Insectes et de quelques autres restes animaux de la chaîne carbonifère de Rott, dans le Siebengebirge (3 p.).

***Memoirs read before the* BOSTON *Society of Natural History*. (Mémoires lus devant la Société d'Histoire naturelle de BOSTON.) — In-4°.**

Tome I, 3e partie, 1868.

CLARK : Sur les *Spongiæ ciliatæ* comme *Infusoria flagellata,* ou Observations sur la structure, l'animalité et les affinités du *Leucosolenia botryoides,* Bowerbank (36 p., 2 pl.). — BRIGHAM : Notes sur les phénomènes volcaniques des îles Hawaii, avec une description des éruptions modernes (132 p., 5 pl.).

Proceedings of the Boston *Society of Natural History*. (Comptes rendus de la Société d'Histoire naturelle de Boston.) — In-8°.

Tome XI, 1866-68.

Jeffries : Anatomie et physiologie du muscle ciliaire chez l'homme. — Wilder : Doigts surnuméraires chez un chat. — Shaler : Formation des chaînes de montagnes (8 p.). — Agassiz : Description du *Salpa Cabotti*, Desor (6 p., 2 pl.). — Shaler : Position et caractère de quelques couches glaciaires contenant des fossiles, à Gloucester (Massachusetts).— Packard : Faune lépidoptère du Labrador (31 p.). — Bryant : Catalogue supplémentaire d'oiseaux des Bahamas (8 p.). — Stodder : Terre à infusoires du Pérou. — Greenleaf : Diatomées et autres objets microscopiques retirés de sondages dans le golfe du Mexique (4 p., 2 pl.). — Bryant : Catalogue d'oiseaux de Saint-Domingue, et description d'espèces nouvelles (9 p.). — Hentz : Supplément aux descriptions et aux figures des Aranéides des États-Unis (8 p., 2 pl.). — Trouvelot : Monstruosités observées dans les ailes des Lépidoptères. — Kneeland : Sur un parasite fongoïde des îles Philippines (4 p.). — Lyman : Sur les migrations des Poissons (6 p.). — Stodder : Vase à diatomées de Pleasant Beach. — Trouvelot : Moyen d'exciter l'union entre insectes d'espèce différente. — Berthiol : Détails sur le Gorille. — Fleury : Des Roches dans la nature et dans les arts (8 p.). — Swan : Météorologie du Cap Flattery. — Brigham : Sur l'hôpital d'animaux à Bombay. — Pickering : Sur l'introduction du Moineau domestique en Amérique. — Agassiz : Position du grès sur la pente méridionale d'une portion de la Pointe de Kewkeenaw. — Wyman : Sur la symétrie et l'homologie des membres (33 p.). — Hagen : Faune des *Odonata* de l'île de Cuba. Remarques par Uhler et Scudder (12 p.). — Agassiz : Sur l'antiquité de l'homme. — Scudder : Notes sur la stridulation de quelques Orthoptères de la Nouvelle-Angleterre (7 p.). — Wilder : Symétrie spirale des feuilles. — Bickmore : Voyage à l'île de Yesso, et remarques sur les Ainos (10 p.). — Stodder : Méthode d'essai de Nobert. — Perry : Recherches sur le grès rouge de Vermont (13 p.). — Harris : Structure, vol et mœurs des différentes variétés de Pigeon domestique (5 p.). — Edwards : Remarque sur les mœurs des Diatomacées et des Desmidiacées. — Packard : Développement d'une Mouche-dragon *(Diplax)* (7 p.). — Hagen : Sur le *Lachlania abnormis*, nouveau genre d'Éphémérides de Cuba. — Scudder : Supplément au catalogue des Papillons de la Nouvelle-Angleterre (10 p.). Sur les Grillons-Taupes. — Packard : Deux espèces de mouches du sel. — Brewer : Défense du Moineau domestique. — Packard : Sur

la structure de l'ovipositeur et des parties homologues de l'insecte mâle (6 p.). — HAGEN : Fourmi blanche aptère du Japon. — SCUDDER : Deux insectes fossiles de la houille. — HAYES : La Chèvre d'Angora, son origine, son éducation et ses produits (28 p.). — WYMAN : Observations de crânes (22 p.). — JACKSON : Sur les méthodes modernes pour la conservation et la coloration du bois.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu BREMEN. (Mémoires publiés par la Société d'Histoire naturelle de BRÊME.) — In-8°.

Tome I, 3e cahier, 1868.

BUCHENAU : Index criticus Juncaginearum hucusque cognitarum *(fin)*. Notice biographique sur Michel Rohde. Cas intéressant de fleur complète chez le *Lapageria rosea* (1 pl.). — SCHERK : Représentation géométrique des séries récurrentes à échelle de relation de 2 et de 3 termes (12 p., 1 pl.). — LORENT : Les épidémies de choléra à Brême (16 p.). — FOCKE : Notice sur les Ronces d'Allemagne, et en particulier sur celles des environs de Brême (68 p.). — KINDT : Le premier bateau à vapeur allemand sur le Weser, et son constructeur Friedrich Schröder (16 p., 1 pl.). — HEINECKEN : Observations météorologiques à Brême, de 1859 à 1866 (17 p.).

Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. BRUXELLES. — In-8°.

36e année, 2e série, tome XXIV, 1867.

PLATEAU : Sur la transformation spontanée d'un cylindre liquide en sphères isolées (5 p.). — T. SWARTS : Dérivés par addition de l'acide itaunique et de ses isomères (23 p.). — GLASER : Sur quelques dérivés de l'acide cinnamique (31 p.). — QUETELET : Orages des mois de juin et juillet 1867 (5 p.). — KEKULÉ : Sur les sulfacides du phénol (11 p.). — DUPONT : Découverte d'objets gravés et sculptés dans le Trou Magrite, à Pont-à-Lesse (4 p., 1 pl.). — HUSSON : Recherches sur l'action des silicates alcalins sur l'économie animale (19 p.). — KÖRNER : Notice sur la synthèse de l'acide anisique, de l'acide méthyloxybenzoïque, d'un krésol nouveau, et sur l'acide para-iodobenzoïque (14 p.). Faits pour servir à la détermination du lieu chimique dans la série aromatique (20 p.). — RONDAY : Sur quelques sels de l'acide itamalique (8 p.), et sur l'acide homotartrique (2 p.). — Observations des étoiles filantes faites, au mois d'août 1867, à Bruxelles, Gand, Louvain, Rome et Montcalier (14 p.). — MASSIUS : Du centre ano-spinal (13 p.). — FOLIE : Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre (46 p.). — WESMAEL :

Ichneumonologica documenta (49 p., 1 pl.). — Observations des Étoiles filantes de novembre en 1867, à Bruxelles, Louvain et Montcalier (6 p.). — MONTIGNY : Sur le pouvoir dispersif de l'air (14 p.). — DU BUS : Sur quelques mammifères du crag d'Anvers (15 p.).

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de CAEN. — In-8°.

Année 1868.

GIRAULT : Indicateur planétaire, ou Recueil de Tables pour la distance en ascension droite du Soleil aux planètes (75 p.). — DESBORDEAUX : Niveau d'eau à tube flexible (6 p., 1 pl.).

Mémoires de la Société impériale des Sciences naturelles de CHERBOURG. In-8°.

Tome XIII (2e série, tome III), 1868.

BONISSENT : Essai géologique sur le département de la Manche (7e *art.*, 30 p.). — RAGONA : Sur les variations régulières et irrégulières de la pression atmosphérique (34 p.). Sur l'oculaire à séparation d'images appliqué à l'équatorial de l'Observatoire de Modène (24 p., 1 pl.). — JOUAN : Aperçu sur l'histoire naturelle de la Corée (14 p.). Hong-Kong, Macao, Canton (6 p.). Observations sur les typhons des mers de Chine, en 1867 (29 p.). Sur quelques poissons nuisibles du Japon (3 p.). Notes sur quelques poissons de mer observés à Hong-Kong (42 p.). Sur quelques reptiles et quelques crustacés de l'île de Poulo-Condor et de la Basse-Cochinchine (6 p.). — GUICHENOT : Notice sur le Néosébaste, le Sériolaphe, le Salarichthys et le Lophiopside, nouveaux genres de poissons des familles des Scorpénoïdes, des Scombéroïdes, des Blennoïdes et des Lophioïdes (4 *art.*, 24 p.). — ROSANOFF : Observations sur les fonctions et les propriétés des pigments de diverses algues, suivies de quelques données relatives à la structure des formations protoplasmatiques (96 p., 2 pl.).

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de COLMAR. — In-8°.

8e et 9e années, 1868.

PIN : Observations météorologiques (18 p.). — DE PEYERIMHOFF : Une observation sur les mœurs de la Mésange grosse charbonnière (4 p.). Supplément au catalogue des Lépidoptères d'Alsace (14 p.). — KOSMANN : Énumération systématique des Lichens trouvés en Alsace, et principalement dans le canton de Neuf-Brisach (18 p.). — KAMPMANN père : L'ozone atmosphérique. Observations faites

en 1866-68 (22 p.). — KAMPMANN fils : Matériaux pour une flore cryptogamique de l'Alsace *(Champignons)* (14 p.). — BOURLOT : De l'homme antédiluvien (56 p.). — GRAD : Note sur le relief des Hautes-Vosges de M. Bardin (6 p.). Notice sur l'enseignement et les progrès de l'Anthropologie (14 p.). Étude de physique terrestre. Observations sur la température des eaux courantes en Alsace (8 p.).

Oversigt over det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider. KJÖBENHAVN. (Compte rendu des Actes de la Société Royale des Sciences de Danemark, et des travaux de ses membres. COPENHAGUE.) — In-8°.

Année 1855. — STEENSTRUP : Sur la faune pré-historique du Danemark (20 p., 1 pl.). — KRÖYER : Sur les Crustacés du genre *Sergestes* (13 p.). — HANSTEEN : Variations de l'inclinaison magnétique dans la zone tempérée septentrionale (11 p.). — SCHIÖDTE : Sur les *Odonata* recueillis dans l'expédition de le *Galathée,* etc. (18 p.). — KRÖYER : Sur un groupe de Crustacés mal connu. — STEENSTRUP : Notes sur les découvertes géologiques et archéologiques faites en 1854 dans le Jutland (2e *art.*, 14 pl.). — SCHIÖDTE : Sur une espèce de Crustacé du genre *Niphargus,* découverte en Angleterre. Sur le genre *Broscosoma* et ses rapports avec les *Miscodera.* Sur la structure du thorax des insectes, etc. (27 p.). — STEENSTRUP : Sur l'existence ancienne du Castor, de la Tortue de marais et du Pingouin en Danemark. — FORCHHAMMER : Sur les métaux dans les animaux et les plantes de la mer (13 p.).

Année 1856. — KRÖYER : Sur les vers du genre *Sabella* (Linn.) (17 p.). — HANNOVER : Recherches sur le développement et la structure des dents chez les Mammifères (36 p.). — FORCHHAMMER : Remarques sur la colombite du Groenland. — PEDERSEN : Notice biographique sur *Olufsen* (7 p.). — RAMUS : Application des déterminants à la détermination de la loi des fractions convergentes (13 p.). — JÜRGENSEN : Sur le mouvement des courants électriques. — ESCHRICHT : Recherches sur les Échinococcus. — COLDING : Considérations sur l'affinité entre les actes de la vie intellectuelle et les forces générales de la nature (33 p.). — WORSAAE : Nouvelles découvertes d'inscriptions runiques en France et en Angleterre (10 p.). — RAMUS : Sur quelques formules relatives à la théorie des sections angulaires (8 p.). — WÖHLER : Réduction de l'aluminium de la kryolithe. — HANSTEEN : Variations de l'inclinaison magnétique dans les deux hémisphères boréal et austral. — COLDING : Nouvelles propositions sur les forces (20 p., 1 pl.).

Année 1857. — ESCHRICHT : L'histoire de *Gaspard Hauser* consi-

dérée sous un nouveau point de vue (9 p.). — STEENSTRUP : Sur une nouvelle espèce de Céphalopode (8 p.). — PEDERSEN : Résultats des observations météorologiques en Groenland (7 p.). — COLDING : Exposition d'une méthode approchée des moindres carrés (8 p.). — E. A. SCHARLING : Extraction de l'huile du *Squalus glacialis*. — STEENSTRUP : Sur le Tænia du Gasterosteus (10 p.). — WORSAAE : Découvertes d'antiquités romaines et autres, à Brarup (12 p.). — ESCHRICHT : Études sur la perspective à travers l'œil armé (89 p., 4 pl.).

Année 1858. — COLDING : Étude sur la grandeur probable et la nature des erreurs inévitables de l'observation (43 p.). — PEDERSEN : Tableau de l'état météorologique de 1857 en Danemark, en Norvège et en Suède (11 p.). — FORCHHAMMER : Salure de l'eau du Sund, etc. (9 p.). — JÜRGENSEN : Principe de la moindre action, et loi de la réfraction (6 p.). — D'ARREST : Quelques observations sur la comète de Donati (15 p., 2 pl.). — ESCHRICHT : Sur un squelette de baleine conservé à Pampelune. — ANDRÆ : Sur le calcul de la latitude, de la longitude et de l'azimut sur le sphéroïde (39 p.).

Année 1859. — ANDRÆ : Sur le développement en séries des formules qui servent à la détermination des positions géodésiques sur la surface sphéroïdale de la Terre (43 p.). — D'ARREST : Notice sur la variation séculaire de la déclinaison magnétique à Copenhague (11 p.). — WORSAAE : Sur une nouvelle division de l'âge de pierre et de l'âge de bronze (25 p.). Traces de pieux et objets de silex trouvés dans le lac Maribo (12 p.). — STEENSTRUP : Sur un Distome qui a dû chercher lui-même son habitation et s'y introduire. Remarques sur la précédente communication de WORSAAE (21 p.).

Année 1860. — REINHARDT : Remarques sur la nidification chez les oiseaux du genre *Crotophaga* (31 p.). — HANSTEEN : Variations de l'inclinaison et de l'intensité magnétique à Copenhague (5 p.). — GÖPPERT : Sur la flore de la formation carbonifère silurienne, dévonienne et inférieure. — STEENSTRUP : Nouveau genre de Coraux de l'ordre des Octactinies. — BENDZ : Sur les dispositions anatomiques de l'organe visuel qui favorisent l'extension et les changements du sens de la vue chez les Mammifères (14 p.). — STEENSTRUP et LÜTKEN : Mémoires sur les Siphonostomes et les Lernées de haute mer, et quelques autres Copépodes parasites encore mal connus (9 p.). — D'ARREST : Observations faites en Espagne de l'éclipse totale du 18 juillet 1860. — ANDRÆ : Développement d'une méthode indiquée par Laplace dans la *Mécanique céleste*, pour la détermination d'une grandeur inconnue au moyen d'observations immédiates données (38 p.).

Année 1861. — STEENSTRUP : Sur les Céphalopodes de pleine mer conservés au Musée de Copenhague (18 p.) — HOLTEN : Recherches sur la pluie dans l'Amérique du Nord (6 p.). — THOMSEN : Sur le caractère général des actions chimiques, et sur la théorie chimique fondée sur ce caractère (35 p.). — REINHARDT : Sur le *Balæniceps rex,* oiseau découvert aux sources du Nil Blanc (20 p.). — COLDING : Sur la surface libre de l'eau dans des conduits prismatiques ou cylindriques. — STEENSTRUP : Ossements d'ours gigantesque. — VAUPELL : Sur la morphologie des *Œdogonium* (12 p., 1 pl.). — Météorites des collections de l'Université. — WORSAAE : Sur la division de l'Age de pierre (62 p.). — STEENSTRUP : Forme extraordinaire de parasite, le *Philichthys Xiphiæ* (10 p., 1 pl.). Remarques sur le Mémoire de WORSAAE relatif à la division de l'Age de pierre (72 p.). — FORCHHAMMER : Recherches sur la salure de la Méditerranée (12 p.) — HANSTEEN : Observations magnétiques en Islande et au Spitzberg (14 p.). — WORSAAE : Réponse aux remarques de STEENSTRUP sur la division de l'Age de pierre (22 p.).

Année 1862. — THOMSEN : Sur l'industrie de la cryolithe (10 p.). — BENDZ : Sur quelques parasites rares du chien, *Tænia echinococcus* et *Symbiotes canis* (11 p., 1 pl.). — D'ARREST : Sur une revue générale du ciel pour la recherche des nébuleuses, entreprise à l'Observatoire de Copenhague (7 p.). — THOMSEN : Sur les figures d'équilibre des fluides d'après les expériences de PLATEAU. — ESCHRICHT : Mémoire sur le *Delphinus Orca* (2e art.) (57 p.). — THOMSEN : Appareil spectral de Steinheil. — COLDING : Chaleur fournie par les conduites d'eau chaude. — REINHARDT : Nouvelle espèce de Dauphin, d'après deux squelettes du Musée de Copenhague (50 p.). — FORCHHAMMER : Sur le sable de campine, etc. (13 p.). — SCHARLING : Dissolution de l'or et du platine. — HOLTEN : Observations de la température à Nyholm (51 p.). — STEENSTRUP : Sur le *Philichthys Xiphiæ* (5 p.).

Année 1863. — SCHARLING et ŒRSTED : Sur une plante du Brésil pouvant fournir une boisson analogue au thé (11 p., 1 pl.). — SCHARLING : Sur un cercueil de l'Age de bronze. — HOLTEN : Sur la couronne de l'aurore boréale. — D'ARREST : Simplification d'un théorème de Bessel concernant le phénomène de l'aberration. — STEENSTRUP et LÜTKEN : Description et dessin d'un *Mola nasus* gigantesque, jeté sur les côtes de Danemark en novembre 1862 (7 p.). — STEEN : Intégration de l'équation différentielle $P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R\frac{dy}{dx}+S=0$, au moyen de facteurs contenant seulement x et y (25 p.). — FORCHHAMMER : Recherches sur la com-

position de l'eau de l'Océan Atlantique, au nord de l'Irlande, à la surface et à une profondeur de 10000 pieds (9 p.). — Colding : Mouvement des corps flottants dans des conduites limitées et dans des courants libres (17 p.). — Forchhammer : Existence probable de la formation jurassique au nord du Jutland. — Steenstrup : Sur la vraie nature de la dissymétrie des Pleuronectides; explication de la présence des deux yeux sur le même côté du corps (49 p., 1 pl.). — Forchhammer : Sur un mortier des anciennes fortifications du Dannevirk. — Reinhardt : Nouveau genre d'Ophidiens Rachiodontides (12 p., 1 pl.).

Année 1864. — D'Arrest : Sur le point du ciel où s'est montrée la nouvelle étoile de Tycho, en 1572, 1573 et 1574 (9 p., 1 pl.). — Holten : Température moyenne et température probable à Copenhague (28 p.). — Steen : Mémoire sur la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (13 p.). — Forchhammer : Sur l'Ædelforsite et sur quelques minéraux voisins (13 p.). — Scharling : Essai de production de l'urée et de la caféine par l'action d'un courant galvanique. Matière colorante de la porcelaine. — Holten : Sur la fréquence et la force du vent à Copenhague, d'après 62 années d'observations (55 p., 2 pl.). — Thomsen : La batterie de polarisation, nouvel appareil pour produire un courant continu de haute tension et de force constante avec un seul élément galvanique (4 p., 1 pl.).

Année 1865. — Colding : Loi générale du mouvement des corps flottants dans un courant de section constante et de débit constant. Influence de la hauteur des cheminées sur le tirage. — Œrsted : Découverte des organes de fructification, inconnus jusqu'à présent, des champignons foliacés (13 p., 2 pl.). — Steenstrup : Structure remarquable des branchies du *Rhombus punctatus*, etc. (18 p.). — Holten : Relations du vent avec la température (35 p., 1 pl.). — Jörgensen : Quelques analogies entre l'étain et le platine. — Krabbe : Recherches helminthologiques en Danemark et en Islande.

Année 1866. — Steen : Application du calcul des probabilités à la mesure de l'intensité des causes qui favorisent un phénomène continu (5 p.). Nouvelle méthode générale pour l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles linéaires (4 p.). — Steenstrup : Sur quelques résultats importants obtenus par les fouilles récemment entreprises dans les cavernes à ossements de France (18 p.). — Panum : Sur l'origine du glycogène et du sucre, et sur leur rôle dans l'organisme animal (6 p.). — Reinhardt : Sur trois poissons non encore décrits de la famille des Characides (20 p., 2 pl.). — Steen : Sur les équations différentielles dont les intégrales

particulières sont toutes de même forme (6 p.). — ZEUTHEN : Détermination des caractéristiques dans les systèmes élémentaires de surfaces du second ordre (2 p., 1 tabl.). — JÖRGENSEN : Hyperiodures des alcaloïdes (26 p.). — SCHIERN : Connaissances des Anciens relatives aux lacs des sources du Nil (61 p., 1 carte). — ŒRSTED : Étude de greffe démontrant qu'il y a fécondation réciproque entre le *Podisoma juniphirium,* parasite sur une branche, et le *Roestelia cornuta,* croissant sur les feuilles d'un sorbier (12 p., 1 pl.). — BARFOED : Recherches sur les acides de l'étain isomériques. — JOHNSTRUP : Sur le calcaire d'Annetorp, en Scanie (12 p.).

Année 1867. — LORENZ : Sur l'identité des ondulations lumineuses avec les courants électriques (19 p.). — HANNOVER : Sur la structure et le développement des écailles et des épines des poissons (6 p.). — THOMSEN : Sur la séparation des oxydes qui ne sont pas précipités par l'hydrogène sulfuré dans une solution contenant de l'acide chlorhydrique libre (8 p.). — LANGE : Sur les espèces les plus remarquables contenues dans la 46ᵉ livraison de la *Flora Danica* (12 p.). — ANDRÆ : Sur l'évaluation approximative des intégrales définies (37 p.).

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de GENÈVE. — In-4°.

Tome XIX, 2ᵉ partie, 1868.

DUBY : Choix de Cryptogames exotiques nouvelles ou mal connues (14 p., 3 pl.). — LUNEL : Sur deux cas de polymélie (membres surnuméraires) observés chez la *Rana viridis seu esculenta,* Lin. (8 p., 1 pl.). — CLAPARÈDE : Les Annélides chétopodes du golfe de Naples (272 p., 16 pl.). — WARTMANN : Rapport sur les travaux de la Société, de juin 1867 à juin 1868 (22 p.).

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu HEIDELBERG. (Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de HEIDELBERG.) — In-8°.

Tome IV (*suite*), 1868.

ERB : Sur la différence de conductibilité et de sensibilité dans les nerfs altérés pathologiquement (7 p.). -Sur la réaction galvanique de l'appareil nerveux auditif (5 p.). — HELMHOLTZ : Sur les mouvements discontinus des fluides (10 p.). Sur les principes de la Géométrie qui reposent sur des faits (5 p.). — KNAPP : Sur les inoculations du tissu de gliome de l'homme aux lapins et aux chiens. — H. A. PAGENSTECHER : Reliefs représentant les stratifications des

roches de sédiment (1 p.). Nouveau mode de développement des Siphonophores. Nouveau procédé de conservation des préparations zoologiques.

Mémoires scientifiques publiés par l'Université impériale de KASAN. — In-8°.

1861. — GOLOVKINSKY : Sur les combinaisons de la silice (79 p.). — BLOSFELD : Leçon d'introduction à l'encyclopédie et à la méthodologie médicale (32 p.).

1862. — BOUTLÉROF : Sur la constitution chimique des corps (11 p.). Sur l'affinité des particules polyatomiques (6 p.). Sur les amines (7 p.). — N. WAGNER : Sur la parthénogénèse des larves et des insectes (90 p., 5 pl.). — KOVALEVSKY : Travaux de RUD. WAGNER sur le cerveau (10 p.). — BUTLER : Voyage scientifique à l'étranger en 1861, et ses résultats (22 p.). — PÉTROF : Études sur l'urémie (27 p.). — SMIRNOF : De l'influence de l'alcool méthylique sur l'organisme (18 p.). — KRIVOCHAPKINE : Sur l'écrasement en général, et sur ses applications à l'extirpation des tumeurs hémorrhoïdales en particulier (80 p.). — IMCHÉNETSKY : Sur les fonctions de l'hyperbole équilatère et du cercle (19 p.). Méthode des coordonnées trilinéaires, avec applications au point et à la ligne droite (25 p.).

1863. — PÉRÉMEJKO : Sur le développement des fibres musculaires striées transversales, au moyen des noyaux musculaires (30 p., 2 pl.). — KOUTCHINE : Sur la structure de la moelle épinière (24 p.). — PÉTROF : Examen critique des travaux sur l'urémie, en opposition avec la théorie de Frerichs (39 p.). — WAGNER : Des recherches zoologiques faites sur le littoral du sud de la Crimée (13 p.). — POPOF : Mémoire sur les intégrales définies. *1re Partie :* Des méthodes employées pour la découverte des intégrales définies (167 p. in-4°). — IANINCHEVSKY : Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre (100 p. in-4°).

1864. — MARKOVNIKOF : Sur l'isomérie des composés organiques (108 p.). — IAKOVLEF : Hémiptères de la faune des bords du Volga (*Rhynchota heteroptera*) (21 p.). — BOUTLÉROF : Sur les alcools tertiaires (15 p.). Sur les éthers méthyliques chlorés (4 p.). — A. POPOF : Sur les causes de l'affinité de l'atome du carbone (10 p.). — DIAKONOF : Sur la coagulation des substances albumineuses. Matériaux pour la physiologie et la pharmacologie (34 p.). — SMIRNOF : Variations périodiques de la température à Kasan (26 p.). — JBIKOVSKI : Théorie du planimètre d'Amsler (5 p.). — IMCHÉNETSKY : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (IV-172 p.).

— Chtcherbakof : Produits de la nutrition dans le sang (35 p.). — Tchougounof : L'acide sulfurique et la soude (17 p.).

1865. — Kovalevsky : Matériaux pour l'étude de la respiration pulmonaire (31 p., 1 pl.). — Pétrof : Sur l'état et l'enseignement de l'anatomie pathologique à l'étranger (20 p.). — Rojansky : Descartes et sa philosophie (44 p.). — Golovkinsky : Sur les formations tertiaires supérieures dans la partie moyenne du cours du Volga (74 p.).

1866. — Imchenetsky : Intégration finie d'une forme d'équations aux dérivées partielles, au moyen de l'introduction d'un système canonique de variables (10 p.). — Levitsky : Matériaux pour l'étude de l'action du bromure de potassium sur l'organisme sain ou malade (34 p.).

Recueil de Mémoires scientifiques rédigés par les professeurs de l'Université Impériale de Kasan, *en commémoration de la cinquantième année de sa fondation.* — Gr. in-8°.

Tome I, 1856.

Popof : Fondements du calcul des variations (95 p.). — Kowalski : Recherches sur les mouvements de Neptune, suivies de Tables de cette planète (180 p.). — Lobatcheffsky : Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles (64 p.). — Kowalski : Sur les éclipses (136 p., 1 pl.).

Annales de l'Académie de La Rochelle (Section des Sciences naturelles). — In-8°.

N° 7, 1864-65. — Beltremieux : Faune fossile de la Charente-Inférieure (92 p.).

N° 8, 1866-67. — Jourdain : Coup d'œil sur le système veineux et lymphatique de la Raie bouclée (34 p., 1 pl.). — Beltremieux : Excursion aux buttes coquillières de Saint-Michel-en-l'Herm (4 p.). Premier supplément à la Faune vivante de la Charente-Inférieure (16 p.). — Taslé père : Catalogue des Mollusque observés dans l'Atlantique Français, depuis les parages de Brest jusqu'aux frontières d'Espagne (90 p.). — De Richemond : Notice sur H. Aucapitaine (17 p.).

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége. Deuxième série. — In-8°.

T. I, **1866.** — Coquilhat : Expériences sur la détermination pra-

tique des moments d'inertie des canons en bronze, longs et courts de 6 et de 12 (50 p., 3 pl.). — Noel : Mémoire relatif à différents sujets de mathématiques élémentaires (38 p.). — Folie : Nouvelles tables usuelles des logarithmes, des nombres naturels et des lignes trigonométriques, et tables inverses, en deux feuilles, accompagnées d'une introduction renfermant un précis de Trigonométrie pure, ainsi que la disposition et l'usage de ces tables (48 p.). — Stammer : Des surfaces réglées et des surfaces enveloppes (16 p.). — Putzeys : Notes sur les Notiophiles (14 p.). — Étude sur les *Amara* de la collection du baron de Chaudoir (113 p.).

T. II, **1867.** — Catalan : *Mélanges mathématiques :* Sur les combinaisons avec répétition. Aire de l'hyperboloïde à une nappe. Sur l'intégrale

$$\iint dx\,dy\sqrt{\frac{a^2x^2+b^2y^2-1}{x^2+y^2-1}}.$$

Démonstration d'une formule de Dirichlet. Réduction d'une intégrale multiple. Autre intégrale multiple. Sur la Partition des nombres (2 art.). Sur la décomposition d'un produit en facteurs. Analyse indéterminée du 1er degré. Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^n}dx$. Problème de minimum. Problème de Géométrie. Théorème de Géométrie. Problème d'Analyse indéterminée. Quelques théorèmes empiriques. Lieu géométrique. Théorème sur les surfaces développables. Sur le tétradécagone régulier. Sur la toroïde. Sur l'intégration des équations simultanées. Sur l'hélicoïde de raccordement. Sur l'hélicoïde à plan directeur. Sur un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe. Problème d'Algèbre. Sur le Problème des partis. Fractions continues périodiques. Analyse indéterminée. Rectification de la méthode de Newton. Autre modification à la méthode de Newton. Sur la somme des puissances semblables des nombres naturels. Sur les différences de 1^p, et sur le calcul des Nombres de Bernoulli. Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent. Sur le calcul des Nombres de Bernoulli. Sur la Théorie des nombres. Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes. Théorème d'Analyse. Sur la série harmonique. Sur une fonction homogène entière. Sur les surfaces cyclotomiques. Sur la théorie des roulettes. Lieu géométrique. Sur un produit convergent. Remarques sur un Mémoire de Poisson. Sur la sommation de certains coefficients binomiaux. Sur le théorème de Fermat. Sur l'équation du 3e degré. Rayon de la sphère circonscrite à un

polyèdre semi-régulier. Sur une fraction rationnelle. Sur les normales à une surface. Lieu géométrique. Quelques intégrales définies. Sur une transformation de série. Sur un problème d'Algèbre légale, et sur une transformation de série. Une propriété des déterminants. Démonstration de la formule de Stirling. Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde. Sur le plus grand commun diviseur algébrique. Sur l'équation du 4e degré. Sur les coordonnées curvilignes. Aire d'une surface du 4e degré. Trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde. Sur les surfaces à courbure moyenne nulle. Sur la Partition des nombres. Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. De quelques propositions inexactes relatives aux séries. Démonstration d'une formule de Poisson (352 p.).

Mémoires de la Société Impériale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de LILLE. — In-8°.

3e série.

T. IV, **1867**. — DE NORGUET : Catalogue des Coléoptères du département du Nord (42 p.). — CORENWINDER : Études sur les fonctions des racines des végétaux (10 p.). — C. VIOLLETTE : Dosage du sucre au moyen des liqueurs titrées (140 p., 1 pl.). — BACHY : Question de physiologie végétale concernant les branches et les racines des arbres (8 p.). — LYON : Traitement des futaies (12 p.).

T. V, **1867**. — D'HENRY : Condensateurs de lumière (150 p., 6 pl.). Appareil spectroscopique à vision directe (6 p., 1 pl.). — JAQUEMET : De l'influence des découvertes les plus modernes dans les sciences physiques et chimiques sur les progrès de la Chirurgie (216 p.). — HERLIN : Du rapport synchronique du *ré* de la gamme (44 p.). — A. SCRIVE : Sur le Rouissage et la Culture du lin en France et en Afrique (55 p., 5 pl.). — SARTIAUX : Sur les points d'inflexion des courbes du 3e ordre (12 p.). Sur les surfaces du 3e ordre (24 p.). — CHELLONEIX et ORTLIEB : Notice géologique sur le mont de la Ferme Masure, près Roubaix (10 p., 2 pl.).

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de LYON. — In-8°.

T. X, **1860**. — MULSANT et REY : Essai d'une division des derniers Mélasomes, famille des Parvilabres, quatrième tribu : Opatrites (69 p.). — BINEAU : Densité des vapeurs surchauffées du soufre, du phosphore et de l'arsenic (22 p.). — MICHEL : Considérations sur la teinture des soies en noir (23 p.). — GLÉNARD et GUILLERMOND : Nouvelle méthode du dosage de la quinine dans les quinquinas et

dans les préparations quiniques (15 p.). — THEVENET : Gisements aurifères et platinifères de l'Orégon (25 p.). — E. FAIVRE : La question des générations spontanées (19 p.). — MONTROUSIER : Flore de l'île Art (82 p.). — DEVAY : Nouvelles observations sur les dangers des mariages consanguins (19 p.).

T. XI, **1861.** — FOURNET : Aperçu sur la structure du Jura septentrional (74 p.). Première série d'aperçus sur les variations séculaires du régime des fleuves (23 p.). De l'influence du mineur sur les progrès de la civilisation (182 p.). — POYET : Documents pour servir à l'histoire des mines des environs de Lyon (54 p.). — DELAISSEMENT : Note sur les tremblements de terre de Bourbonne (20 p.).

T. XII, **1862.** — FOURNET : De l'influence du mineur sur les progrès de la civilisation (282 p.). — PERREY : Documents sur les tremblements de terre et les phénomènes volcaniques au Japon (109 p.).

T. XIII, **1863.** — FOURNET : Détails concernant l'orographie et la géologie de la partie des Alpes comprise entre la Suisse et le comté de Nice (104 p.). Des pluies de terre observées depuis quelques années dans le bassin du Rhône (161 p.). — PÉTREQUIN : Examen critique des divers modes de préparations qu'on fait subir aux eaux minérales dans le but d'en concentrer les éléments de minéralisation (20 p.). — HÉNON : Promenade aux Glenaus à la recherche du *Narcissus reflexus* (7 p., 1 pl.). — E. FAIVRE : Considérations sur la variabilité de l'espèce et sur ses limites dans les conditions actuelles d'existence (65 p.).

T. XIV, **1864.** — EBRAY : Stratigraphie des terrains jurassiques du département de l'Ardèche, et, en particulier, des minerais de fer de la Voulte et de Privas (32 p.). Recherches sur l'âge du granite syénitique (16 p.). — PÉTREQUIN : Vues nouvelles sur l'interprétation chirurgicale d'Hippocrate, et sur la détermination des doctrines hippocratiques touchant les luxations du coude (32 p.). — FOURNET : Aperçus sur la diffusion du sel et sur son rôle dans certains phénomènes géologiques, hydrographiques et botaniques (188 p.). — MICHEL : Note sur la substitution du bois de châtaignier à l'écorce de chêne dans la tannerie (12 p.).

T. XV, **1865-66.** — MULSANT : Monographie des Coccinellides (112 p.). — PÉTREQUIN : L'Éthérisation et la Chirurgie lyonnaise, pour servir à l'histoire de l'anesthésie chirurgicale en France (20 p.). Nouvelles recherches sur le choix à faire entre le chloroforme et l'éther rectifié dans la pratique de la Médecine opératoire (34 p.). Vues nouvelles sur la submersion (12 p.). Sur un procédé parti-

culier propre à prévenir la suppuration, etc. (10 p.). — EBRAY : Nouveaux renseignements sur la minette du Rhône (11 p.). — FAIVRE et DUPRÉ : Recherches sur les gaz du mûrier et de la vigne (25 p.). — PERRIN : De l'allaitement maternel dans ses rapports avec la vie physique, la vie morale, la vie sociale, suivi de l'analyse de l'ouvrage du Dr Brochard sur la mortalité des nourrissons en France (40 p.). — EBRAY : Classification des Eaux minérales de la Savoie (10 p.).

T. XVI, **1866-67.** — MULSANT : Monographie des Coccinellides (112 p.). — FOURNET : Classification des phénomènes produits par l'électricité météorique dans le bassin du Rhône (122 p.). Esquisse géographique, ethnographique et géologique du département du Rhône (92 p.). — PÉTREQUIN : Études nouvelles sur la Chirurgie d'Hippocrate (15 p.). Des effets croisés dans les lésions traumatiques du crâne, d'après Hippocrate et les médecins de l'antiquité (27 p.).

Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Classe di Scienze matematiche e naturali. MILANO. — In-4°.

Tome X (*suite*) (1866-67).

CRIVELLI et MAGGI : Expériences sur la production de quelques organismes inférieurs (16 p., 1 pl.). — BRIOSCHI : Propriétés fondamentales d'une classe d'équations algébriques (21 p.). — PORTA : De la varice anévrismatique (39 p.).

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Rendiconti della Classe di Scienze matematiche e naturali. MILANO. — In-8°.

1re série.

T. I, **1864.** — BRIOSCHI : Rapport sur un travail de G. CAVALLI sur la résistance des Solides (9 p.). Sur une nouvelle transformation des intégrales elliptiques (3 p.). Sur une formule de Jacobi pour la multiplication des fonctions elliptiques (6 p.). — BUZZETTI : Sur une nouvelle détermination des éléments absolus du magnétisme terrestre faite en des stations diverses de la ville de Milan (5 p.). — CANTONI : Sur les variations de température que le mouvement détermine dans les liquides (14 p.). Observations sur l'évaporation et la diffusion des liquides, et sur l'imbibition des solides poreux (13 p.). Sur la pénétration des liquides dans les solides poreux (6 p). — CODAZZA : Principe de la conservation de la force. — CURIONI : Ciments hydrauliques en Lombardie, nouveaux gisements de cette substance (17 p.). — GAROVAGLIO : Distribution géographique des Lichens de Lombardie, classification nouvelle du genre *Verrucaria*

(12 p.). — GIANELLI : La Vaccine et ses règlements en Italie (8 p.). — LOMBARDINI : Études hydrologiques sur le Nil (2 Mémoires, 9 p.). — MAGRINI : Expériences sur l'imbibition des masses poudreuses (9 p.). — MANTEGAZZA : Sur la génération spontanée (4 p.). Sur la congestion (8 p.). Sur les greffes animales et sur l'organisation artificielle de la fibrine (20 p.). — G. POLLI : Sur l'emploi du sulfite et de l'hyposulfite de soude dans l'élève du ver à soie (4 p.). Origine et fondement de la nouvelle thérapeutique avec les sulfites et les hyposulfites (5 p.). Usages externes des sulfites alcalins et terreux. Des sulfites et hyposulfites médicinaux dans les fièvres intermittentes dues aux miasmes paludéens (10 p.) Des sulfites et hyposulfites médicinaux dans l'infection purulente et dans l'infection putride (6 p.). Des sulfites et hyposulfites médicinaux dans les fièvres exanthématiques et typhoïdes (10 p.). Applications des sulfites et hyposulfites médicinaux, etc. (7 p.). — SCHIAPARELLI et CATTANEO : Théorème relatif au mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement (8 p.). — SCHIAPARELLI : Nouvelle orbite de la planète Hespérie, d'après les observations des trois oppositions 1861, 1862 et 1863. Comète de Tempel et de Respighi. Orbites des Comètes I et II de 1864. Opération faite à l'observatoire de Brera pour déterminer le rapport du clafter normal de Vienne et du mètre français avec la perche employée en 1788 pour la mesure de la base du Tésin. — STAMM : Sur le calcul graphique et sur l'étude géométrique des polynomes entiers et rationnels de la forme $x^m + ax^{m-1} + \dots + qx + l$ au moyen d'un nouveau système de coordonnées (7 p.). — STOPPANI : Essai d'une histoire naturelle des pétroles (10 p.). — VERGA : Cas singulier de prosopectasie (7 p., 1 pl.).

T. II, **1865**. — BALSAMO-CRIVELLI : Cas nouveaux de polymélie observés sur quelques individus du genre *Rana*. — CANTONI : Sur les actions mutuelles des courants électriques et magnétiques, et sur les courants d'induction (2 Mémoires, ensemble 21 p.). — CAVALLERI : Sur le champ des objectifs dans les microscopes de Hartnack (10 p.). Sur la trombe qui dévasta les environs de Monza, le 30 juin 1865 (22 p.). Expériences relatives à la génération spontanée des infusoires (15 p.). — COSSA : Détermination de quelques propriétés physiques et chimiques des terres arables (9 p.). — CURIONI : De quelques végétaux de l'époque carbonifère trouvés dans les montagnes de la Valcamonica. — FRISIANI : Influence locale dans la Théorie du magnétisme terrestre. — GAROVAGLIO : Importance des caractères employés pour limiter le genre *Verrucaria*, et des espèces qui lui appartiennent (13 p.). Du Maïs blanc (5 p.). — LUSSANA : Action du curare (6 p.). — LOMBARDINI : Condition

hydraulique de la plaine subapennine entre l'Enza et le Panaro, et changements qui ont été essayés (18 p., 1 pl.). — MAGRINI : Résultats de nouvelles expériences électro-magnétiques et diamagnétiques (9 p.). — MANTEGAZZA : Sur les corpuscules mobiles (2 p.). Du guarana, nouvel aliment (5 p.). Globulimètre, nouvel instrument pour déterminer rapidement la quantité de globules rouges du sang; et nouvelles recherches hématologiques (6 p.). Expériences sur l'hétérogénie, en vases clos, avec des substances bouillies, et des atmosphères portés au rouge (4 p.). — POLLI : Expériences à l'appui de la doctrine des fermentations morbides (6 p.). — PORRO : La photographie appliquée à l'astronomie et à la géodésie (14 p.). Usage d'une nouvelle planchette et d'une nouvelle alidade (4 p.). — SANGALLI : De la scrofule dans ses rapports avec la tuberculose (10 p.). Organisation du tubercule (9 p.). — SCHIAPARELLI : Comètes I et III de 1864. Compensation des réseaux trigonométriques de grande étendue (11 p.). — STAMM : Méthodes d'analyse et de discussion à employer dans l'étude des combinaisons des machines automatiques (10 p.). — VERGA : Muscle anomal du sternum (5 p., 1 pl.).

T. III, **1866**. — BARDELLI : Propriétés de l'équilibre d'un système de forme invariable (4 p.). — CANTONI : Chaleur produite par la pénétration des liquides dans les solides (17 p.). Comparaison des observations ozonométriques (5 p.). Expériences sur la production des vibrions dans des liquides ayant été soumis à l'ébullition (16 p.). — CASORATI : Réflexions sur la Théorie générale des fonctions de variables indépendantes ou complexes (14 p.). — CAVALLERI : Foyer complexe des objectifs dans les microscopes composés; système de lentilles à un seul foyer (4 p.). — CERADINI : Appareil pour compter les globules du sang (16 p.). — CODAZZA : Séchoirs à courant d'air (7 p.). Indicateur à distance des variations de chute utile dans les cours d'eau (5 p.). Études sur la Théorie dynamique de l'électricité. Formules pour la résolution pratique du problème de l'inflammation des mines souterraines et sous-marines au moyen de l'électricité (7 p.). — CRIVELLI : Organes particuliers observés dans une éponge (4 p., 1 pl.). — FRIZIANI : Topographie de la grêle, des orages et des cyclones (16 p.). — GAROVAGLIO : Nouvelle espèce de Lichen découverte dans les ravins du mont Canzo. — LOMBARDINI : Traces de la période glaciale dans l'Afrique centrale (11 p.). — MAGRINI : Nouvelles recherches sur la réaction que le diamagnétisme exerce sur la pesanteur (9 p.). — MANTEGAZZA : Action de la chaleur sur la calorification et les mouvements du cœur (8 p.). Recherches sur le sperme humain (13 p., 1 pl.). — PORRO : Problème de l'achroma-

tisme traité par la théorie microdynamique de la lumière (11 p.). Observations sur un nouvel objectif photographique proposé par le prof. Steinheil (12 p.). Des microscopes composés (10 p.). — Possenti : Système hydraulique de la Valdichiana (20 p.). — Sangalli : Fragment de l'histoire du développement des tumeurs (4 p.). Nature et guérison de la tuberculose (4 p.). — Schiaparelli : Compensation des réseaux trigonométriques de grande étendue (14 p.). Fréquence de la grêle en un même lieu à des époques diverses. Influence de la Lune sur les changements atmosphériques.

T. IV, **1867.** — Bizzozero : Structure des tubercules produits par inoculation (9 p., 1 pl.). — Brugnatelli : Nouveaux appareils pour la préparation de l'hydrogène, du chlore, etc. (7 p., 1 pl.). — Gaet. Cantoni : Sur la contagion de la pébrine des vers à soie (3 p.). — Giov. Cantoni : Sur l'isolement des machines à frottement (8 p.). Sur le refroidissement des gaz par raréfaction (4 p.). Rapport sur l'ouvrage intitulé : *Nouveaux phénomènes des corps cristallisés,* par Lavizzari. Encore sur la production des infusoires dans les liquides bouillis (16 p.). Autres expériences sur la production des infusoires (8 p.). Sur la machine électrique à induction (7 p.). — Cavalleri : Lueur qui se manifeste dans le ciel lors du passage des étoiles filantes, en août et novembre; son origine (11 p.). — Cremona : Représentation sur un plan de la surface de Steiner et des surfaces courbes du 3e degré (9 p.). Théorème sur les fonctions quadratiques non homogènes à deux variables. — Crivelli et Maggi : Sur la production de quelques organismes inférieurs. Production d'organismes inférieurs en présence de l'acide phénique (15 p.). — Curioni : Sur la carte agronomique des environs de Paris, etc. — Dorna : Formules pour la détermination de la gravité en un lieu donné de la Terre. — Ferrini : Sur les aiguilles magnétiques à trois pôles, et sur leur emploi dans les galvanomètres (7 p.). — Garovaglio : Notice sur la vie et les écrits de Vittadini (17 p.). — Hajech : Modification du photomètre de Bunsen (8 p.). Nouvelle forme de baromètre, dit *multiplicateur*. — Lombardini : Études hydrauliques et historiques sur le grand estuaire Adriatique, les fleuves qui s'y jettent, etc. (2 art., 10-12 p.). Sur le projet de canaux d'irrigation du Haut-Milanais (43 p.). — Magrini : Appareil électro-magnétique donnant l'accord musical au moyen des courants interrompus (2 p.). Comparaison des expériences électriques de Magrini, Belli, etc. (3 p.). — Mantegazza : Des altérations histologiques produites par la section des nerfs (12 p.). Action de la douleur sur la respiration (5 p., 1 pl.). Sur la production de la fibrine au sein de l'organisme vivant. —

Pelloggio : Des liquides qui bouillent avec soubresauts. — G. Polli et Banfi : Sur la richesse alcoolique de quelques vins de Lombardie, etc. (10 p.). — Schiaparelli : Influence de la présence et des mouvements de l'atmosphère sur la chute des aérolithes (11 p.). — Verga : Nouvelles observations prouvant que le lobe moyen du cervelet est l'excitateur des organes de la génération (5 p., 1 pl.). L'*Acarus elephantiacus* (10 p.). — Villa : Observations faites sur les insectes pendant l'éclipse de mars 1867.

2e série.

T. I, **1868**. — Schiaparelli : Sur la vitesse des météores cosmiques dans leur mouvement à travers l'atmosphère terrestre (9 p.). — B. Crivelli et Maggi : Sur la production du *Leptothrix*. — Cantoni : Sur quelques conditions physiques de l'affinité, et sur le mouvement brownien (12 p.). — Brioschi : Sur les équations générales du 8e degré qui ont le même groupe que les équations du multiplicateur correspondant à la transformation du 7e ordre des fonctions elliptiques (5 p.). — Mantegazza : Études sur les mariages consanguins. — Cremona : Sur une certaine famille de surfaces gauches. — Casorati : Théorème fondamental dans la théorie de la discontinuité des fonctions (3 p.). Sur la détermination des altérations dans les valeurs de sommes et de produits infinis, etc. (4 p.). — Beltrami : Notes sur la théorie des cubiques gauches (2 art., 8-12 p.). — Gianelli : L'hygiène publique et les établissements industriels insalubres (7 p.). — Cremona : Sur une certaine surface gauche du 4e ordre. — Lombroso : Sur la relation entre les âges et les positions de la Lune, et les accès d'aliénation mentale et d'épilepsie (11 p.). — Cantoni : Expériences et considérations sur quelques points d'électro-chimie et d'électro-physiologie (11 p.). — B. Crivelli et Maggi : Sur la production du *Bacterium termo* Duj. et du *Vibrio bacillus* Duj. (15 p.). — Corradi : Proposition d'une étude générale sur la phthisie en Italie. — Cantoni : Sur l'hétérogénie. — Mantegazza : Sur l'algométrie (7 p.). — Lombroso : Réponse à la Note précédente (10 p.). — Mantegazza : Réplique à l'article précédent. — Cornalia : Les Axolots du Musée de Milan. — B. Crivelli et Maggi : Sur la dérivation du *Bacterium termo* et du *Vibrio bacillus* des granules vitellins de l'œuf de poule (8 p.). — Secchi : Sur le spectre de la comète de Brorsen. — Cremona : Sur l'ouvrage de Casorati : *Théorie des fonctions de variables complexes*. — Polli : Application de l'ozone à la purification de l'air vicié par la respiration animale (6 p.). — Cantoni : Sur quelques principes d'hydrostatique (13 p.). — Ferrini : Sur le rôle des gaz dans la déperdition des charges électriques (2 art., 11-10 p.). — Garovaglio :

Révision critique de quelques genres de Lichens, etc. (9 p.). — B. Crivelli et Maggi : Sur les cellules du ferment. — Riatti : Des transformations du mouvement mécanique en mouvement calorifique, observées dans les corps en rotation (8 p.). — Cantoni : Observations sur la Note précédente. — Bizzozero : Sur le parenchyme de la glandule pinéale (7 p.). — Serpieri : Lois théoriques de l'écoulement des gaz déduites des nouveaux principes thermodynamiques (14 p.). — Cantù : Volta et le télégraphe électrique. — B. Crivelli, A. Villa et Cornalia : Sur les insectes qui dévastent la Basse-Lombardie (9 p.). — Mantegazza : Physiologie et pathologie du pouls dans les diverses positions du corps. — Curioni : Note sur un insecte dévastateur des champs de maïs. — Lombroso : Cas singulier de macrosome observé à l'hôpital de Pavie (7 p.). — Secchi : Sur le spectre de la comète de Winnecke. — Bizzozero : Sur la vitalité des éléments contractiles. — Manfredi : Étude histologique sur un cas de gliome de la rétine.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. (Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Munich.) — In 8°.

Année 1867. T. II *(suite)*. — v. Martius : Notes sur l'ethnographie et la linguistique de l'Amérique, et spécialement du Brésil. — v. Kobell : Sur les formules typiques et empiriques en Minéralogie (9 p.). — v. Petenkoffer et Voit : Sur la consommation de substance d'un diabétique (19 p.). — Buchner : État du sang après l'empoisonnement par l'acide cyanhydrique (10 p.). — Vogel : Histoire de la Chimie, par Gerding. — Gümbel : Sur les relations géognostiques du Mont-Blanc avec son entourage, par le professeur A. Favre.

Année 1868. T. I. — Vogel : Remarques sur les relations de la terre à infusoires avec la végétation (12 p.). — H. v. Schlagintweit-Sakünlünski : Sur les préparatifs d'observations physiques dans l'Inde, pendant l'éclipse totale de soleil (5 p.). — v. Siebold : Essais pour acclimater dans la Nouvelle-Zélande le *Salmo Umbla* des lacs alpestres de Bavière (7 p.). — Drechsel : Réduction de l'acide carbonique en acide oxalique. — Strecker : L'acide urique, combinaison de glycocolle. Production artificielle de l'acide racémique. — Pfaff : Relation de l'eau atmosphérique avec le sol (13 p., 1 pl.). — M. Wagner : De la théorie de Darwin au point de vue de la propagation géographique des organismes (37 p.). — v. Kobell : Sur la recherche du nickel et du cobalt dans les minerais, et sur

une chathamite de l'Andreasberg dans le Harz (8 p.). — BUCHNER : Nouvelle observation de la formation de sulfure d'arsenic dans le cadavre d'un empoisonné par l'acide arsénieux (3 p.). Étude chimique de l'eau de la source sulfureuse d'Oberdorf, dans l'Algäu (7 p.). — BAUERNFEIND : Nouvelle propriété du prisme de la chambre claire (4 p., 1 pl.). Nouveau prisme de réflexion à déviation constante (3 p.). — GÜMBEL : Sur la prophyllite, comme moyen de pétrification (5 p.). — NÄGELI : Sur des phénomènes de vision observés sur lui-même (30 p.).

Mémoires de l'Académie de Stanislas. NANCY. — In-8°.

1867.

BLONDLOT : De la constatation médico-légale des taches de sang par la formation des cristaux d'hémine (17 p.). — CHAUTARD : De la vulgarisation de quelques phénomènes de physique expérimentale (8 p.). Résumé météorologique de l'année 1867 (20 p.). — GODRON : Observations sur les organes de la végétation du *Hedera Helix* (8 p.). L'Atlantide et le Sahara (34 p.). Études sur les bourgeons des platanes (8 p.). L'Age de pierre en Lorraine (18 p.). — RENARD : Théorie de la dispersion de la lumière (33 p.). — SIMONIN père : Météorologie (Loi de M. Liandier) (4 p.). — ED. SIMONIN : Résumé des faits relatifs à l'action d'agents autres que l'éther et le chloroforme employés comme anesthésiques généraux (7 p.).

Atti dell' Accademia Pontaniana. NAPLES. — In-4°.

T. V, **1853.** — ROSSI : Sur une surface annulaire, suivant laquelle on pourrait conformer les extrémités des môles avancés dans la mer (100 p., 9 pl.). — O. G. COSTA : Nouveau poisson de la famille des Gades (12 p.). *Nesidea,* nouveau genre d'Entomostracées (6 p., 4 pl.). Paléontologie du Royaume de Naples (1re partie) (201 p., 15 pl.). — AMANTE : Nouvelle méthode pour calculer les arcs terrestres de méridien et de parallèle, appliquée à la détermination de l'arc de méridien entre Montjouy et Formentera (44 p.).

T. VI, **1854.** — GASPARRINI : Observations sur un phénomène de transsudation lymphatique dans certaines graminées (18 p.). — ROSSI : Recherches analytiques sur les surfaces annulaires à cône directeur (226 p.). — A. COSTA : Histoire de la Tenthrédinée productrice des galles des feuilles du *Salix Russelliana* (16 p., 1 pl.). — TENORE : De l'herbe *Bacara* des Anciens (14 p.). Appendice au Mémoire précédent (8 p.). — DEL GROSSO : Sur la manière de réduire

les intégrales des équations linéaires du 1[er] ordre aux différences mêlées à des intégrales définies simples (36 p.).

T. VII, **1[re] Partie, 1856.** — O. G. COSTA : Paléontologie du Royaume de Naples (2[e] partie) (378 p., 28 pl.).

T. VII, **2[e] Partie, 1862.** — DEL GROSSO : Recherches sur la théorie analytique du système du Monde (128 p.). — GABR. MINERVINI : Études sur la scrofule (166 p.).

T. VIII, **1864.** — O. G. COSTA : Paléontologie du Royaume de Naples (3[e] partie) (198 p., 15 pl.). Paléontologie des Provinces napolitaines. Appendice I. Classe des Vertébrés (128 p., 7 pl.).

Bulletin de la Société Philomathique de PARIS. — In-8°.

Tome V, janvier-mars 1868.

DE CALIGNY : Sur une nouvelle turbine (2 p.). Sur un appareil à élever l'eau au moyen d'une chute d'eau (2 p.). — GILBERT : Sur la courbure des surfaces. — DE SAINT-VENANT : Sur le problème des remous (8 p.). — LAGUERRE : Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques (4 p.). Sur les cassiniennes planes et sphériques. Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques (4 p.). — WOLF : Sur la condition de l'élimination de l'erreur de lecture d'un cercle gradué provenant du jeu des tourillons dans les coussinets. — AOUST : Sur un principe de la théorie des surfaces (5 p.). — RIBAUCOUR : Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères (5 p.). — LAURENT : Sur le puits artésien de la placé Hébert, à La Chapelle. — MANNHEIM : Sur le déplacement d'une figure de forme invariable; nouvelle méthode des normales; applications diverses (9 p.). — DAUSSE : Sur les inondations.

Bulletin de l'Académie Impériale de SAINT-PÉTERSBOURG. — In-4°.

Tome XII (*suite*), 1868.

Mathématiques. — MINDING : Démonstration d'un théorème de statique.

Astronomie. — V. FUSS : Observations de la comète Faye-Möller, en 1865-66. — DÖLLEN : Propositions pour le perfectionnement des instruments à miroir (18 p.). — WAGNER : Oscillation extraordinaire du niveau observée à Poulkovo. — GYLDÉN : Sur une formule générale pour le calcul de la réfraction.

Physique. — MORITZ : L'éclipse solaire du 6 mars 1867 (11 p., 1 pl.). — B. JACOBI : Rapport sur les procédés de galvanoplastie de Van Kempen (10 p.).

Chimie. — FRITZSCHE : Sur l'anthracène de Berthelot. — ENGEL-

HARDT : Composition chimique des bois et des ossements fossiles des terrains crayeux de la Russie (24 p.). — ALEXEYEFF : Sur l'azotobenzide. — BEILSTEIN et KULHBERG : Sur les bi- et trichlortoluols isomères (16 p.).

Géologie. — HELMERSEN : La houille de la Russie centrale, son importance et son avenir (22 p.). Rapport sur un Mémoire concernant l'industrie minière qui a existé sur les côtes de la mer Blanche.

Botanique. — FAMINTZIN : Action de la lumière sur le *Spirogyra* (11 p., 1 pl.). — FAMINTZIN et BORODIN : De la formation transitoire de l'amidon dans le bouleau. — BORSCOW : Action des rayons rouges et bleus de la lumière sur le plasma liquide dans les poils piquants de l'ortie (13 p.). Action des rayons rouges de la lumière sur la chlorophylle des Spirogyres (8 p.). Action du protoxyde d'azote sur les plantes (8 p.). — MAXIMOWICZ : Courte diagnose des plantes du Japon et de la Mandjourie (2e art.). — BARANETZKI : Observations biologiques sur les gonidies des lichens (13 p.). — BORODIN : Action de la lumière sur quelques cryptogames (15 p., 1 pl.).

Zoologie. — WEISSE : Recherches microscopiques sur le guano (5 p.. 2 pl.). — BRANDT : Sur la configuration du cerveau des Siréniens (2 p.). Quelques mots concernant une nouvelle représentation figurée du *Rhytina Stelleri* (2 p.). Rapport sur la 2e et la 3e partie des études sirénologiques (4 p.). — OWSJANNIKOW : Sur le système central nerveux de l'*Amphioxus lanceolatus* (16 p., 1 pl.). — STRAUCH : Remarques sur le genre *Scapteira* Fitz (15 p.). Sur le genre *Ablepharus* (13 p.). — KNOCH : De l'existence du *Cysticercus Tæniæ mediocanellatæ* dans les muscles des animaux de la race bovine (14 p.).

Anatomie et Physiologie. — ZABELINE et DAROGOF : Influence du chlorure de sodium sur l'absorption du phosphate de chaux tribasique. — ZABELINE et WASSILEWSKY : Influence du chlorure de sodium sur l'absorption du fer métallique. — GRUBER : Sur les écarts de la *vena jugularis externa posterior* (6 p.). Sur les variétés du muscle brachial interne (10 p.). Sur les variétés du muscle brachio-radial (10 p., 1 pl.). Remarques complémentaires sur le muscle *epitrochleo-anconeus* des Mammifères (7 p.). Sur les variétés du muscle *radialis internus brevis* (12 p., 1 pl.). 2e Supplément au Mémoire sur le *processus supra-condyloideus (internus) humeri* de l'homme (10 p., 1 pl.). — PELIKAN : Paralysie locale produite par le Saponin et les poisons semblables (Githagin, Senegin, etc.) — WORONICHIN : Influence des chlorures de potassium et de sodium sur l'absorption du fer métallique par l'organisme animal, et sur l'excrétion du fer.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of PHILADELPHIA.

Année 1867.

SHIMER : Sur un nouveau genre d'Homoptères. — ALLEN : Remarques sur la conformation du crâne des Mammifères. — WETHERILL : Résultat d'une recherche sur l'Itacolumite. — A. H. SMITH : Colonies de plantes près de Philadelphie (9 p.). — LINCECUM : La Fourmi tranchante du Texas (*Œcodoma Texana*, Buckley). — TH. MEEHAN : Sur la structure du *Lopezia*. — SLACK : Notes mammalogiques (5 p., 1 pl.). — COPE : Sur l'*Euclastes*, genre de Cheloniens fossiles. — MEEHAN : Note sur les formes dioïques de la *Vitis vinifera*. — H. WOOD : Description de nouvelles espèces de Myriapodes du Texas. — LEA : Sur deux nouveaux minéraux de Chester. — CASSIN : Troisième étude sur les Ictérides. — SHIMER : Notes sur le *Micropus leucopterus*. Compte rendu de la grande épidémie de 1865 parmi les Insectes. — LEA : Description de cinq nouvelles espèces d'Unionides et d'une *Paludina* des États-Unis. — A. WOOD : Description d'un nouveau genre de plantes. — H. WOOD : Remarques sur la *Salisburia Adiantifolia*. — LEYDY : Remarques sur un crâne de bœuf fossile de San-Francisco. — COPE : Remarques sur une collection de reptiles de la vallée de l'Owen. — GENTH : Remarques sur quelques minéraux douteux. — ENNIS : Nécessité et rapidité de la rotation nébulaire (6 p.). — H. WOOD : Observations sur l'histoire de la vie de quelques-unes de nos Algues Siphonacées d'eau douce. — LAWRENCE : Notes sur quelques oiseaux de la Nouvelle-Grenade, et description d'espèces nouvelles. — COPE : Description d'un nouveau genre de poissons Cyprinoïdes de Virginie. — MEEHAN : Note additionnelle sur les formes dioïques de la *Vitis vinifera* (5 p.). — ELLIOT : Description d'une espèce paraissant nouvelle de Hibou du genre Scops. — CASSIN : Étude sur les Rhamphastides. — LYMAN : Remarques sur les grands conglomérats carbonifères dans le comté de Sullivan. — H. WOOD : Notes sur une collection de Myriapodes de Californie, et descriptions de nouvelles espèces de l'Orient. — HILL : Note sur le *Geotrygon sylvatica*. — COPE : Remarques sur quatre espèces de Mammifères fossiles. — COUES : Notes sur une collection de Mammifères de l'Arizona. — ALLEN : Remarques sur dix crânes de la collection Morton. — COPE : Note additionnelle pour la faune vertébrée de la période miocène, et tableau synoptique des Cétacés fossiles des États-Unis (18 p.). Sur les genres de Poissons d'eau douce *Hypsilepis* et *Photogenis*, leurs espèces et leur distribution (10 p.). Revue des espèces des

Amblystomides (46 p.). Sur les habitudes d'une larve de Tipulide. Note sur les Reptiles fossiles qui se rapprochent des oiseaux. — CASSIN : Fastes de l'Ornithologie (10 p.). — ENNIS : La théorie mécanique de la chaleur solaire (6 p.). — LAWRENCE : Description de cinq nouvelles espèces d'oiseaux de l'Amérique centrale. — SHIMER : Note additionnelle sur le *Chinch-bug*.

Annali delle Università Toscane. PISE. — In-4°.

Tome X (1868).

LOMBARDINI : Sur la genèse des formes organiques irrégulières (72 p.). — D'ACHIARDI : Étude comparative des coraux des terrains tertiaires du Piémont et des Alpes vénitiennes (72 p.). — BETTI : Sur la détermination des températures variables d'un cylindre (14 p.).

Il Nuovo Cimento. PISE. — In-8°.

Tome XXVII (1828).

S. VECCHI : Baromètre multiplicateur (12 p., 1 pl.). — PANCERI : Présence de l'acide sulfurique dans la salive de quelques mollusques (5 p.). — MARANGONI : Sur un phénomène optique observé par le P. Secchi (9 p.). — DENZA : Électricité et ozone observés à Moncalieri pendant le choléra (6 p.). — H. SCHIFF : Urée condensée (4 p.). — POGGENDORFF : Production de la chaleur dans les décharges électriques dans l'air (7 p.). — DOVE : Notes d'optique (4 p.). — SCACCHI : Combinaison de la lithine avec les acides tartriques (5 p.). — REGNOLI : Objets de Paléontologie découverts dans une caverne de la Maremme toscane (8 p.). — COSSA : Recherches sur les propriétés du magnesium (5 p.). — DOBELL : Action spéciale du pancréas sur la graisse et l'amidon (2 p.). — MATTEUCCI : Nouveaux phénomènes électro-chimiques produits dans les actions capillaires (9 p.). — CANTONI : Sur les machines d'induction (8 p.). — M. SCHIFF : Recherches sur la circulation de la bile et sur la cause de la jaunisse (26 p.). — CAMIZZARO : Toluène bromé (7 p.). — CANTONI : Sur quelques conditions physiques de l'affinité, et sur le mouvement brownien (12 p.). — SCHUNK : Matière colorante extraite de l'urine (2 p.). — FASCE et VINCENZO : Recherches expérimentales sur les nerfs du cœur de la Tortue marine (18 p.). — M. SCHIFF : Pouvoir digestif du suc intestinal (7 p.). — MANTEGAZZA : Genèse de la fibrine dans l'organisme vivant (5 p.). — SCACCHI : Combinaison de la lithine avec l'acide sulfurique (5 p.). — SCHIAPARELLI : Vitesse des météores cosmiques dans l'atmosphère (9 p.). — SESTINI : Sur la solubilité et

la préparation de la quinine (6 p.). — De Luca : Recherches chimiques sur l'eau trouvée dans un vase de bronze à Pompéi, et sur les incrustations qui s'y étaient produites (6 p.). — Panceri : Fécondation artificielle et introduction des spermatozoaires dans les œufs du Branchiostome (2 p.). — Struver : Sur quelques minéraux d'Italie (9 p., 2 pl.). — M. Schiff : Phénomènes de polarité secondaire (8 p.). — Silvestri : Éruption du Vésuve du 12 novembre 1867. Recherches chimiques (13 p.). — Albini : Sur la respiration des Grenouilles (5 p.). — Sestini : Sur quelques propriétés de l'anhydride sulfureux liquide (6 p.). — Silvestri : Sur la recombinaison lente et complète des gaz qui proviennent de l'électrolyse de l'eau (4 p.). — Sabrero : Sur la préparation des bois avec le bitume, résidu de la rectification du pétrole (11 p.). — Marangoni : Sur le thermométrographe à maxima et à minima, et nouvelle méthode pour corriger les températures inférieures à 0° des erreurs dues à ce que le tube n'est pas calibré (5 p.). — H. Schiff : Recherches sur les dérivés de l'isatine (3 p.). — Panceri : Les Axolotis annoncés pour la première fois à Naples (3 p.). — E. Valleri : Sur le magnétisme transversal du fer et de l'acier (22 p.). — Panceri : Larves des Alciapides, parasites du *Cydippe densa* (3 p.). Recherches sur les organes qui, chez les Gastéropodes, sécrètent de l'acide sulfurique (7 p.). — Pisati : Expérience démontrant le principe fondamental de l'hydrostatique (3 p.). — Matteucci : Théorie physique de l'électrotone des nerfs (7 p.). — De Luca : Recherches chimiques sur une matière grasse trouvée dans un vase à Pompéi (4 p.). — Bombicci : Sur l'association polygénique des composés minéraux (11 p.). — Albini et Renzone : Observations et recherches sur l'épithélium intestinal (10 p.). — Betti : Sur l'Électrodynamique (6 p.). — Moleschott : Essais pour imiter en grand le mouvement des corpuscules du sang dans les petits vaisseaux sanguins (7 p.) — Fienga : Recherches chimiques sur la châtaigne commune.

Tome XXVIII (1868).

Silvestri : Sur la nature de l'acide contenu dans les fruits d'une solanée *(Cyphomandra betacea)* (5 p.). Recherches chimiques sur la maturation des fruits du bananier (5 p.). — Dub et Villari : Sur la saturation de l'électro-aimant (7 p.). — Villari : Sur un livre du professeur Schiaparelli, sur le climat de Vigevano (11 p.) — Loomis et Marangoni : Phénomènes et lois de l'aurore boréale et de la lumière polaire (44 p.). — Delarive (traduit par Golfarelli) : Notice sur la vie et les travaux de Michel Faraday (46 p.). — Betti : Détermination des températures variables d'une lame finie,

dont la conductibilité n'est pas la même dans toutes les directions (10 p.). — RIATTI : Sur la transformation du mouvement en chaleur, observable dans les corps tournants (8 p.). — SECCHI : Études spectrales sur les comètes (7 p.). — PISATI : Sur un aspirateur à écoulement constant (2 p.). Baromètre à deux liquides (8 p.). — DENZA : Sur les aérolithes tombés, le 29 février 1868, à Villanova et à Motta dei Conti (8 p.). — CANTONI : Expériences et considérations sur quelques points d'électro-chimie (9 p.). — ECCHER : Sur l'électrotone développé dans les fils de zinc amalgamé et de platine recouverts d'une couche de fil de coton, et plongés dans un liquide (15 p.). — LOMBARDINI : Sur la genèse des formes organiques irrégulières chez les Oiseaux et les Batraciens (24 p.). — VECCHI : Nouvelle chambre claire (7 p.).

Abhandlungen der Königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in PRAG. (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, à PRAGUE.) — In-4°.

VI° série, tome I, 1867.

LÖWE : Sur un empêchement moral que l'on peut alléguer contre la descendance de l'espèce humaine d'un couple unique (18 p.). Sur les objections de Zénon contre le mouvement (17 p.). — FRITSCH : Sur les *Callianassa* de la formation crétacée de la Bohême (12 p., 2 pl.). — SCHMIDT : Sur les constantes physiques de la vapeur d'eau (50 p.).

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in PRAG. (Comptes rendus des séances de la Société des Sciences de Bohême, à PRAGUE.) — In-8°.

Année 1867.

v. ZEPHAROVICH : Sur l'enargite de Parád (4 p.). Sur la lœllingite et les espèces voisines (6 p.). — AMERLING : Sur la *Montagne résonnante* dans le Schwojker Gebirge, près Reischtadt.—SCHMIDT v. BERGENHOLD : Statistique des mines en Bohême (6 p.). — FEISTMANTEL : Pétrifications intéressantes du bassin houillier de Radnic. — STOLBA : Études sur le fluo-silicate de potasse (15 p.).

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. ROMA. — In-4°.

XVII° année, 1863-64. — TIGRI : Sur l'infusoire du genre *Bacterium* trouvé dans le sang humain (6 p.). — BIANCHI : Discussion de quelques midis observés à l'observatoire de Montecuccoli, à Modène (8 p.). — SORET : Sur les relations volumétriques de l'ozone (13 p.).

— Sanguinetti : Prodrome de la flore romaine cisapennine (4 art., 98 p.). — Nardi : Sur la découverte des sources du Nil par Speke et Grant (9 p.). — Comtesse Fiorini-Mazzanti : Observations sur la matière colorante du *Calothrix ianthiphora,* et diagnose d'une nouvelle Microficée (3 p.). — Ponzi : Sur diverses périodes éruptives dans l'Italie centrale (31 p., 1 pl.). — Volpicelli : Formules pour déterminer, au moyen du condensateur, l'électricité terrestre ou toute autre électricité *indéficiente,* sans avoir besoin d'un état électrique absolu (5 p.). — Cadet : Sur le mode de reproduction de quelques parasites morbifères de l'organisme. — Bianchi : Matériaux recueillis à l'Observatoire de Modène pour servir aux recherches d'astronomie sidérale. — Castracane degli Antelminelli : Sur la production des images photographiques des objets microscopiques. — Secchi : Recherches sur le courant électrique et ses analogies avec les phénomènes hydrauliques (13 p.). Sur les piles à sable (3 p.). — Fabri : Sur les battements acoustiques (8 p.). — Derossi : Causes qui ont influé sur l'insalubrité de l'air de Rome, etc. (6 p.). — Volpicelli : Sur l'électricité de l'atmosphère et sur l'induction électrostatique : réponse au P. Secchi (24 p.). — Diorio : Examen du lait au moyen du lactoscope de Donné. Sur une expérience curieuse. — Marre : Le Talkhys d'Ibn Albannâ (31 p.). — Ponzi : Pluie de sable tombée en février 1864. — Serra-Carpi : Détermination des coefficients de force coercitive, et leur rapport avec l'état moléculaire des barreaux magnétiques (6 p.). — Volpicelli : Recherches analytiques sur le magnétomètre et l'électromètre bifilaires, sur la courbe bifilaire et sur la mesure du magnétisme terrestre (26 p.).

XVIIIe année, 1864-65. — Volpicelli : Recherches analytiques sur le magnétomètre et l'électromètre bifilaires, etc. *(suite)* (2 art., 50 p.). — Th.-H. Martin : Observations et théories des Anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques, et sur les attractions électriques (2 art., 43 p.). — De Caligny : Sur le mouvement des ondes (3 p.). Note sur le mouvement des ondes produites dans un canal par le balancement d'un bateau (4 p.). — Secchi : Note sur le spectre terrestre atmosphérique, et sur la relation entre les phénomènes magnétiques et météorologiques. — Bianchi : Troisième lettre astronomique (14 p.). — Volpicelli : Sur l'induction électrostatique (5 p.). — Ponzi : La période glaciaire et l'antiquité de l'Homme (24 p.). — Diorio : Sur quelques insectes qui ont endommagé les vignes dans les provinces romaines. — Serra-Carpi : Premier essai d'observations météorologiques comparatives entre Rome et le Monte-Cave. — Volpicelli : Sur un Mémoire de De Rossi intitulé : Analyse géométrique et architectonique des Catacombes

romaines. — SANGUINETTI : Prodrome de la flore romaine cisapennine *(suite)* (2 art., 38 p.). — CADET : Sur le parasitisme, considéré comme cause des maladies miasmatiques et contagieuses (2 art., 15 p.). — TIGRI : Observations sur la subordination de la pupille humaine à la contractilité de l'iris. — SECCHI : Réductions des observations magnétiques faites au Collége Romain, en 1859-64 (32 p., 1 pl.). — VOLPICELLI : Formules pour déterminer la température d'un milieu ambiant sans l'observer (13 p.). — NARDI : Sur les progrès récents de la géographie générale (5 p.). — DIORIO : Sur un rein pétrifié dans un cheval vivant. — BIANCHI : Considérations sur la météorologie (15 p.). — VOLPICELLI : Sur les observations météorologiques et magnétiques faites à l'Observatoire de Lisbonne (4 p.). — SÉDILLOT : Sur l'origine de nos chiffres (7 p.). — DIORIO : Sur l'induration et la conservation indéfinie des corps animaux (2 art.). — VINCENT et TH.-H. MARTIN : Passage du Traité de la Musique d'Aristide Quintilien relatif au nombre nuptial de Platon (12 p.). — Comtesse FIORINI-MAZZANTI : Sur une nouvelle espèce de *Palmodictyon,* et sur un organisme singulier d'Algue unicellulaire.

XIXe année, 1865-66. — MARRE : Biographie d'Ibn Albannâ, mathématicien du XIIIe siècle (10 p.). — VOLPICELLI : Considérations sur la tension, tant en électrostatique qu'en électrodynamique, et sur l'influence électrique (10 p.). Sur la nécessité de protéger contre la foudre les masses métalliques fixées au sommet des édifices (5 p.). Recherches analytiques relatives au lieu géométrique des points de tangence d'un et de deux systèmes de parallèles avec une série de coniques homofocales, ainsi que des points d'intersection des tangentes parallèles d'un système avec les correspondantes de l'autre (5 art., 127 p., 6 pl.). — GENOCCHI : Note sur quelques sommes de cubes (8 p.). — NARDI : Sur les bouteilles flottantes, comme moyen d'explorer les courants marins. — TH.-H. MARTIN : Sur l'âge du Traité *De Republica* de Cicéron, et sur l'époque de Théodore Méliténiote (14 p.). — SAN BERTOLO : Solution d'un problème de géométrie analytique, d'où se déduit une propriété remarquable de l'hyperbole apollonienne (7 p.). — BIANCHI : Lettres astronomiques (35 p.). — SERRA-CARPI : Sur la mesure barométrique des hauteurs (4 p.). — RICHAUD : Sur la résolution de l'équation $x^2 - Ay^2 = \pm 1$. — PONZI : Instruments de silex trouvés dans des cavernes, près de Rome (3 p., 1 pl.). — DIORIO : Sur le Cétacé de S. Marinella (11 p.). — VOLPICELLI : Notice nécrologique sur I. CALANDRELLI (4 p.). Notice historique sur les premières découvertes des propriétés de l'aimant (14 p.). — O. STRUVE : Observations de l'étoile double 42 Comæ Ber., et première ébauche des éléments de son orbite (6 p.). —

Diorio : Sur un autre insecte de la vigne (7 p.). — Volpicelli : Analyse et rectification de quelques idées et de quelques expériences sur l'électricité statique (37 p.). — Woepcke et Marre : Introduction au Calcul Gobârî et Hawâî, traité d'Arithmétique traduit de l'arabe (24 p.).

XXe année, 1866-67. — Catalan : Note sur un problème d'Analyse indéterminée (2 art., 8 p.). — Secchi : Recherches sur les taches solaires et sur leurs mouvements (18 p.). — Cadet : Sur le parasitisme considéré comme cause de maladies miasmatiques et contagieuses (14 p.). — Nardi : Découvertes de Baker dans le bassin des sources du Nil. — Ponzi : Sur les instruments en silex trouvés dans la campagne de Rome, et sur l'homme de l'âge de pierre (12 p., 1 pl.). — Proja : Sur la proposition de M. Mädler relative à la réforme du calendrier russe (9 p.). — Secchi : Sur la découverte d'armes et d'instruments en silex, près de Monticelli. Sur le météorographe et sur les étoiles filantes. — Respighi : Sur les comètes et les étoiles filantes. — Chelini : Rapport sur le prix Carpi (5 p.). — Richaud : Sur la résolution de l'équation $x^2+(x+r)^2+(x+2r)^2+\cdots+[x+(n-1)r]^2=y^2$ (20 p.). — Nardi : État présent des travaux du percement de l'isthme de Suez (6 p.). — Ponzi : Sur les tombes pré-historiques trouvées près de Cantalupo Mandela (5 p.). — Comtesse Fiorini-Mazzanti : Sur les Microficées des eaux minérales de Terracine. — Nardi : Éloge de N. Cavalieri San Bertolo (15 p.). — Mainardi : Sur la résolution des équations algébriques au moyen des fonctions irrationnelles (17 p.). — Catalan : Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques (10 p.). — Respighi : Sur la latitude de l'Observatoire du Capitole. — Volpicelli : Analyse et rectification de quelques idées et de quelques expériences relatives à l'électrostatique. 1er Mémoire *(fin)* (142 p.). — Respighi : Sur le cratère lunaire de Linné (6 p.).

XXIe année, 1867-68. — Respighi : Mémoire sur la latitude de l'Observatoire du Capitole (44 p.). — Diorio : Sur les anomalies d'un *Tænia*. — Cadet : Sur quelques formes d'êtres organiques vus dans une membrane indo-cholérique, à Rome, en 1854 (2 art., 12 p.). — Secchi : Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes. — Castracane : Notices historiques et générales sur les Diatomées (5 p.). — Nardi : Notice sur D. Livingstone. — Secchi : Sur la nouvelle machine dynamo-magnétique de Wheatstone. — Diorio : Sur la théorie de l'homme-singe (32 p.). — Respighi : Sur la vitesse de la lumière, déduite des éclipses des satellites de Jupiter et de l'aberration de la lumière (17 p.). — Secchi : Sur les variations de température dans les baromètres statiques (8 p.). — Castracane : Sur

la multiplication et la reproduction des Diatomées (8 p.). — RESPIGHI : Sur le cratère lunaire de Linné. — SECCHI : Seconde série de mesures micrométriques faites à l'équatorial de Merz du Collége Romain, de 1863 à 1866, et sur les étoiles doubles et nébuleuses (16 p.). — SPINA : Mémoire sur le nombre des valeurs algébriques rationnelles qui contiennent un nombre donné de lettres (56 p.). — VOLPICELLI : Sur les électrophores à rotation continue, et explication d'une expérience exécutée récemment avec l'électrophore de Holtz (7 p.). Sur le télégraphe de Glœsener (2 p.).

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. BONCOMPAGNI. — ROMA. — In-4°.

Tome I, 1868.

BERTELLI : Sur Pierre Peregrinus de Maricourt, et sur son épître *De Magnete* (3 art., 106 p.). — STEINSCHNEIDER : Aven Natan, et les théories sur l'origine de la lumière lunaire et des étoiles chez les auteurs hébreux du Moyen-Age (8 p.). — PIANI : Sur le centre de gravité; notes historico-critiques. — CIPOLLETTO : Sur quelques définitions de la force de restitution des corps solides, correspondantes aux deux méthodes, analytique et synthétique, avec lesquelles on étudie la théorie de l'élasticité (5 p.). — FRIEDLEIN : Sur les chiffres romains. — SÉDILLOT : Sur la détermination de la troisième inégalité lunaire ou *variation* par Aboul-Wéfâ et Tycho-Brahé. — CHELINI : Éléments de Géométrie, par E. CATALAN. — SPEZI : Nicomachi Gerosini Pythagorei Introductionis Arithmeticæ libri II, etc. — SECCHI : Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes. — VORSTERMAN VAN OIJEN : La première idée du télégraphe magnétique. — CURTZE : Sur l'Astronomie de Boèce signalée par M. CANTOR. — VORSTERMAN VAN OIJEN : Notice sur Ludolphe van Colen (16 p.). — TH.-H. MARTIN : Textes anciens sur les verres comburants par réfraction (7 p.). — SÉDILLOT : De l'astronomie et des mathématiques chez les Chinois. — PIUMA : Théorie des fonctions de variables complexes, par F. CASORATI (6 p.). — SERRA-CARPI : Physique du Globe. Espaces, climats et météores, par G. BOCCARDO. — TARDY : Sur une formule de Leibniz (10 p.). — BERTELLI : Sur un système supposé de télégraphie magnétique, indiqué par quelques auteurs du XVIe et du XVIIe siècle (10 p.). — SÉDILLOT : De l'École de Bagdad et des travaux scientifiques des Arabes (6 p.). — FR. VIÈTE (trad. par RITTER) : Introduction à l'art analytique (53 p.). — FORTI : Sur la vie et les écrits de W. et de J. Bolyai de Bolya, mathématiciens hongrois (23 p.). — POUDRA : Compléments de Géométrie

fondés sur la Perspective *(Extrait)* (2 p.). Catalogue des travaux de N.-G. POUDRA (7 p.).

Atti della R. Accademia delle Scienze di TORINO. — In-8°.

Tome II (*suite*), 1867.

RICHELMY : Nouveau propulseur sous-marin proposé par M. Donati. — UZIELLI : Résolution analytique des problèmes de la cristallographie (11 p.). — GOVI : Nouvelles expériences sur les miroirs magiques des Chinois. — PAGANINI : Nombres associés. — GOVI : Sur une prétendue démonstration mathématique de la récente apparition de l'Homme sur la Terre (22 p.). — MOLESCHOTT : Notice sur F. DE FILIPPI. — DE SAINT-ROBERT : De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante. — GOVI : Sur le caoutchouc vulcanisé. Prisme variable solide. — RICHELMY : Sur la poussée des terres. — DE SAINT-ROBERT : Nouvelles Tables hypsométriques. — GOVI : Démonstration d'une formule psychrométrique approchée. — MENABREA : Louis Lagrange (17 p.). — GOVI : Note sur le premier auteur de la découverte de la pression atmosphérique (20 p.). — BRUNO : Démonstration d'une propriété de l'héliçoïde gauche à plan directeur, et observations sur une proposition de la *Stéréotomie* de Leroy (7 p.). — CAVALLERO : Dianématmomètre, ou instrument pour étudier les lois de la distribution de la vapeur dans les machines, etc. (41 p.). — SOBRERO : Préparation des bois par le résidu bitumineux du pétrole d'Amérique (8 p.).

Société médicale de l'Aube. TROYES. — In-8°.

Bulletin n° 1, 1865.

MOUGEOT : De l'absorption, et principalement de l'absorption cutanée (116 p.). — GUICHARD : Des services que peuvent rendre les Eaux-Bonnes dans la phthisie pulmonaire (32 p.).

Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. VENEZIA. — In-4°.

Tome XIV, 1868.

BELLAVITIS : Considérations sur les Mathématiques pures (34 p.). — CORTESE : Sur une anomalie observée dans les nerfs optiques d'un poisson (18 p., 3 pl.).

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. VENEZIA. — In-8°.

T. XII, **1866-67**. — ARCARI : Un navire-bélier (10 p., 4 pl.). —

Berti et Namias : Notices météorologiques, juin et juillet 1866 (8 p.). — De Bertolini : Les Carabes du Trentin (60 p.). — Bizio : Nouvelles recherches sur le glycogène. — Cortese : La campagne de 1866 au point de vue de l'état sanitaire de l'armée italienne (75 p.). — Minich : Sur le traitement des maladies articulaires (85 p.). — Minotto : Sur les perfectionnements de la télégraphie électrique (21 p.). — Namias : Observations chimiques et cliniques sur le bromure et l'iodure de potassium. — Nardo : Proposition de nouvelles règles pour l'exercice de l'art obstétrical (21 p.). Sur la maladie des anguilles. Mortalité des anguilles, etc., 2e art. (7 p.). — Pazienti : Vie et travaux de Stefano Marianini (38 p.). — Pirona : Le *Synodontites,* nouveau genre de Rudiste (14 p.). — Rosetti : Recherches sur le maximum de densité de l'eau distillée de la Mer Adriatique et de quelques solutions salines, et sur la dilatation de ces liquides (53 p., 1 pl.). — Stiehler : État moderne de la paléophytologie (monocotylédones et dicotylédones) *(suite)* (2 art., 44 tableaux). — Torelli : Parallèle entre les travaux du Mont-Cenis et de l'Isthme de Suez (9 p.). — Trettenero : Observations stellaires posthumes, etc. (19 p.). — Trois : Sur la structure intime des villosités utérines de l'*Acanthias vulgaris* (6 p., 1 pl.). — Trois et Perugia : Sur les lymphatiques du cœur du *Mola aspera* (4 p., 1 pl.). — De Visiani : Sur le *Cheilantes Szovitsii* (10 p., 2 pl.). Vie scientifique de A. Parolini (29 p., 1 pl.). — Vlacovich : Sur les corpuscules oscillants du *Bombyx* du mûrier (2e et 3e art., 62 p.). — Zantedeschi : Des caractères astrométéorologiques du premier trimestre de 1866 (58 p.). Inondation arrivée à Venise, le 15 janvier 1867. Sur l'électricité induite dans les couches aériennes (4 p., 1 pl.).

T. XIII, **1867-68.** — Bellavitis : Revue des journaux (8e partie, fin) (89 p.) (9e partie, 37 p.). — Benvenisti : Distinction des principes chimiques qui se tirent de la métamorphose régressive des divers tissus fondamentaux, et critique des deux fonctions *fibrinogène* et *respiratoire* que l'on attribue aux muscles (2 art., 45 p.). — Bernardi : Moyen d'entretenir et de régler les oscillations d'un pendule destiné à manifester le mouvement de la Terre autour de son axe (10 p.). — Minich : Sur une formule d'interpolation de Prony (8 p.). — Minotto : Sur les moyens de supprimer les piles dans les bureaux télégraphiques intermédiaires, et sur un nouveau système de construction des rhéostats (21 p., 2 pl.). — Namias : Applications médicales du bromure de potassium. — Nardo : Sur un crustacé gigantesque des Décapodes brachiures de l'Adriatique (5 p.). Sur le bégaiement. — Paganuzzi : Ouragan du 24 septembre 1867 (8 p.). L'ozone pendant la dernière invasion cholérique de 1867 (13 p.). —

PAGANUZZI, BERTI et NAMIAS : Relations météorologiques et médicales, d'août 1866 à 1867 (5 art., 64 p.). Eaux minérales de la Vénétie *(suite)*. Bulletin météorologique de l'Observatoire de Venise (44 p.). — PASINI : Sur les études géologiques en Italie, à la fin du XVIIIe siècle (12 p.). — PAZIENTI et BIZIO : Eaux minérales de Staro (15 p.). — ROSSETTI : Sur le maximum de densité et sur la dilatation de l'eau distillée, de l'eau de l'Adriatique et de quelques solutions salines (2 art., 48-40 p.). — SANDRI : Sur l'étiologie de la lèpre (37 p., 1 pl.). — STIEHLER : État moderne de la paléophytologie (monocotylédones et dicotylédones) *(suite)* (2 art., 48 tableaux). — TORELLI : Parallèle des progrès des travaux du mont Cenis et de l'Isthme de Suez (2e à 5e art., 66 p.). — F. TROIS : Rapport sur les collections d'histoire naturelle (18 p.). — ZANTEDESCHI : Sur les oscillations calorifiques horaires, diurnes, mensuelles et annuelles pour 1866, etc. (60 p.). Sur l'hypothèse de l'électricité négative d'induction entourant en forme d'anneau un nuage qui se résout en pluie, neige ou grêle (12 p.). Sur une trombe terrestre arrivée dans le Frioul (7 p.). De la différence de distribution de l'électricité dans les couches aériennes des atmosphères électriques et dans les conducteurs solides isolés plongés dans ces couches (4 p.). Observations sur la *Science à l'Exposition universelle de 1867,* par le P. SECCHI (66 p.). Moyenne minimum et moyenne maximum annuelles du climat d'Italie. — A. DE ZIGNO : Description de quelques Cicadées fossiles, trouvées sur les oolithes des Alpes vénitiennes (15 p., 1 pl.). — SACCARDO : Rapport sur la *Flora formationis oolithicæ* de A. DE ZIGNO (22 p.).

T. XIV, **1868.** — DE VISIANI et SACCARDO : Catalogue des plantes vasculaires de la Vénétie (42 p.). — BIZIO : Expériences prouvant la décomposition de l'acide oxalique dissous dans l'eau. — TORELLI : Parallèle des travaux du mont Cenis et du canal de Suez (6e art., 38 p.). — BELLAVITIS : Revue des journaux scientifiques (9e art., 2e part., 29 p.). — PAZIENTI : Monographie des eaux minérales de la Vénétie *(suite)*. — TROIS : Rapport sur les accroissements des collections d'histoire naturelle de l'Institut Vénitien (20 p.).

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu WIEN. (Comptes rendus des séances de l'Académie Impériale des Sciences de VIENNE.) — In-8°.

T. LV, **1867.** — HLASIWETZ : Sur quelques acides tanniques (12 p.). Sur les principes constituants du thé (4). Sur la basicité de l'acide gallique (7 p.). Sur les dérivés bromiques des acides gallique, pyro-

gallique et oxyphénique (2 p.). — BARTH : Sur l'acide protocatéchique. — SCHWARZ : Analyse chimique de l'eau minérale de Mödling, près Vienne (11 p.). — ROCHLEDER : Sur la quercitrine. — VINTSCHGAU : Sur l'action de la physostigmine sur les amphibies (26 p.). — UNFERDINGER : La somme de la série du logarithme et de l'arctangente avec des groupes de signes alternatifs (16 p.). Sur quelques intégrales définies dépendantes de celles de Laplace (2 p.). Sur la limite de l'expression $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}$ pour $m=\infty$ (2 p.). Démonstration de la divergence de la série infinie $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{2s_2}+\frac{1}{3s_3}+\cdots$ pour $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ (2 p.). — SIERSCH : Action du zinc et de l'oxyde de zinc sur le sel marin (10 p.). — PETERS : Le *Phoca pontica*. — FRISCHAUF : Études sur la théorie des nombres (12 p.). — v. HAIDINGER : La météorite de Simonod (4 p.). Comparaison des heures du jour avec les chutes de météorites (2 art., 24 p.). — BRIO : Étude optique des cristaux d'hyposulfite de baryte. — LIELEGG : Sur le spectre de la flamme de Bessemer (9 p.) — STRICKER : Recherches sur la vie des globules incolores du sang chez l'homme (17 p.). — v. LITTROW : Détermination de la différence de longitude entre Leipzig et Dablitz, en vue de la mesure du degré du parallèle moyen en Europe (16 p.). — ROCHLEDER : Sur les principes constituants de l'écorce de la tige de pommier. — KOUTNY : Construction de la limite d'ombre des surfaces de révolution en perspective, dans l'hypothèse des rayons lumineux parallèles (48 p., 2 pl.). — J. SCHMIDT : Changements actuels du cratère lunaire de *Linné* (11 p.). — STOLZ : Axes des lignes du second ordre en coordonnées ponctuelles trimétriques générales (29 p.). — MARTIN : Courbes des rainures d'une meule de moulin (23 p.). — HLASIWETZ : Acides hydrocaféique et hydroparacumarique. — ROLLETT : Sur le changement des couleurs par le contraste (13 p.). — SEEGEN : Sur la séparation de l'azote des albuminates décomposés dans le corps (51 p.). — v. LANG : Déterminations cristallographiques et optiques, au point de vue des séries homologues et isomorphes (16 p., 1 pl.). — ROLLETT : Sur la théorie des contrastes et de la dissonnance des couleurs (8 p.). — FRITSCH : Les glaces du Danube en 1860-61 et 1861-62 (48 p., 1 pl.). — SCHENK : Histoire du développement de l'œil des Poissons (13 p., 2 pl.). — HOLM : Recherches expérimentales sur l'inflammation traumatique du foie (8 p.). — REITZ : Recherches sur l'inflammation croupale de la trachée-artère produite artificiellement (8 p., 2 pl.). — DUNCAN : Sur la pathologie et la thérapie

de la chlorose (7 p.). — LOSCHMIDT : Théorie de l'équilibre et du mouvement d'un système de points (16 p.). — PEREMEJKO : Sur l'anatomie de la rate (4 p., 1 pl.). — EROFEJEFF : Détermination des indices de réfraction principaux du sulfate d'ammoniaque. — v. LANG : Appareil perfectionné pour la mesure de l'angle des axes (6 p., 2 pl.). — v. HAIDINGER : Communication sur Santorin, sur des bolides, des aérolithes, etc., par DES GRANGES et J. SCHMIDT. — REMBOLD et GRABOWSKI : Sur quelques acides tanniques (17 p.). — HLASIWETZ : Sur les rapports des acides tanniques, des glucosides, des phlobaphèmes et des résines (21 p.). — STEFAN : Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques (25 p.). — BRÜCKE : Influence des solutions d'acide borique sur les muscles vivants. — KLEIN et VERSON : Importance du sel marin pour l'organisme humain (15 p.). — REIBENSCHUH : Sur les ankérites cristallisées des mines de la Haute-Styrie. — v. HAIDINGER : Heures locales de 178 chutes de météorites. — FIEDLER : Méthode de la Géométrie descriptive, comme introduction à la Géométrie de situation (82 p., 3 pl.). — ROLLETT : Physiologie des contrastes des couleurs (26 p.). — ULLIK : Recherches sur l'acide molybdique et ses sels (52 p.). — ROCHLEDER : Sur l'*Æsculus Hippocastanum* L. (17 p.). — GOTTLIEB : Analyse de l'Emmaquelle, en Styrie. — GINTL : Analyse quantitative des combinaisons cyanoferriques et cyanoferreuses, et titrage du caméléon. — BOEHM : Sur la fonction et la genèse des cellules dans les vaisseaux du bois (16 p., 2 pl.). — BRIO : Recherches cristallographiques et optiques (11 p.). — BRÜCKE : Influence de l'acide borique sur les substances albumineuses (24 p.). — WEISS : Observations faites en Dalmatie pendant l'éclipse annulaire de soleil du 6 mars 1867 (40 p., 2 pl.).

T. LVI, **1867**.— DUNCAN :Sur les corpuscules de Malpighi dans les reins des Grenouilles (7 p., 1 pl.). — PRUSSAT : Saignées artificielles *per diapedesin* (11 p., 1 pl.). — LIELEGG : Observations spectrales de la flamme de Bessemer (7 p.). — PEREMEJKO : Sur le développement de la rate (8 p., 2 pl.). — ROCHLEDER : Sur l'aescigénine et sur quelques substances voisines, la caïncine et la chinovine (8 p.). — ALLEMANN : Analyse de la source acide d'Ebriach, en Carinthie (8 p.). — WOLFF : Analyse chimique de la source minérale de Sztojka, en Transylvanie (8 p.). — EROFEJEFF : Etude optique des cristaux de sulfate de protoxyde de fer. — KÓNYA : Analyse chimique de la source de Baden, près Vienne. — BRÜCKE : Constitution des globules rouges du sang (13 p.). — MORSTADT : Détermination directe des axes des formes cristallines (5 p., 1 pl.). — ROCHLEDER : Sur la saponine. — MAYER : Sur les quantités de fibrine qui se

séparent dans le sang caillé (8 p.). — SCHENK : Physiologie du cœur embryonnaire. — EXNER : Recherches sur le mouvement brownien (7 p.). — PFAUNDLER : Capacité pour la chaleur des acides sulfuriques hydratés (11 p., 1 pl.). — ROCHLEDER : Sur l'écorce de la tige du *Pyrus Malus* L. et de l'*Æsculus Hippocastanum* L. (8 p.). — ULLIK : Sur quelques combinaisons de l'acide wolframique (12 p.). — OBERSTEINER : Sur le développement des tendons (10 p., 1 pl.). — v. HAIDINGER : Les Météorites du Musée Impérial en 1867 (10 p.). — ALLEMANN : Étude chimique de l'huile grasse de maïs. — BAXT : Action physiologique de quelques alcaloïdes de l'opium. — JELINEK : Moyenne normale pour 5 jours de la chaleur dans 80 stations d'Autriche, en 1848-65 (30 p.). — v. LITTROW : Rencontre physique d'astéroïdes en 1867. — v. BIESIADECKI : Sur l'anatomie physiologique et pathologique de la peau (26 p., 3 pl.). — KUSNETZOFF : Sur l'histoire du développement de la peau (6 p., 2 pl.). — UNFERDINGER : Sommation des séries d'exponentielles, de sinus et de cosinus à groupes de signes alternatifs (15 p.). Détermination exacte de la différence entre les moyennes arithmétique et géométrique de quantités positives, et déduction d'un théorème général de calcul intégral (15 p.). — LUDWIG : Présence de la triméthylamine dans le vin. —WOLFF : Recherches chimiques sur le minerai de fer de la mine près de Hüttenberg, en Carinthie (7 p.). — KOUTNY : Construction de l'intersection d'une droite avec les sections coniques (13 p., 1 pl.). — FRIESACH : Sur l'influence du milieu qui propage le son sur les vibrations d'un corps sonore (9 p.). — SCHELL : Sur la détermination des constantes du planimètre polaire (20 p.). — ÅSTRAND : Nouvelle méthode simple pour la détermination du temps et de la longitude; *précédé de* Remarques, par K. v. LITTROW (5-30 p., 1 tabl.). — v. UCHATIUS : Changements à sa méthode d'essai des poudres (7 p., 1 pl.). — GRABOWSKI : Sur l'acide tannique de l'écorce de chêne (4 p.). — REMBOLD : Sur les principes constituants de la racine de Tormentille (4 p.). — MALIN : Sur l'acide isodulcitique (3 p.). Sur le camphre (4 p.). — HLASIWETZ et GRABOWSKI : Décomposition de l'acide camphorique par la potasse caustique (7 p.). — CZERNY : Sur l'aveuglement de la rétine par la lumière solaire (20 p., 1 pl.). — WEISS : Calcul des éclipses de soleil dans les années 1868-1870 (27 p., 4 cartes). — REINER : Analyse chimique de la source minérale de Sauerbrunn, près Vienne (7 p.). — VIERTHALER : Analyse chimique des sources sulfureuses de Spalato (16 p.). Études sur quelques variations dans la composition de l'eau de mer à Spalato (10 p.). — OSER : Recherches sur la fermentation alcoolique (7 p.). — J. SCHMIDT : Sur les météores ignés de 1842 à 1867

(34 p.). — HANN : Influence des vents sur la valeur moyenne des principaux éléments météorologiques à Vienne (25 p.). — STEFAN : Sur un appareil acoustique d'interférences (5 p.). — HANDL : Notes sur la théorie moléculaire (20 p.). — OPPOLZER : Les constantes de la précession, d'après Le Verrier (15 p.). — BRÜCKE : Influence de la durée du courant sur l'excitation électrique des muscles (9 p.). — ROVIDA : Étude sur les cellules (3 p.). — LIEBEN : Synthèse des alcools au moyen de l'éther chloré (44 p.). — JELINEK : Sur la réduction des indications barométriques dans les baromètres à cuvette et à niveau variable (8 p.). — WEYR : Sur la théorie des surfaces magnétiques transversales (13 p.). — BOLTZMANN : Sur le nombre des atomes dans les molécules gazeuses, et sur le travail intérieur dans les gaz (7 p.). — HERING : Sur la théorie de la vie des cellules du sang (10 p.). — HANN : Température des courants d'air sur l'Obir, en Carinthie (16 p., 1 pl.). — BERSCH : Action de l'eau sur le chlorure de cobalt, et changements de couleur des sels de protoxyde de cobalt par la chaleur (6 p.).

Smithsonian Miscellaneous Collections. WASHINGTON. — In-8°.

T. I, **1862.** — Instructions pour les observations météorologiques et l'enregistrement des phénomènes périodiques (70 p.). — J. COFFIN : Tables psychrométriques pour déterminer la force de la vapeur d'eau et l'humidité relative de l'atmosphère, d'après les indications du thermomètre à boule sèche et humide de Fahrenheit (20 p.). — GUYOT : Tables physiques et météorologiques, préparées pour l'Institut Smithsonien (640 p.).

T. II, **1862.** — BOOTH et MORFIT : Nouveaux progrès dans les arts chimiques (206 p.). — Extrait des procès-verbaux du Bureau des Administrateurs de l'Institut Smithsonien, relativement au télégraphe électro-magnétique (39 p.). — Catalogue de portraits d'Indiens de l'Amérique du Nord, etc., peints par J. STANLEY (72 p.). — BAIRD : Catalogue d'Oiseaux de l'Amérique du Nord, spécialement dans le Musée de l'Institut Smithsonien (19 p.). — BAIRD et GIRARD : Catalogue de Reptiles de l'Amérique du Nord dans le Musée de l'Institut Smithsonien (161 p.). — LEA, CARPENTER, STIMPSON, BINNEY, PRIME : Catalogne des coquilles de l'Amérique du Nord (43 p.). — Instructions pour collectionner, conserver et transporter les objets d'histoire naturelle (40 p.). Instructions pour les collections de nids et d'œufs d'oiseaux de l'Amérique du Nord.

T. III, **1862.** — OSTEN-SACKEN : Catalogue des Diptères décrits de l'Amérique du Nord (92 p.). — MORRIS : Catalogue des Lépidop-

tères décrits de l'Amérique du Nord (68 p.). — LECONTE : Classification des Coléoptères de l'Amérique du Nord (285 p.).

T. IV, **1862.** — HAGEN : Catalogue des Névroptères décrits de l'Amérique du Nord, avec une liste des espèces de l'Amérique du Sud (347 p.). — MORRIS : Tableau des Lépidoptères décrits de l'Amérique du Nord. 1re partie : Lépidoptères diurnes et crépusculaires (358 p.).

T. V, **1864.** — BINNEY : Bibliographie de la Conchyologie de l'Amérique du Nord avant l'année 1860 (648 p.).

T. VI, **1867.** — LOEW et OSTEN-SACKEN : Monographies des Diptères de l'Amérique du Nord; 1re et 2e partie (581 p.). — LECONTE : Liste des Coléoptères de l'Amérique du Nord (77 p.), et nouvelles espèces de Coléoptères de l'Amérique du Nord (177 p.).

T. VII, **1867.** — ALLEN : Monographie des Chauves-souris de l'Amérique du Nord (85 p.). — BINNEY : Coquilles terrestres et d'eau douce de l'Amérique du Nord (281 p.). — STIMPSON : Recherches sur les *Hydrobiinæ* et formes voisines (59 p.). — TEMPLE PRIME : Monographie des *Corbiculadæ* de l'Amérique (80 p.). — CONRAD : Liste des fossiles invertébrés de l'Amérique du Nord : Éocène et Oligocène (48 p.). — MEEK : Liste des fossiles invertébrés de l'Amérique du Nord : Miocène (32 p.). Liste des fossiles invertébrés de l'Amérique du Nord : Craie jurassique (40 p.). — EGLESTON : Catalogue de minéraux avec leurs formules (42 p.).

BROCHURES DIVERSES.

Format in-4°.

CATALAN : Note sur un problème d'analyse indéterminée. *Rome,* 1866 (9 p.). Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. 1867 (13 p.). — GALLETTI : La Sphère, poème en vers octaves du XIVe siècle, par LEONARDO DATI, avec deux chants ajoutés par TOLOSANI DA COLLE. 1863 (28 p.). — A. GENOCCHI : Sur quelques sommations de cubes (texte italien). 1866 (10 p.). Note sur quelques sommations de cubes (traduction française). *Paris,* 1866 (11 p.). — A. MARRE : Le Talkhys d'Ibn Albannâ; trad. de l'arabe. *Rome,* 1865 (33 p.). Biographie d'Ibn Albannâ, mathématicien du XIIIe siècle, extraite du *Tekmilet ed-dibadj* d'Ahmed Baba; texte arabe et traduction. 1865 (12-4 p.). Le Messâhal de Mohammed ben Moussa al Khârezmi; extrait de son algèbre. 1866 (14 p.). — TH.-H. MARTIN : Les signes numéraux et l'Arithmétique

chez les peuples de l'Antiquité et du Moyen-Age (examen de l'ouvrage de M. CANTOR : *Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker*). 1864 (103 p.). Observations et théories des Anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques, et sur les attractions électriques. 1865 (42 p.). Sur l'âge du traité *De Republica* de Cicéron, et sur l'époque de Théodore Méliténiote. 1866 (16 p.). — MOSSOTTI : Sur un passage de la *Divine Comédie* de Dante Allighieri. 1865 (8 p.). — RICHAUD : Sur la résolution des équations $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, suivi d'une Note sur un problème indéterminé. 1866 (12 p.). Note sur la résolution de l'équation $x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \cdots + [x+(n-1)r]^3 = y^2$. 1867 (22 p.). — M. ROBERTS : Recherches sur les équations du cinquième degré. 1866 (14 p.). — SCHIAPARELLI : Sur le cours et l'origine probable des étoiles météoriques. 1866 (33 p.). — SÉDILLOT : Sur l'origine de nos chiffres. 1865 (9 p.). — SIACCI : Sur l'usage des déterminants pour représenter la somme des nombres naturels. 1865 (8 p.). Des invariants et des covariants des formes binaires, et en particulier de celles du 3e et du 4e degré. 1865 (32 p.). — STEINSCHNEIDER : Sur quelques mathématiciens du Moyen-Age et sur leurs ouvrages. Fragments de l'Arithmétique d'Elia Misrach. Sur huit manuscrits arabes de mathématiques, etc. 1863-67 (92 p.). — FR. VIÈTE : Introduction à l'art analytique, trad. par F. RITTER. 1868 (24 p.). — WENCKEBACH : Sur Petrus Adsigerus et les plus anciennes observations de la déclinaison de l'aiguille aimantée. 1865 (12 p.). — WŒPKE : Sur quelques anciennes méthodes de multiplication. 1863 (18 p.). Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de trois manuscrits arabes de la Bibl. Imp. de Paris. 1864 (39 p.). Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes du *British Museum* de Londres. 1864 (25 p.). Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes du *British Museum* de Londres; suivis d'extraits du Talkhys d'Ibn Albannâ, trad. par A. MARRE. *Paris*, 1865 (54 p.). Introduction au Calcul Gobârî et Hawâî; traité d'Arithmétique, précédé d'une Notice, par A. MARRE, sur un Ms. possédé par M. Chasles. *Rome*, 1866 (IX-19 p.).

BAUERNFEIND : Résultats des mesures modernes du degré. *Munich*, 1866 (41 p.). — v. LIEBIG : Le développement des idées dans les sciences naturelles. *Munich*, 1866 (26 p.) — P. BERT : Notice sur ses titres et travaux scientifiques. *Paris*, 1868 (48 p.).— DOUAUD : De la dégénérescence graisseuse des muscles chez les vieillards. *Paris*, 1867 (94 p.) — JOURDAIN : Recherches sur la veine-

porte rénale chez les Oiseaux, les Reptiles, les Batraciens et les Poissons. *Paris,* 1860. (105 p., 4 pl.). Sur le système circulatoire de l'Astérie commune. *Paris,* 1867 (3 p.). — J. Léon : De quelques phénomènes végétaux. *Paris,* 1852 (16 p.). — Perez : Recherches sur l'anguillule terrestre. *Paris,* 1866 (156 p., 6 pl.).

Format in-8°.

Codazza : Le prince Boncompagni et l'histoire des sciences mathématiques en Italie. *Milan,* 1864 (28 p.). — P. Magrini : Sur la vie et les ouvrages de Stefano degli Angeli, mathématicien vénitien du XVIIe siècle. *Rome,* 1866 (37 p., 1 pl.). — A. Marre : Kholâçat al Hissâb, ou Quintessence du Calcul, par Behâ-Eddîn al Aamoulî, trad. de l'arabe. *Rome,* 1864 (82 p.). Petit vocabulaire de mots malays que l'usage a introduits dans les langues d'Europe. *Rome,* 1866 (14 p.). — Th.-H. Martin : Liste chronologique de ses ouvrages, opuscules et articles publiés avant le 30 juin 1865. *Rome* (4 p.). — Milanesi : Document inédit et inconnu sur Léonard Fibonacci. *Rome,* 1867 (10 p.). — Narducci : Sur deux éditions de la *Summa de Arithmetica* de Fra Luca Pacioli. *Rome,* 1863 (16 p.). Second essai sur les mots italiens dérivés de l'arabe. *Rome,* 1863 (42 p.). Li livres dou Tresor, par Brunetto Latini; publiés par P. Chabaille. *Rome,* 1864 (24 p.). Poésies inédites de Paolo dell' Abbaco, mathématicien du XIVe siècle. *Rome,* 1864 (30 p. in-18). Sur une traduction italienne, faite en 1341, d'un ouvrage astronomique d'Alfonse X, roi de Castille. *Rome,* 1865 (34 p.). Sur quelques passages remarquables d'ouvrages anciens relatifs aux sciences physiques et astronomiques. *Rome,* 1866 (24 p.). Œuvres de Fr. Zambrini. *Rome,* 1866 (3 p.). Sur la vie du comte Giammaria Mazzuchelli, et sur la collection de ses manuscrits. *Rome,* 1867 (79 p.). — Spezi : De la nature du vide, par Héron d'Alexandrie ; traduction inédite en langue vulgaire de B. Davanzati. *Rome,* 1863 (12 p.). Notices sur un manuscrit grec du Vatican. *Rome,* 1865 (16 p.).

Graham : Démonstration d'une marée lunaire dans les lacs de l'Amérique du Nord (*Cambridge-U.-S.*), 1861 (11 p., 1 pl.). — A. et G.-B. Villa : Note sur des insectes observés pendant l'éclipse du 8 juillet 1842. *Milan* (12 p.). Observations géognostiques et géologiques sur certaines collines du Brescian et du Bergamasque. 1857 (8 p., 1 pl.). Sur la monographie des *Unio* de France. 1860 (16 p.). Sur les Curculionites de la plaine de Pavie. 1860 (10 p.). Sur l'origine des perles et la possibilité de les produire artificiellement. 1860 (19 p.). Sur des coquilles terrestres et fluviatiles rapportées

d'Orient. 1862 (8 p.). — Des Moulins : Éclaircissement sur une question d'orthographe. *Bordeaux,* 1861 (8 p.). Autonomie réelle du genre *Schufia.* Sur une publication récente de M. Clos. Vrilles de la vigne vierge. *Vites boreali-americanæ.* 1862 (64 p.). Plantes rares de la Gironde. 1863 (20 p.). De la classification de certains opercules de Gastéropodes. 1867 (8 p.). Description de quelques coquilles fossiles, etc. 1867 (23 p., 1 pl.). Excursion à Cazeneuve (Gironde), etc. 1868 (64 p.).

Boudet : Sur la mortalité des jeunes enfants. *Paris,* 1867 (26-7 p.). Sur le mouvement de la population en France. 1867 (8 p.). Sur le lait artificiel de Liebig. 1867 (9 p.). — Forti : Sur la vie et les ouvrages de Louis Lagrange. *Pise,* 1868 (32 p.). — Glotin : Essai sur les navires à rangs de rames des Anciens. *Bordeaux,* 1862 (69 p., 1 pl.). — Guépin : Sur les hypérémies rétino-choroïdiennes. 1862 (39 p.). — Jourdain : Coup d'œil sur le système veineux et lymphatique de la Raie bouclée. *La Rochelle,* 1868 (14 p., 1 pl.). Notice zoologique et anatomique sur une espèce de Chétoptère des côtes de la Manche. *Paris,* 1868 (23 p., 1 pl.). — De Lacolonge : De la perforation mécanique des roches par le diamant. *Paris* (13 p.). Recherches théoriques et expérimentales sur le moteur à pression d'eau de M. Perret (48 p., 1 pl.). — Laganne : Note sur les érosions des calcaires dénudés de la vallée de la Vézère et de ses affluents. *Périgueux* (8 p.). — Loomis : Découverte de la cause de la gravitation, etc. *Columbia,* 1866 (82 p.). Nouvelle détermination des diamètres et des distances des corps célestes, etc. *New-York,* 1868 (48 p.). — Personnat : Le ver à soie du chêne, etc. *Paris* (14 p., 1 pl.). — Sansas : Premières traces du Christianisme à Bordeaux, d'après les monuments contemporains. 1867 (74 p.). — Valat : Plan d'une Géométrie nouvelle. *Bordeaux,* 1866 (38 p.). De la double série de polyèdres demi-réguliers qui servent de complément aux recherches d'Archimède et de Képler. 1867 (24 p.). Des hypothèses dans la science. 1867 (29 p.).

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL.

DEUXIÈME PARTIE.

Théorie des fonctions uniformes.

CHAPITRE Ier.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ Ier.

Caractère général d'une fonction d'une variable complexe.

96. Soit $f(z)$ une fonction continue, réelle ou complexe, d'une variable z; supposons que cette fonction soit définie, pour des valeurs *réelles* de cette variable, par une équation de la forme

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

$f_1(z)$ et $f_2(z)$ étant des fonctions réelles pour les valeurs réelles de z.

Si dz représente un accroissement réel infiniment petit de la variable z, le rapport

$$\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$$

aura pour limite une nouvelle fonction $f'(z)$ de z, qui sera généralement déterminée, et qui ne dépendra nullement du signe de l'accroissement dz, ni de la manière dont on aura fait converger cet accroissement vers zéro. Cette limite s'appelle, comme on sait, la *fonction dérivée* ou simplement la *dérivée* de $f(z)$.

L'existence de cette fonction dérivée se vérifie pour toutes les fonctions continues définies *a priori*. Elle sert à en définir une

infinité d'autres au moyen de l'intégration; et, pour toutes les fonctions inconnues que l'on considère en Analyse, on admet implicitement qu'elles jouissent de la propriété d'avoir une dérivée qui ne devient nulle ou infinie qu'un nombre limité de fois dans un intervalle fini quelconque.

Voyons à quelle condition les fonctions d'une variable complexe jouiront de cette propriété fondamentale.

97. Dans le cas où z est une variable réelle et dz un accroissement réel infiniment petit, on a

$$\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}=f'(z)+\varkappa\, dz,$$

$\varkappa$ étant une fonction, réelle ou complexe, de z et de dz, qui ne devient pas infinie pour $dz=0$. Il en sera de même, lorsqu'on remplacera z par une valeur complexe

$$x+iy=re^{i\varphi},$$

pourvu qu'on laisse dz réel, ou y constant.

Supposons maintenant qu'on fasse varier à la fois x et y, ou r et p, et soit

$$dz=dx+idy=\rho e^{i\varphi},$$

ρ étant infiniment petit, et φ ayant une valeur quelconque. Si l'on fait cette substitution dans l'équation précédente, le second membre deviendra

$$f'(z)+\varkappa.\rho e^{i\varphi},$$

la fonction $\varkappa$ de z et de $\rho e^{i\varphi}$ n'étant pas généralement infinie pour $\rho=0$; et par suite la valeur de

$$\lim\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$$

se réduira à la partie $f'(z)$, qui est une fonction de z seulement, indépendante de dz et, par conséquent, de l'angle φ.

On voit donc qu'une fonction d'une variable complexe étant définie comme ce que devient une fonction $f(z)$ d'une varable réelle, lorsqu'on substitue à z des valeurs complexes, cette fonction

jouira de la même propriété fondamentale que les fonctions d'une variable réelle, c'est-à-dire qu'elle aura, pour chaque valeur de z, une *dérivée par rapport à z*, généralement déterminée et finie, dépendant seulement de z, et nullement de la nature de l'accroissement infiniment petit de cette variable.

Les fonctions de variables complexes, ainsi définies, peuvent donc être soumises au calcul d'après les mêmes règles de différentiation et d'intégration que les fonctions de variables réelles; de sorte que, si une fonction est bien définie pour les valeurs réelles de la variable, et si elle est formée au moyen des opérations élémentaires dont la signification a pu être étendue au cas des quantités complexes, on pourra calculer sa *différentielle* et son *intégrale indéfinie*, sans s'inquiéter de savoir si la valeur actuelle de la variable est réelle ou complexe.

98. Une variable complexe z étant une fonction de ses deux composantes x et y, indépendantes entre elles, il en sera de même de toute fonction $f(z)$ de z, et l'on pourra former les dérivées partielles de $f(z)$ par rapport à chacune des variables indépendantes x, y. Si l'on pose donc, pour un instant,

$$f(z) = f(x + iy) = F(x, y),$$

on aura identiquement

$$\frac{F(x + dx, y) - F(x, y)}{dx} = \frac{f(z + d_x z) - f(z)}{d_x z} \cdot \frac{d_x z}{dx},$$

$$\frac{F(x, y + dy) - F(x, y)}{dy} = \frac{f(z + d_y z) - f(z)}{d_y z} \cdot \frac{d_y z}{dy}.$$

Or, d'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, chacun des rapports

$$\frac{f(z + d_x z) - f(z)}{d_x z}, \quad \frac{f(z + d_y z) - f(z)}{d_y z}$$

a pour limite la *dérivée* de $f(z)$, ou $f'(z)$. Ensuite

$$\frac{d_x z}{dx} = 1, \quad \frac{d_y z}{dy} = i.$$

Donc

$$D_x F(x, y) = D_x f(z) = f'(z),$$

$$D_y F(x, y) = D_y f(z) = i f'(z).$$

Ces valeurs montrent que les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ ou $f(z)$ des deux variables indépendantes x, y, sont liées entre elles par la relation

(1) $$D_x F(x, y) = \frac{1}{i} D_y F(x, y),$$

ou

(2) $$D_x f(z) = \frac{1}{i} D_y f(z).$$

99. Les fonctions $f(z)$, dont nous venons d'établir la propriété fondamentale, ne sont pas prises dans le sens le plus général que l'on attache au mot *fonction,* si l'on entend par *fonction* toute quantité dont la valeur est déterminée pour chaque système de valeurs des variables dont elle dépend.

On pourrait dire, en effet, que les deux variables x et y étant déterminées dès que l'on a choisi la valeur de la variable complexe z, cette dernière représente à elle seule un système de valeurs des deux variables réelles x, y; et par suite, qu'en donnant à z toutes les valeurs possibles, on obtiendra tous les systèmes de valeurs des variables x, y, dont dépend la fonction quelconque $F(x,y)$ de deux variables réelles.

Mais on peut prévoir *a priori* qu'une telle généralisation n'est pas admissible. Elle tient, en effet, à la valeur particulière attribuée au symbole i, d'où dépend la décomposition en deux composantes rectangulaires de la variable z attachée à chaque point du plan. Or, l'usage des variables complexes dans l'Analyse est fondé sur la généralisation des opérations, en vertu de laquelle le symbole i est traité indépendamment de sa signification particulière, et le binôme $x + iy$ soumis aux mêmes règles d'opérations que si la lettre i représentait une constante quelconque. D'après cela, l'extension donnée à la définition des fonctions, lorsqu'on y remplace la variable réelle z par le binôme $x + iy$, doit consister à traiter ce binôme comme si la constante i avait une valeur quelconque, puis à particulariser cette valeur seulement dans le résultat.

Nous appellerons donc *fonction* de la variable complexe $z = x + iy$ ce que devient la fonction

$$f(x + \alpha y),$$

définie pour les valeurs réelles de x et de y et pour une valeur quelconque de la constante α, lorsqu'on donne à cette constante la valeur particulière i.

100. Il est facile d'obtenir la condition pour qu'une fonction $F(x, y)$ des variables indépendantes x, y puisse être considérée comme une fonction du binôme $x + \alpha y$. Si l'on pose, en effet,

$$F(x, y) = f(x + \alpha y),$$

on aura

$$D_x F(x, y) = f'(x + \alpha y),$$
$$D_y F(x, y) = \alpha f'(x + \alpha y).$$

Donc

$$D_x F(x, y) = \frac{1}{\alpha} D_y F(x, y),$$

condition nécessaire, qui, pour $\alpha = i$, se change dans l'équation (1).

Réciproquement, cette condition est suffisante; car, si elle est satisfaite, alors on aura

$$dF(x, y) = D_x F(x, y) . dx + D_y F(x, y) . dy$$
$$= D_x F(x, y)\,(dx + \alpha dy),$$

d'où

$$\frac{dF(x, y)}{d(x + \alpha y)} = D_x F(x, y),$$

quantité indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$, et que l'on peut représenter par $f'(x + \alpha y)$, comme on le verrait par un raisonnement connu. Donc

$$dF(x, y) = df(x + \alpha y),$$

et par suite $F(x, y)$ ne dépend que du binôme $x + \alpha y$, et ne change pas si x et y varient d'une manière quelconque, tant que la valeur de ce binôme reste invariable.

Si l'on suppose maintenant $\alpha = i$, on retrouve la condition (1) du n° 98, laquelle est ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de deux variables $F(x, y)$ puisse être considérée comme une fonction du binôme $z = x + iy$.

101. On peut aisément vérifier en même temps que cette condition exprime que $F(x, y)$ a une *dérivée* déterminée par rapport à $z = x + iy$. En effet, cette relation est nécessaire et suffisante pour que le rapport

$$\frac{dF(x, y)}{dz} = \frac{D_x F(x, y) + D_y F(x, y) \cdot \frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$.

Donc l'équation aux dérivées partielles

$$D_x F(x, y) = \frac{1}{i} D_y F(x, y) \tag{1}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes réelles x, y puisse être traitée, d'après les règles de l'Analyse des quantités réelles, comme une fonction de la seule variable complexe $z = x + iy$, et, en particulier, pour qu'elle jouisse de la propriété fondamentale des fonctions d'une seule variable, d'avoir, par rapport à cette variable, une *dérivée déterminée,* indépendante du mode d'accroissement de cette variable (*).

102. Séparons maintenant, dans la fonction

$$w = f(z) = f(x + iy),$$

le réel de l'imaginaire, et posons

$$w = u + iv.$$

(*) Cauchy n'admettait pas cette restriction dans la définition d'une fonction d'une variable complexe, et il appelait fonctions *monogènes* celles qui satisfont à la définition restreinte. Mais comme tous ses théorèmes s'appliquent exclusivement aux fonctions monogènes, les autres fonctions ne jouissant que des propriétés générales des fonctions de deux variables indépendantes, et leur calcul ne pouvant se ramener à celui des fonctions d'une seule variable, il vaut mieux, à l'exemple de Riemann, exclure tout d'abord de nos recherches les fonctions non monogènes, et réserver aux seules fonctions monogènes le nom de *fonctions* de la variable complexe $x + iy$. On évite ainsi la répétition inutile d'un mot qui reviendrait invariablement dans chaque énoncé.

L'équation (1) deviendra alors

$$D_x(u+iv)=\frac{1}{i}D_y(u+iv),$$

ou

$$D_x u - D_y v + i(D_x v + D_y u) = 0.$$

Cette équation se partage en deux autres,

(2) $$D_x u = D_y v, \qquad D_y u = - D_x v,$$

qui expriment les conditions auxquelles doivent satisfaire les onctions u, v des variables indépendantes x, y, pour que $u+iv$ puisse être considéré comme une fonction du binôme $x+iy$, jouissant de la propriété fondamentale des fonctions d'une seule variable.

103. On verrait de même, en introduisant les coordonnées polaires au lieu des coordonnées rectangulaires x,y, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$w = Re^{iP},$$

(R et P étant des fonctions réelles de r et de p), soit une fonction de

$$z = re^{ip},$$

est que l'on ait

$$D_r w + \frac{i}{r} D_p w = 0,$$

équation qui se partage en deux autres.

$$r.D_r R = R.D_p P, \qquad rR.D_r P = - D_p R.$$

104. On peut vérifier effectivement, sur des exemples très simples, qu'une fonction de x et de y, qui ne satisfait pas aux relations (1) ou (2), n'a pas de dérivée par rapport à z, indépendante de l'argument de dz.

Soit, par exemple,

$$w = u + iv = x - iy,$$

qui ne satisfait pas à la relation (1).

On a, en posant $dz = \rho e^{i\varphi}$,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi},$$

quantité qui dépend de φ.

105. Si l'on différentie les équations (2) par rapport à x et à y, on en tire, en éliminant tour à tour v et u, les équations

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0,$$
$$D_x^2 v + D_y^2 v = 0.$$

Donc les deux fonctions u et v ne peuvent ni l'une ni l'autre être choisies arbitrairement. Elles doivent satisfaire toutes les deux à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

(3) $$D_x^2 \gamma + D_y^2 \gamma = 0.$$

106. Si nous supposons remplies les conditions (2), posons

(4) $$\begin{cases} X = D_x u = D_y v, \\ Y = -D_y u = D_x v, \end{cases}$$

d'où

(5) $$\begin{cases} D_x w = X + iY, \\ D_y w = -Y + iX = iD_x w, \end{cases}$$

$$dw = (X + iY)\,dx + (-Y + iX)\,dy$$
$$= (X + iY)(dx + idy) = (X + iY)\,dz.$$

Donc la dérivée totale $\frac{dw}{dz}$ a pour valeur

(6) $$\frac{dw}{dz} = X + iY,$$

et par conséquent on a

(7) $$\frac{dw}{dz} = D_x w = \frac{1}{i} D_y w.$$

107. La dérivée $\frac{dw}{dz}$, donnée par l'équation (6), est elle-même

une fonction de z. En effet, d'après les équations (4), on a

$$D_x X = D_x D_y v = D_y Y,$$
$$D_x Y = -D_x D_y u = -D_y X,$$

et ce sont là les conditions pour que $X + iY$ soit une fonction de $z = x + iy$.

Il en est de même, en vertu des équations (7), des dérivées partielles de w par rapport à x et à y.

Donc, si w est une fonction de $z = x + iy$, toutes les dérivées, totales ou partielles, de cette fonction seront aussi des fonctions de $z = x + iy$.

Remarque. Il est facile d'exprimer toutes les dérivées partielles des fonctions u et v, prises par rapport à x et à y à la fois, au moyen de dérivées prises par rapport à une seule de ces variables. En effet, de l'équation (3), à laquelle u et v satisfont, résulte la formule symbolique

$$D_y^2 = -D_x^2,$$

d'où

$$D_y^{2n} = (-1)^n D_x^{2n}.$$

Donc

$$D_x^m D_y^{2n} u = (-1)^n D_x^{m+2n} u,$$

Ensuite, en vertu des équations (4),

$$D_x^m D_y^{2n+1} u = (-1)^n D_x^{m+2n} D_y u = (-1)^{n+1} D_x^{m+2n+1} v.$$

On peut ainsi tout ramener à des dérivées de u ou de v prises par rapport à une seule des variables, à x, par exemple.

Comme d'ailleurs, d'après la formule (7),

$$\frac{d^n w}{dz^n} = D_x^n w,$$

il s'ensuit de là que toutes les dérivées partielles de u ou de v se ramènent à la partie réelle ou à la partie imaginaire de la dérivée totale de même ordre de w par rapport à z.

108. Supposons que la variable z soit elle-même une fonction d'une autre variable $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que l'on ait

$$z = \varphi(\zeta) = \varphi(\xi + i\eta).$$

Toute fonction $w = f(z)$ de z sera aussi une fonction de ζ. On a, en effet,

$$D_\xi w = f'(z).D_\xi z, \qquad D_\eta w = f'(z).D_\eta z,$$

d'où, en vertu de l'équation (1), à laquelle $z = \varphi(\zeta)$ satisfait,

$$D_\xi w + iD_\eta w = f'(z)(D_\xi z + iD_\eta z) = 0.$$

Donc w, considéré comme fonction de ξ et de η, satisfait aussi à l'équation (1); c'est donc une fonction de $\xi + i\eta$.

Autrement, on a, quel que soit dz,

$$dw = f'(z)\,dz.$$

Or, z étant une fonction de ζ,

$$dz = \varphi'(\zeta)\,d\zeta,$$

Donc

$$dw = f'(z)\varphi'(\zeta)\,d\zeta,$$

d'où

$$\frac{dw}{d\zeta} = f'(z)\varphi'(\zeta),$$

quantité indépendante de la *direction* de $d\zeta$.

109. L'équation (6) exprime une relation géométrique remarquable entre les points du plan qui représentent la fonction w et la variable indépendante z. Si l'on représente les différentielles de z et de w par

$$dz = \rho e^{i\varphi}, \qquad dw = \sigma e^{i\chi},$$

l'équation (6) donne

$$\frac{\sigma}{\rho} e^{i(\chi - \varphi)} = X + iY,$$

d'où, en égalant de part et d'autre les modules et les arguments,

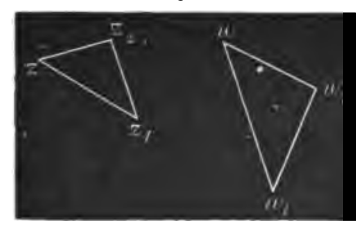
$$\frac{\sigma}{\rho} = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\chi - \varphi = \text{arc tang}\, \frac{Y}{X}\,.$$

On voit par là que, dz et dw étant deux accroissements infiniment petits simultanés de la variable z et de la fonction w, le rapport des modules $\frac{\sigma}{\rho}$ et la différence des arguments $\chi - \varphi$ de ces accroissements ne dépendent pas de φ ou de dz, mais seulement de la position du point z lui-même.

Donc, si $\overline{zz_1}$, $\overline{zz_2}$ sont deux accroissements infiniment petits de z, et $\overline{ww_1}$, $\overline{ww_2}$ les accroissements correspondants de w, les deux triangles zz_1z_2, ww_1w_2 seront toujours *directement semblables*.

Fig. 26.



Si z décrit un contour infiniment petit quelconque, w décrira un contour directement semblable.

Ainsi deux figures quelconques formées l'une par un système de points z, l'autre par le système des points w correspondants, sont semblables *dans leurs éléments infiniment petits* (*).

§ II.

Continuité et discontinuité des fonctions.

110. Une fonction d'une seule variable réelle x,

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

est dite *continue* dans le voisinage de la valeur x, lorsque la différence

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

est infiniment petite en même temps que dx. Dans le cas contraire, la fonction est dite *discontinue*.

De même, une fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles est dite

(*) *Voy.* SIEBECK, *Ueber die graphische Darstellung u. s. w.* (*Crelle's Journal*, tome LV).

continue dans le voisinage du point (x,y), toutes les fois que la différence

$$df(x,y) = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$$

est infiniment petite, quels que soient les accroissements dx, dy, pourvu qu'ils soient l'un et l'autre infiniment petits. Dans le cas contraire, la fonction est *discontinue*.

111. Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, étant un cas particulier d'une fonction de deux variables réelles, sera continue lorsque la différence

$$df(z) = f(z+dz) - f(z)$$

sera infiniment petite en même temps que dx et que dy, et par suite en même temps que le module de dz, ou que dz lui-même.

D'après cela, $f(z)$ variera d'une manière continue entre deux limites données z_0, Z, lorsque, z passant de la position z_0 à la position Z par un chemin de forme quelconque, pourvu qu'il ne présente aucune interruption, les valeurs de $f(z)$, correspondantes à deux positions consécutives de z *sur le chemin donné*, sont infiniment voisines. Nous ne considérons comme infiniment voisines que deux positions de z séparées *par un arc infiniment petit du chemin donné :* nous verrons plus tard que l'on peut avoir lieu de ne pas regarder comme telles deux positions de z prises sur deux branches différentes d'une courbe qui se coupe elle-même, bien que ces deux positions puissent être séparées par une droite infiniment petite.

112. Une fonction peut être discontinue de plusieurs manières, soit en passant brusquement d'une valeur finie à une valeur finie différente, comme cela a lieu pour la fonction représentée par l'ordonnée d'une courbe qui offre un point de rupture, ou encore pour les fonctions représentées par certaines intégrales définies ; soit en devenant infinie pour certaines valeurs de la variable, comme les fonctions

$$\frac{1}{z-c}, \qquad \operatorname{tang} \frac{\pi z}{2c}, \qquad e^{\frac{1}{z-c}},$$

qui deviennent infinies pour $z = c$.

Un point $z = c$, pour lequel la fonction $f(c)$ devient infinie, s'appelle, pour abréger, un *infini* de cette fonction; de même qu'un point pour lequel la fonction s'annule est dit un *zéro* de cette fonction.

113. Considérons l'inverse $\frac{1}{f(z)}$ de la fonction $f(z)$. A chaque zéro de l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$, correspond un infini de l'autre. La considération de cette valeur inverse $\frac{1}{f(z)}$ va nous conduire à partager en deux classes les *points de discontinuité* de la fonction $f(z)$.

La fonction $f(z)$ devenant infinie pour $z = c$, il peut arriver que la valeur réciproque $\frac{1}{f(z)}$ soit continue dans le voisinage de $z = c$. C'est ce qui aura lieu toutes les fois que $f(c + dz)$ sera infiniment grand tout autour du point c. Car $\frac{1}{f(c + dz)}$ étant infiniment petit tout autour de c et nul au point c lui-même, la continuité existera pour la fonction $\frac{1}{f(z)}$ tout autour de ce point c.

Nous dirons, dans ce cas, que le point c est un *point de discontinuité de* PREMIÈRE ESPÈCE ou un *infini de* PREMIÈRE ESPÈCE. Comme ce cas est celui que nous aurons presque toujours à considérer, nous conviendrons une fois pour toutes que, toutes les fois que nous parlerons d'un *point de discontinuité* ou d'un *infini,* sans autre désignation, il s'agira d'un point de discontinuité ou d'un infini *de première espèce.*

De même, nous appellerons zéros *de première espèce,* ou simplement *zéros* d'une fonction $f(z)$ les points c tels que $f(c + dz)$ soit infiniment petit tout autour de point c et nul au point c lui-même.

Ainsi, tout *zéro* de l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ sera un *infini* de l'autre, et réciproquement; et, pour un tel point, l'une des deux fonctions restera toujours continue, tandis que l'autre passera par l'infini.

114. Nous appellerons *points de discontinuité de* SECONDE ESPÈCE les points de discontinuité de $f(z)$ pour lesquels $\frac{1}{f(z)}$ n'est pas con-

tinue. C'est ce qui arrive lorsque la fonction $f(z)$ passe brusquement d'une valeur finie g à une autre valeur finie h: la fonction $\frac{1}{f(z)}$ éprouve alors une solution de continuité, en passant brusquement de la valeur $\frac{1}{g}$ à la valeur $\frac{1}{h}$.

Une discontinuité de seconde espèce peut correspondre à une valeur finie de $f(z)$, lorsque la fonction $f(c+dz)$ n'est pas infinie tout autour du point c. Car alors $\frac{1}{f(c+dz)}$ n'est pas infiniment petit tout autour de c, et passe, dans un intervalle infiniment petit, d'une valeur nulle à une valeur finie ou infiniment grande.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-c}}$$

Si $z-c$ a une valeur réelle et positive ε, $f(z)$ sera infini pour $z-c$ infiniment petit. Au contraire, pour $z-c$ négatif et $= -\varepsilon$, $f(z)$ sera infiniment petit pour ε infiniment petit. Pour les autres valeurs voisines de c, $f(z)$ est indéterminé. Donc c est un point de discontinuité de seconde espèce de la fonction $f(z)$.

115. Si $f(x)$ est une fonction de la variable x supposée *réelle*, et que cette fonction soit toujours *continue*, ou simplement *finie* entre les valeurs x_0 et X de cette variable, on démontre, dans le Calcul intégral, que la formule

$$f(X) - f(x_0) = \int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx$$

est toujours vraie, de quelque manière que se comporte la dérivée $f'(x)$ entre ces limites, cette dérivée pouvant devenir discontinue ou même infinie dans cet intervalle.

§ III.

Fonctions uniformes et fonctions multiformes.

116. Une fonction est dite *uniforme*, lorsqu'elle n'admet qu'une seule valeur déterminée, pour chaque valeur donnée de la variable.

Telles sont les fonctions qui résultent des opérations rationnelles

d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'élévation aux puissances entières, ou de combinaisons quelconques d'un nombre fini de ces opérations.

Telles sont encore les fonctions définies comme limites de sommes de séries convergentes, dont tous les termes sont des fonctions uniformes : par exemple, la fonction exponentielle e^z, et les fonctions circulaires directes $\sin z$, $\cos z, \ldots$, qui s'en déduisent.

117. Si une fonction $f(z)$ est uniforme, sa valeur réciproque $\frac{1}{f(z)}$ est aussi uniforme.

Il en est de même évidemment de toute fonction uniforme de $f(z)$, qui est aussi une fonction uniforme de z.

118. Si l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ a un infini (de première espèce) au point c, l'autre, étant continue dans le voisinage de ce point (qui est pour elle un zéro), sera encore une fonction uniforme en ce point. Nous dirons alors que celle des fonctions qui devient infinie est encore uniforme dans le voisinage de son infini, et en cet infini même.

Si, au contraire, la fonction $f(z)$ a en c une discontinuité de seconde espèce, auquel cas il en est de même pour la fonction $\frac{1}{f(z)}$, alors $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ cesseront d'être uniformes au point c lui-même, bien qu'elles puissent être uniformes en tout autre point.

Nous verrons que l'on peut cependant, dans certains cas, traiter ces fonctions comme si elles étaient partout uniformes, pourvu que ces solutions de continuité de seconde espèce soient en nombre fini dans un espace donné.

119. Si deux variables w et z sont liées entre elles de telle manière que, pour chaque valeur de z, w prenne une valeur déterminée, mais qu'elle ne prenne jamais la même valeur pour deux valeurs de z différentes entre elles ; alors z pourra être considéré comme une fonction uniforme de la variable w.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les fonctions

$$w = az + b, \qquad w = \frac{az + b}{cz + d},$$

z étant dans les deux cas une fonction uniforme de w, aussi bien que w est une fonction uniforme de z.

120. Mais généralement il n'en est pas ainsi. Une fonction w de z reprend la même valeur en des points différents du plan, en nombre fini ou infini. Il en résulte alors que, si l'on considère réciproquement z comme une fonction de w, la valeur en question de w correspondra à plusieurs valeurs différentes de z, et que z sera une fonction *multiforme* de w.

Ainsi, nous avons vu que la fonction

$$w = z^n,$$

n étant entier, prend des valeurs égales en n points distribués régulièrement sur une même circonférence. Si donc on cherche à déterminer z par la condition que w prenne une valeur donnée w_1, on trouvera pour solution n points différents. On dira alors que z est une fonction de w *à n déterminations*, ou une fonction n-FORME.

Si deux variables w et z sont liées entre elles par une équation algébrique du degré m par rapport à w et du degré n par rapport à z, w sera une fonction m-forme de z, et z une fonction n-forme de w.

La fonction exponentielle

$$w = e^z$$

ne change pas, lorsqu'on augmente z d'un multiple quelconque de $2\pi i$. Donc la fonction inverse

$$z = \log w,$$

définie par l'équation précédente, sera une fonction *infinitiforme*, admettant, pour chaque valeur de w, toutes les valeurs, en nombre infini, comprises dans la formule

$$z + 2k\pi i,$$

quel que soit l'entier k.

Remarquons, en général, que, si la fonction $w = f(z)$ est périodique, la fonction inverse $z = \varphi(w)$ admettra une infinité de

valeurs, différant entre elles de multiples quelconques de l'indice de périodicité.

121. Nous ne traiterons, dans cette SECONDE PARTIE, que des fonctions qui sont uniformes soit dans toute l'étendue du plan, soit du moins dans la partie de plan considérée, et qui, de plus, ne présentent dans cet espace que des discontinuités de première espèce.

CHAPITRE III.

INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ Ier.

De l'intégrale d'une fonction de deux variables prise dans l'étendue d'une aire donnée.

122. Nous appellerons *aire* une portion de plan limitée de toutes parts, et *contour* de l'aire la ligne ou l'ensemble de lignes qui limite cette aire.

Si le contour forme un trait continu, et ne se coupe point lui-même, de sorte qu'on puisse parcourir ce contour en entier sans pénétrer dans l'aire, on dira que l'aire est à *connexion simple* (1). Telles sont les aires d'un cercle, d'une ellipse, d'un rectangle, etc.

Si, au contraire, le contour se compose de plusieurs courbes fermées qui ne se rencontrent pas, de sorte qu'on ne puisse passer de l'une de ces portions de contour à l'autre sans pénétrer dans l'aire, on dira que l'aire est à *connexion multiple* (2). Telle est l'aire comprise entre deux cercles concentriques.

L'aire est à *connexion double, triple, quadruple,* etc. (3), suivant que les portions du contour indépendantes entre elles sont au nombre de 2, de 3, de 4, etc. L'aire comprise entre deux cercles concentriques est à connexion double. L'aire représentée par la partie blanche de la figure 27 est à connexion quadruple.

Fig. 27.

123. Une même ligne servant à la fois de limite aux deux portions de plan qu'elle sépare, il importe de distinguer celle de ces deux portions que l'on veut considérer.

Nous supposerons un observateur debout sur la partie *supérieure* du plan, et parcou-

---

(1) *Einfach zusammenhängend* (RIEMANN).
(2) *Mehrfach zusammenhängend.*
(3) *Zwei-, drei-, vierfach zusammenhängend.*

rant le contour de l'aire considérée, de manière que cette aire soit toujours *à sa gauche*. Le sens dans lequel marchera cet observateur s'appellera le *sens direct* ou la *direction positive* du contour de cette aire. Le sens opposé s'appellera *le sens rétrograde* ou la *direction négative* de ce contour.

Si l'on considère tour à tour les deux portions de plan limitées par la même ligne, le sens qui sera direct par rapport à l'une sera rétrograde par rapport à l'autre. Il suffira d'indiquer le sens que l'on considère comme direct, pour que l'on sache par cela même de laquelle des deux portions du plan il doit être question.

Ainsi, dans la figure 27, les flèches indiquent le sens direct du contour de la partie blanche de l'aire, et le sens rétrograde du même contour considéré par rapport à la partie noire.

124. Une droite indéfinie dans les deux sens, menée à travers une aire, rencontre nécessairement le contour de l'aire un nombre *pair* de fois, autant de fois pour entrer dans l'aire que pour en sortir.

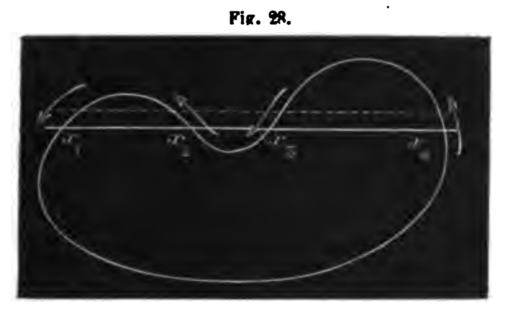
Supposons d'abord cette droite parallèle à l'axe des x. Si l'on représente par

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{2n}$$

les abscisses des points de rencontre consécutifs, les abscisses d'indices *impairs* correspondent à des *entrées*, les abscisses d'indices *pairs* à des *sorties*.

Si un point s'avance sur le contour (*fig. 28*) de manière que sa projection sur l'axe des y marche dans le sens des y positives; en

Fig. 28.



d'autres termes, si ce point passe de dessous au-dessus de la parallèle aux x, ce point marchera dans le sens *rétrograde* à chaque *entrée*, dans le sens *direct* à chaque *sortie*.

Il résulte de là que, si un point parcourt le contour constamment dans le sens direct, la direction qu'il suit lorsqu'il passe par un point de *sortie* fait un angle *aigu* avec la portion positive de l'axe des y; lorsqu'il passe, au contraire, par un point d'*entrée*, cette direction fait avec le même axe un angle *obtus*.

D'après cela, si l'on désigne par dy_k la variation de y lorsque le point mobile sur le contour rencontre la parallèle aux x à l'extrémité de l'abscisse x_k, dy_k sera positif, si x_k est l'abscisse d'un point de sortie, ou si l'indice k est pair; négatif, si x_k est l'abscisse d'un point d'entrée, ou si l'indice k est impair. Si l'on désigne donc par dy la distance absolue de deux parallèles à l'axe des x infiniment voisines, on aura, en général,

$$dy_k = (-1)^k dy$$

125. Soit maintenant $V = V(x,y)$ une fonction, réelle ou complexe, des deux variables x, y, continue (et, par suite, finie) dans toute l'étendue d'une aire donnée $\mathfrak{A}$, *y compris le contour de cette aire*. Supposons, de plus, que la fonction V soit *uniforme* dans cette étendue, c'est-à-dire qu'elle ne soit susceptible que d'une seule valeur pour un système quelconque de valeurs de x et de y, correspondant à un point quelconque de l'aire ou de son contour.

Il pourra se faire, dans certains cas, que la dérivée partielle $D_x V$ ne soit pas toujours finie et continue; mais il nous suffit que la fonction V elle-même le soit.

Considérons l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} D_x V . dx dy,$$

relative à tous les éléments $dxdy$ de l'aire $\mathfrak{A}$. Pour l'évaluer, nous couperons d'abord l'aire par des parallèles à l'axe des x infiniment rapprochées, et nous évaluerons la valeur de l'intégrale correspondante à la tranche infiniment mince, comprise entre deux de ces parallèles consécutives.

Cette valeur se composera d'autant de parties qu'il y a de couples de points d'entrée et de sortie. On prendra l'intégrale indéfinie.

$$dy . \int D_x V . dy = V dy;$$

on ajoutera les valeurs correspondantes aux points de sortie, et l'on retranchera les valeurs correspondantes aux points d'entrée. Si donc on désigne par V_k la valeur de V qui répond à l'abscisse x_k, on devra ajouter les valeurs de $V_k dy$ qui répondent à k pair, et retrancher les valeurs qui correspondent k impair, ce qui donne

$$\Sigma(-1)^k V_k dy.$$

Or, d'après ce que nous avons vu, si dy_k est la variation de y obtenue lorsqu'on traverse l'intervalle des deux parallèles en parcourant le contour de l'aire dans le sens direct, on a

$$dy_k = (-1)^k dy \cdot$$

Donc la valeur de l'intégrale relative à la tranche peut s'exprimer par

$$\Sigma\, V_k dy_k.$$

Pour avoir maintenant l'intégrale double relative à l'aire totale $\mathfrak{A}$, il faudra faire la somme de toutes les expressions analogues à la précédente, en faisant varier y entre ses limites extrêmes. Or, il est clair que l'on aura ainsi à faire la somme de toutes les expressions $V_k dy_k$ relatives à tous les éléments du contour de l'aire.

Si donc nous désignons par

$$\int_{\mathfrak{A}} Vdy$$

la somme de tous les éléments Vdy, relatifs à tous les points du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, et dans lesquels dy représente l'accroissement, positif ou négatif, de y, correspondant à un déplacement infiniment petit d'un point mobile sur le contour *dans le sens direct;* nous obtiendrons la formule

$$(1) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_x V . dx dy = \int_{\mathfrak{A}} Vdy,$$

où l'on observera que la notation $\int\int_{\mathfrak{A}}$ représente une intégrale double, prise *sur toute la surface* de l'aire $\mathfrak{A}$, tandis que la notation $\int_{\mathfrak{A}}$ désigne une intégrale simple, prise *tout le long du contour* de l'aire $\mathfrak{A}$, ce contour étant toujours supposé parcouru *dans le sens direct.*

126. Si l'on considère de même l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} D_y U.dxdy ,$$

U étant encore une fonction de x et de y, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, nous verrons que l'on aura, pour valeur de cette intégrale,

$$\int\int_{\mathfrak{A}} D_y U.dxdy = -\int_{\mathfrak{A}} Udx, \tag{2}$$

le signe — provenant ici de ce que, dans une tranche parallèle à l'axe des y, les dx_k relatifs aux points d'entrée doivent être pris positivement, et les dx_k relatifs aux points de sortie négativement.

127. En retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (2), nous obtiendrons la formule fondamentale

$$\int\int_{\mathfrak{A}} (D_x V - D_y U)\,dxdy = \int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy). \tag{3}$$

On a donc ce théorème :

Si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, la valeur de l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} (D_x V - D_y U)\,dxdy, \tag{4}$$

étendue à tous les éléments superficiels $dxdy$ de cette aire, est égale à la valeur de l'intégrale simple

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy), \tag{5}$$

prise en donnant à x et à y successivement tous les systèmes de valeurs qui correspondent aux divers points du contour total de l'aire, ce contour étant parcouru DANS LE SENS DIRECT.

128. Si l'expression

$$Udx + Vdy$$

est une *différentielle exacte*, $D_x V - D_y U$ s'annulera identique-

ment pour toutes les valeurs de x et de y. Donc l'intégrale double (4) sera identiquement nulle, et, comme la formule (3) ne cessera pas de subsister, l'intégrale (5) sera donc pareillement nulle. Donc,

Toutes les fois que U et V étant deux fonctions de x, y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, l'expression

$$Udx + Vdy\,.$$

sera une différentielle exacte, c'est-à-dire toutes les fois que l'on aura identiquement

$$D_x V - D_y U = 0,$$

l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy),$$

prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ sera nulle (1).

Ce qui a lieu pour l'aire totale $\mathfrak{A}$ est vrai également pour toute portion de cette aire. Donc l'intégrale (5) est nulle aussi, lorsqu'on la prend tout le long d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ (2).

129. Il est aisé de voir que, si l'on prend une même intégrale quelconque, telle que $\int Udx$, le long d'une même ligne finie, fermée ou non, en parcourant successivement cette ligne dans les deux sens opposés, les deux valeurs obtenues pour l'intégrale se composent d'éléments égaux, mais de signes contraires. Donc ces deux valeurs seront égales et de signes contraires.

130. Cela posé, si l'on désigne, pour un instant, par $\int$(ADB) la

---

(1) Voyez Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, 1851 (pages 8 et suiv.).

(2) Si l'aire $\mathfrak{A}$ était à connexion multiple (n° 122), on ne devrait considérer comme une ligne fermée tracée à l'intérieur de l'aire qu'une ligne pouvant, par des déformations continues, se réduire à un seul point *sans sortir de l'aire*, et sans pénétrer dans les *enclaves* qui n'en font point partie. Par exemple, la proposition ne serait pas vraie pour une courbe fermée qui entourerait une de ces enclaves de toutes parts.

valeur d'une certaine intégrale prise le long de l'arc ADB (*fig.* 29), cet arc étant parcouru dans le sens indiqué par l'ordre des lettres, on aura

Fig. 29.



$$\int(\text{ADB}) = -\int(\text{BDA}).$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\int(\text{ACBDA}) = \int(\text{ACB}) + \int(\text{BDA}).$$

On peut donc écrire aussi

$$\int(\text{ACBDA}) = \int(\text{ACB}) - \int(\text{ADB}).$$

Si maintenant l'intégrale $\int(\text{ACBDA})$, étendue au contour fermé tout entier, est nulle, on en conclura

$$\int(\text{ACB}) = \int(\text{ADB}).$$

Donc, si l'intégrale considérée est nulle lorsqu'on la prend tout le long d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, la valeur de cette intégrale restera la même lorsqu'on la prendra le long de toutes les courbes finies tracées à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ entre les mêmes extrémités A et B.

C'est ce qui a lieu en particulier pour l'intégrale (5), lorsque $Udx + Vdy$ est une différentielle exacte. Donc, *si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ et telles que $Udx + V\,dy$ soit une différentielle exacte; si, de plus,* A *et* B *sont deux points quelconques de l'intérieur ou du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, l'intégrale*

$$\int(Udx + Vdy),$$

prise le long d'une ligne quelconque tracée de A *en* B *à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, est indépendante de la forme de cette ligne, et on peut la considérer comme une fonction des coordonnées des extrémités* A *et* B *de la ligne, ou seulement des coordonnées d'une seule de ces extrémités, si l'autre est supposée fixe.*

131. Soit maintenant

$$w = u + iv$$

une fonction de la variable complexe

$$z = x + iy,$$

et supposons cette fonction uniforme et continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On a, d'après ce que nous avons vu dans le Chapitre précédent,

$$D_x u = D_y v, \qquad D_y u = -D_x v.$$

Donc chacune des expressions

$$v dx + u dy, \qquad u dx - v dy$$

est une différentielle exacte.

En appliquant donc le théorème du n° 128, on en conclura d'abord que chacune des intégrales

$$\int_{\mathfrak{A}} (v dx + u dy), \qquad \int_{\mathfrak{A}} (u dx - v dy),$$

prise tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ est nulle. On aura donc, en les ajoutant, après avoir multiplié la première par i,

$$\int_{\mathfrak{A}} [(u + iv) dx + (iu - v) dy] = \int_{\mathfrak{A}} (u + iv)(dx + idy) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathfrak{A}} w dz = 0.$$

Donc, *si w est une fonction de la variable complexe z, qui soit uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} w dz$, prise le long du contour de cette aire (ou plus généralement le long d'une courbe fermée quelconque tracée dans cette aire), est nulle.*

132. On en conclut encore que l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} w dz,$$

prise le long d'un chemin quelconque tracé à l'intérieur de l'aire entre les points z_0 et Z, est indépendante de la forme du chemin parcouru, et qu'elle ne dépend que des seules limites z_0 et Z.

133. On voit en outre que c'est une *fonction* (n° 101) de ces limites. Si l'on fait, en effet, varier une de ces limites Z de la quantité dZ, l'intégrale croîtra de

$$\int_Z^{Z+dZ} w dz.$$

Soit, maintenant, $w = w(z)$ une fonction de z, uniforme et continue dans tous les points considérés, et soit

$$\int_{z'}^{z''} w dz,$$

une intégrale de cette fonction, prise entre deux points infiniment voisins z', z'', le long d'un chemin quelconque joignant ces deux points. Puisque, d'après le n° précédent, cette intégrale est indépendante de la forme du chemin parcouru, on pourra prendre pour ce dernier l'ensemble des deux composantes rectangulaires $x''-x'$, $y''-y'$ de la distance $z''-z'$. On a alors, en désignant par ξ, η des valeurs moyennes entre x' et x'', et entre y' et y'',

$$\int_{z'}^{z''} w dz = \int_{z'}^{z''} (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_{x'}^{x''} [u(x,y') + iv(x,y')] dx + i\int_{y'}^{y''} [u(x'',y) + iv(x'',y)] dy$$
$$= (x''-x')[u(\xi,y') + iv(\xi,y')] + i(y''-y')[u(x'',\eta) + iv(x'',\eta)],$$

quantité qui différera infiniment peu de

$$[(x''-x') + i(y''-y')] [u(x'y') + iv(x',y')] = (z''-z') w(z').$$

Donc, lorsque z'' converge vers z', le rapport

$$\frac{1}{z''-z'} \int_{z'}^{z''} w dz$$

convergera vers la limite $w(z')$, indépendante de $z''-z'$.

Il résulte de là que la limite du rapport

$$\frac{1}{dZ} \int_Z^{Z+dZ} w dz$$

est la valeur $w(Z)$, indépendante de dZ, de la fonction w pour

$z = Z$. Donc $w(Z)$ est la dérivée de l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} wdz$ par rapport à sa limite supérieure Z.

Par conséquent, cette intégrale remplit la condition nécessaire pour que l'on puisse la considérer comme une fonction de sa limite supérieure, comme dans le cas d'une variable réelle, et de plus cette fonction est uniforme et continue, comme la fonction w elle-même. Il en serait évidemment de même relativement à la limite inférieure. On a ainsi les deux équations

$$D^{Z} \int_{z_0}^{Z} wdz = w(Z),$$

$$D_{z_0} \int_{z_0}^{Z} wdz = -w(z_0).$$

134. Les intégrales définies des fonctions d'une variable complexe, uniformes et continues dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$, jouissent donc de propriétés analogues à celles des intégrales définies des fonctions d'une variable réelle.

Si l'on désigne par ζ un point quelconque de l'aire, on aura, comme pour les fonctions d'une variable réelle, l'égalité

$$\int_{z_0}^{Z} wdz = \int_{z_0}^{\zeta} wdz + \int_{\zeta}^{Z} wdz.$$

On déduit de cette formule :

1° La décomposition d'une intégrale définie en deux ou en plusieurs autres;

2° La faculté de remplacer une intégrale, dont les deux limites sont variables, par la différence de deux intégrales, ayant chacune une seule limite variable;

3° Si l'on échange entre elles les limites de l'intégrale, on a (voir n° 129)

$$\int_{z_0}^{Z} wdz = -\int_{Z}^{z_0} wdz.$$

4° Enfin, toutes les fonctions dont la dérivée est $w = w(z)$ dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, sont comprises dans la formule

$$\int_{z_0}^{z} wdz + C,$$

C étant une constante indépendante du chemin parcouru pour aller

de z_0 en z. Si l'on désigne par $F(z)$ une quelconque des fonctions comprises dans cette formule, on aura, par l'élimination de C,

$$\int_{z_0}^{Z} w dz = F(Z) - F(z_0).$$

135. Si la fonction w est uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, comme le sont les fonctions

$$e^z, \quad \cos z, \quad \sin z, \quad z^m,$$

(m étant entier et positif), on pourra supposer l'aire $\mathfrak{A}$ aussi grande que l'on voudra, et prendre pour z_0 et Z deux points quelconques du plan.

Pour de telles fonctions, l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} w dz$ aura une signification aussi bien déterminée que pour le cas des variables réelles, et on l'obtiendra de la même manière, en passant par l'intégrale indéfinie.

136. Considérons une intégrale quelconque de la forme

$$\int (U dx + V dy),$$

U et V étant des fonctions uniformes de x et de y, et soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux aires adjacentes, dont les contours, qui ont une partie commune, ne passent par aucun point de discontinuité des fonctions U, V. Les intégrales prises le long de chacun de ces contours seront des quantités finies et déterminées, quelles que soient les discontinuités que peuvent présenter les fonctions U, V dans l'intérieur des deux aires.

Or on a, dans tous les cas (*fig.* 30),

$$\int_{\mathfrak{A}} (U dx + V dy) = \int (\text{ACB}) + \int (\text{BEA}),$$

$$\int_{\mathfrak{B}} (U dx + V dy) = \int (\text{AEB}) + \int (\text{BDA});$$

et comme on a (n° 129)

$$\int (\text{BEA}) + \int (\text{AEB}) = 0,$$

il s'ensuit de là que

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int(\text{ACB}) + \int(\text{BDA}).$$

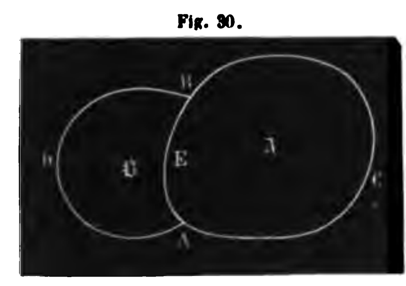


Fig. 30.

Or, la somme (ACB + BDA) forme le contour total de l'aire ACBDA $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Donc, en désignant par $\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$ l'intégrale prise le long du contour de l'aire totale $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, on a, en général,

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.$$

Si nous supposons maintenant que

$$Udx + Vdy$$

soit une différentielle exacte, et que les fonctions uniformes U et V soient continues dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on aura alors $\int_{\mathfrak{A}} = 0$, et par conséquent

$$\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} (Udx + Vdy) = \int_{\mathfrak{B}} (Udx + Vdy).$$

Donc l'*intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque* $\mathfrak{B}$ *ne change pas, lorsqu'on ajoute à l'aire* $\mathfrak{B}$ *une autre aire* $\mathfrak{A}$ *dans laquelle les fonctions* U *et* V *sont partout uniformes et continues.*

Par la même raison, *on peut, sans changer la valeur de l'intégrale* $\int_{\mathfrak{B}} (Udx + Vdy)$, *retrancher de l'aire* $\mathfrak{B}$ *toute portion de cette aire à l'intérieur de laquelle les fonctions* U *et* V *restent uniformes et continues.*

137. Démontrons encore un théorème dont nous ferons usage plus tard.

Nous avons vu que, si W est une fonction quelconque de x et de y, uniforme et continue dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on a [125 et 126]

$$\iint_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_x W . dxdy = \int_{\mathfrak{A}} W dy,$$

$$\iint_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_y W . dxdy = -\int_{\mathfrak{A}} W dx.$$

Soit maintenant $w = u + iv$ une fonction de $z = x + iy$, uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, ainsi que sa dérivée $\mathrm{D}_z w$. Remplaçons W, dans la première des formules précédentes, par $\mathrm{D}_x(u^2)$, et, dans la seconde, par $\mathrm{D}_y(u^2)$, et ajoutons les résultats. Il viendra

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left[\mathrm{D}_x^2(u^2) + \mathrm{D}_y^2(u^2)\right] dxdy = \int_{\mathfrak{A}} \left[\mathrm{D}_x(u^2)\, dy - \mathrm{D}_y(u^2)\, dx\right].$$

Or, d'après les propriétés générales des fonctions d'une variable complexe, on a [102 et 105]

$$\mathrm{D}_x^2 u + \mathrm{D}_y^2 u = 0, \qquad \mathrm{D}_x u = \mathrm{D}_y v, \qquad -\mathrm{D}_y u = \mathrm{D}_x v.$$

Il vient donc, en développant et réduisant,

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left[(\mathrm{D}_x u)^2 + (\mathrm{D}_y u)^2\right] dxdy = \int_{\mathfrak{A}} u(\mathrm{D}_x v . dx + \mathrm{D}_y v . dy) = \int_{\mathfrak{A}} u dv.$$

Mais l'intégrale double du premier membre est essentiellement positive, tant que $\mathrm{D}_x u$ et $\mathrm{D}_y u$ ne sont pas nuls dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire tant que u n'est pas constant dans toute l'étendue de cette aire.

Si $\mathrm{D}_x u$ et $\mathrm{D}_y u$ ne sont pas nuls à la fois, les relations que nous avons rappelées tout à l'heure montrent que $\mathrm{D}_x v$ et $\mathrm{D}_y v$ ne s'annulent pas non plus, et qu'alors v n'est pas une constante, non plus que $w = u + iv$.

Donc *l'intégrale* $\int_{\mathfrak{A}} u dv$ *sera positive toutes les fois que* w *ne se réduira pas à une constante en tous les points de l'aire* $\mathfrak{A}$, *et elle ne sera nulle que si* w *est constant.*

§ II.

Des résidus.

138. Soit $w = f(z)$ une fonction de la variable complexe z; supposons que cette fonction reste uniforme dans toute l'étendue

de l'aire $\mathfrak{A}$, mais qu'elle présente, à l'intérieur de cette aire, des solutions de continuité aux points

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n,$$

en nombre fini, et *isolés* les uns des autres (c'est-à-dire séparés entre eux par des intervalles *finis*).

Entourons chacun de ces points de discontinuité d'un contour fermé aussi petit que l'on voudra, et désignons par

$$\int_c wdz$$

l'intégrale $\int wdz$ prise le long du contour infiniment petit qui entoure le point c.

Si l'on considère la portion de l'aire $\mathfrak{A}$ qui reste après la suppression des aires infinitésimales entourant les points de discontinuité, la fonction w sera uniforme et continue en chaque point de cette portion. On pourra donc, d'après le théorème démontré au n° 136, supprimer cette portion d'aire sans changer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} wdz.$$

Donc cette intégrale est égale à la somme des intégrales prises le long des contours infinitésimaux tracés autour des points de discontinuité que renferme l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{A}} wdz = \int_{c_1} wdz + \int_{c_2} wdz + \cdots + \int_{c_n} wdz.$$

Donc, pour évaluer une intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque, il suffit de savoir évaluer une intégrale prise le long d'un contour infinitésimal tracé autour d'un point de discontinuité.

139. Soit c un point de discontinuité de la fonction w, et voyons comment on évaluera l'intégrale *prise autour de ce point*.

Nous pouvons supposer que l'on donne au contour tracé autour de c la forme d'un cercle de centre c et de rayon infiniment petit ρ. Posons alors

$$z - c = \rho e^{i\varphi}.$$

Quand le point z fera le tour du cercle, φ variera seul, et croîtra

de 0 à 2π, si z fait une seule fois le tour de c, comme cela a lieu ici. On aura donc

$$dz = i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi = i(z-c)d\varphi,$$

et par suite

$$\int_c wdz = i\int_0^{2\pi} w.(z-c)d\varphi.$$

140. Supposons premièrement que le produit

$$w.(z-c) = f(z).(z-c)$$

converge vers une limite *finie* F, lorsque $z-c$ tend vers 0, c'est-à-dire que la quantité

$$F = \lim_{\varepsilon=0}\left[\varepsilon.f(c+\varepsilon)\right]$$

ait une valeur *finie*. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} w.(z-c)\,d\varphi$$

est de la forme

$$\int_0^{2\pi} (X+iY)\,d\varphi,$$

X et Y étant des quantités réelles, dépendantes de la position du point z sur la circonférence, et par suite fonctions de la variable φ et du paramètre infiniment petit ρ. On a donc

$$\int_0^{2\pi} Xd\varphi = 2\pi.\,\mathfrak{M}(X),$$

$$\int_0^{2\pi} Yd\varphi = 2\pi.\,\mathfrak{M}(Y),$$

$\mathfrak{M}(X)$ et $\mathfrak{M}(Y)$ désignant des *valeurs moyennes* de X et de Y. Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} w.(z-c)d\varphi = 2\pi\left[\mathfrak{M}(X) + i\,\mathfrak{M}(Y)\right].$$

Or le second membre a évidemment pour limite $2\pi F$, lorsqu'on y fait converger ρ vers zéro, ou z vers c. Donc

(2) $$\int_c wdz = 2\pi i.F,$$

en posant

(3) $$F = \lim_{z=0} w(z-c).$$

Cette quantité F est ce que Cauchy appelle le *résidu* de la fonction w relatif au point c. Il s'est servi, pour désigner les résidus, de la caractéristique $\mathcal{E}$, en entourant de doubles parenthèses le facteur de w dont la présence rend cette fonction discontinue au point c. Lorsque ce facteur n'est pas en évidence, on multiplie et l'on divise par ce facteur, de sorte que la quantité F est représentée, d'après Cauchy, par la notation

$$\mathcal{E}\frac{w(z-c)}{((z-c))}.$$

Nous proposerons de simplifier un peu cette notation, en suivant la même convention que nous employons déjà pour les intégrales prises le long d'un contour donné ou autour d'un point donné; et nous représenterons le résidu de la fonction w relatif au point c par la notation

$$\mathcal{E}_c w.$$

On aura, d'après cela, au lieu des formules (2) et (3), les formules

$$(4)\qquad \int_c w\,dz = 2\pi i \,.\, \mathcal{E}_c w,$$

$$(5)\qquad \mathcal{E}_c w = \lim_{z=c} w(z-c).$$

141. Dans le cas où $\lim w(z-c)$ est infinie, nous conserverons encore comme définition du résidu l'équation (4) ou

$$(6)\qquad \mathcal{E}_c w = \frac{1}{2\pi i}\int_c w\,dz.$$

Mais le calcul de cette quantité ne sera plus aussi simple, l'équation (5) n'ayant plus lieu.

On peut cependant obtenir immédiatement le résidu, lorsque la fonction w est développable en une série convergente, finie ou infinie, ordonnée suivant les puissances entières, négatives, nulles ou positives, de la différence $z-c$.

Supposons, en effet, que l'on ait un développement convergent de la forme

$$w = \cdots + \frac{A_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-c} + A_0 + \cdots + A_n(z-c)^n + \cdots.$$

En posant encore

$$z - c = \rho e^{i\varphi},$$

il vient

$$w = \cdots + \frac{A_{-m}}{\rho^m} e^{-mi\varphi} + \cdots + \frac{A_{-1}}{\rho} e^{-i\varphi} + A_0 + \cdots + A_n \rho^n e^{ni\varphi} + \cdots\cdot\cdot$$

En multipliant les deux membres par

$$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi,$$

et intégrant entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, on a, pour toute valeur de $n \gtreqless 0$, mais différente de -1,

$$\int_0^{2\pi} A_n \rho^n e^{ni\varphi} . i\rho e^{i\varphi} d\varphi = iA_n \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = 0,$$

tandis que, pour $n = -1$, il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{A_{-1}}{\rho} e^{-i\varphi} . i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i A_{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i . A_{-1}.$$

On verrait d'ailleurs, comme au n° 133, que, si R est le reste de la série, l'intégrale $\int_0^{2\pi} Rdz$ est infiniment petite en même temps que R. Donc $\int_c wdz$ se réduit à $2\pi i A_{-1}$, d'où

$$\mathcal{E}_c w = \frac{1}{2\pi i} \int_c wdz = A_{-1}.$$

Donc, lorsqu'une fonction w, discontinue au point c, est développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières de $z - c$, et renfermant nécessairement des puissances négatives de $z - c$ (sans quoi elle ne serait pas infinie pour $z = c$), *le résidu de la fonction w relatif au point c sera égal au coefficient de la puissance -1 de $z - c$ dans le développement de w.* Nous verrons plus tard dans quelles conditions ce développement est possible, et comment on en calcule les coefficients.

C'est ce dernier énoncé que Cauchy avait pris pour définition du résidu d'une fonction relatif au point c.

142. D'après cette notation, l'équation (1) du n° 135 devient

$$\int_{\mathfrak{A}} w dz = 2\pi i \left(\mathcal{E}_{c_1} w + \mathcal{E}_{c_2} w + \cdots + \mathcal{E}_{c_n} w \right),$$

ou, par analogie, en représentant par

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} w dz$$

le *résidu intégral* relatif à l'aire $\mathfrak{A}$,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \mathcal{E}_{c_1} w + \mathcal{E}_{c_2} w + \cdots + \mathcal{E}_{c_n} w,$$

ou, plus brièvement,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}} w = \Sigma_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}_c w,$$

le signe de sommation $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ s'étendant à tous les points de discontinuité c renfermés dans l'aire $\mathfrak{A}$.

Pour tout point c où la fonction w reste continue, le résidu $\mathcal{E} w$ est nul. On peut donc, sans changer le résidu intégral, y comprendre la somme des résidus relatifs à tous les points de $\mathfrak{A}$ pour lesquels w est continue, et alors le résidu intégral pourra être considéré comme la somme des résidus relatifs à *tous les points* de l'aire $\mathfrak{A}$.

143. De la définition des résidus résultent immédiatement les relations suivantes :

Si l'on suppose tous les résidus relatifs aux mêmes points de discontinuité ou à une même aire, on aura

$$\mathcal{E}(w_1 + w_2 + w_3 + \cdots) = \mathcal{E} w_1 + \mathcal{E} w_2 + \mathcal{E} w_3 + \cdots.$$

Si l'on considère une aire comme composée de plusieurs autres (les contours eux-mêmes ne passant par aucun point de discontinuité), on aura

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \cdots} w = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_1} w + \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_2} w + \mathcal{E}_{\mathfrak{A}_3} w + \cdots.$$

Si w est le produit de plusieurs fonctions $w_1, w_2, \ldots$, n'ayant pas de points de discontinuité communs, on aura, en adoptant la notation de Cauchy,

$$\mathcal{E}((w_1 w_2 w_3 \cdots)) = \mathcal{E}((w_1)) w_2 w_3 \cdots + \mathcal{E} w_1 ((w_2)) w_3 \cdots$$
$$+ \mathcal{E} w_1 w_2 ((w_3)) \cdots + \cdots.$$

§ III.

Représentation d'une fonction sous forme de résidu. — Théorèmes de Cauchy et de Laurent.

144. Soit $f(z)$ une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et soit c un point quelconque de l'intérieur de cette aire. La fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-c}$$

sera uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c. Donc l'intégrale $\int F(z)dz$, prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, se réduira à l'intégrale de la même fonction, prise autour du point c. Or, on a

$$\int_c F(z)dz = 2\pi i . \mathcal{E}_c F(z) = 2\pi i . \lim . (z-c) F(z),$$

pour $z = c$. Il est clair que

$$\lim (z-c) F(z) = \lim f(z) = f(c).$$

On aura donc l'équation fondamentale

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-c} dz = \mathcal{E}_c \frac{f(z)}{z-c},$$

ou, en substituant (n° 138) le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ au contour infinitésimal tracé autour du point c,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{z-c} dz = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{z-c}.$$

On conclut de là le théorème suivant :

Si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue

de l'aire $\mathfrak{A}$, et z un point quelconque de l'intérieur de cette aire, la valeur de $f(z)$ en ce point est égale à la valeur du résidu de la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ relatif au point z, de sorte qu'on a

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \mathcal{E}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

145. La fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur tout le contour de $\mathfrak{A}$, non seulement par rapport à la variable ζ, mais encore par rapport à la variable z, c'est-à-dire qu'elle varie d'une manière continue, lorsque le point z se déplace d'une manière continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On peut donc la différentier par rapport à z, ce qui donne

$$D_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

$$\frac{1}{2!} D_z^2 \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3},$$

et, en général,

$$\frac{1}{n!} D_z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

On voit que toutes ces dérivées sont également continues tout le long du contour de $\mathfrak{A}$.

146. Cela posé, soit $F(\zeta, z)$ une fonction des variables ζ et z, continue par rapport à chacune d'elles tout le long du contour de $\mathfrak{A}$. L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} F(\zeta, z)\, d\zeta$$

sera généralement une fonction de z, que nous désignerons par $\psi(z)$. Si l'on change z en $z + dz$, on aura

$$\psi(z + dz) = \int_{\mathfrak{A}} F(\zeta, z + dz)d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\psi(z+dz)-\psi(z)}{dz}=\int_{\mathfrak{A}}\frac{F(\zeta,z+dz)-F(\zeta,z)}{dz}\,d\zeta.$$

Si l'on suppose maintenant dz infiniment petit, il viendra, à la limite,

$$D_z\psi(z)=\int_{\mathfrak{A}}D_zF(\zeta,z).d\zeta,$$

ce qui montre que la règle ordinaire de la différentiation sous le signe $\int$ s'applique aux intégrales prises le long d'un contour fermé, pourvu que la fonction sous le signe $\int$ et sa dérivée $D_zF(\zeta,z)$ par rapport au paramètre z restent l'une et l'autre finies tout le long de ce contour.

Il résulte de là qu'on peut aussi différentier sous le signe $\mathcal{L}$, de sorte que l'on aura

$$D_z\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}F(\zeta,z)=\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}D_zF(\zeta,z),$$

et que, si z est le point de discontinuité de la fonction $F(\zeta,z)$,

$$D_z\mathcal{L}_zF(\zeta,z)=\mathcal{L}_zD_zF(\zeta,z).$$

En appliquant cette formule à la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, on tirera des équations (1) et (2) les relations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
f'(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\mathcal{L}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2},\\
\frac{f''(z)}{2!}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^3}=\mathcal{L}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{f^{(n)}(z)}{n!}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}=\mathcal{L}_z\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}.
\end{aligned}\right.$$

147. Ces relations conduisent d'abord à une conséquence importante. Les fonctions sous le signe $\int$, dans les seconds membres des formules (3), étant toutes finies et continues, toutes les fois que z est un point de l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, les intégrales auront toutes des valeurs finies. Donc toutes les dérivées de $f(z)$ sont des quantités finies.

Il s'ensuit de là qu'elles sont aussi continues. Car $f^{(n+1)}(z)$ étant une quantité finie, l'accroissement

$$f^{(n)}(z+dz)-f^{(n)}(z)=\left[f^{(n+1)}(z)+\varepsilon\right]dz$$

(ε désignant un infiniment petit) sera infiniment petit en même temps que dz, d'où l'on conclut que la fonction $f^{(n)}(z)$ est continue. Il en sera de même, dès lors, pour toutes les dérivées précédentes.

Donc, *si une fonction est uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, toutes les dérivées de la fonction seront aussi des fonctions uniformes et continues dans toute l'étendue de la même aire.*

Il en sera de même aussi (nº 107, *remarque*) pour toutes les dérivées partielles de la partie réelle et de la partie imaginaire de $f(z)$.

148. Soient W et w deux fonctions quelconques de z, uniformes et continues l'une et l'autre dans l'aire $\mathfrak{A}$. Il en sera de même de leurs dérivées, et, par suite, du produit

$$W.\mathrm{D}_z w.$$

Donc *l'intégrale*

$$\int_{\mathfrak{A}}^{\circ} W.\mathrm{D}_z w.dz=\int_{\mathfrak{A}}^{\circ} Wdw,$$

prise le long du contour de l'aire, est nulle.

149. Soit c un point de l'aire $\mathfrak{A}$. De l'identité

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}\\&=\frac{1}{\zeta-c}+\frac{z-c}{(\zeta-c)^2}+\cdots+\frac{(z-c)^{n-1}}{(\zeta-c)^n}+\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^n(\zeta-z)}\end{aligned}$$

on tire, en multipliant par $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)\,d\zeta$, et intégrant tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$,

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{\circ}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\\&=A_0+A_1(z-c)+A_2(z-c)^2+\cdots+A_{n-1}(z-c)^{n-1}+\Omega_n,\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - c} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - c},$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - c)^2} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^2},$$

. . . .

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - c)^n} = \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^n},$$

et

(5) $$\Omega_n = \frac{1}{2\pi i}\cdot(z-c)^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta)}{(\zeta - c)^n(\zeta - z)}.$$

Des équations (2) et (3), il résulte que l'on a

(6) $$A_0 = f(c), \quad A_1 = \frac{f'(c)}{1}, \ldots, A_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}.$$

Donc

(7) $$f(z) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(z-c) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

et c'est dans cette relation que consiste le THÉORÈME DE CAUCHY, qui contient comme cas particulier celui de Taylor.

Si le terme complémentaire Ω_n est infiniment petit pour n infini, la formule (4) ou (7) donne alors le développement de la fonction $f(z)$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$. Cette série coïncide avec la série de Taylor dans le cas particulier de z et de c réels.

150. Supposons que l'aire $\mathfrak{A}$, à l'intérieur de laquelle la fonction $f(z)$ reste uniforme et continue, soit un cercle de rayon R, décrit du centre c, et posons

$$\zeta - c = Re^{i\varphi},$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{\zeta - c} = id\varphi.$$

On aura alors

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\varphi,$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-i\varphi}\, d\varphi,$$

. . . .

$$A_{n-1} = \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-(n-1)i\varphi}\, d\varphi,$$

où il faudra remplacer ζ par $c+Re^{i\varphi}$. En faisant, de plus,

$$z-c = re^{i\psi},$$

on aura

$$\Omega_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{ni\psi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{e^{ni\varphi}\,(\zeta - z)}.$$

Dans cette intégrale, la quantité sous le signe $\int$ est finie en tout point du contour, puisque le point z est intérieur à l'aire. Donc l'intégrale a toujours une valeur finie. D'autre part, le facteur $\left(\frac{r}{R}\right)^n$, en dehors du signe $\int$, est infiniment petit pour n infini, puisque, pour tout point z intérieur au cercle, on a $r < R$. Donc Ω_n est infiniment petit pour n infini. De là ce théorème :

Pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$, il suffit que le point z soit intérieur à un cercle décrit du point c comme centre, avec un rayon tel que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue en tout point intérieur à ce cercle.

En d'autres termes, *il suffit que le module de $z-c$ soit inférieur à la distance du point c au point le plus voisin de c, pour lequel la fonction cesse d'être uniforme et continue.*

Le cercle décrit du centre c et passant par le point de discontinuité le plus voisin, s'appelle le *cercle de convergence* de la série.

151. Supposons maintenant que l'on donne les valeurs de la fonction pour une suite continue de points formant un élément, superficiel ou linéaire, aussi petit que l'on voudra, et soient $c, c', c'', \ldots$ des points de cet élément infiniment voisins.

La dérivée d'une fonction de z étant indépendante de la direction de l'accroissement infiniment petit de z qui entre dans le rapport différentiel, on peut toujours supposer que les accroissements de z ont lieu sur l'élément considéré. On connaîtra dès lors, pour $z = c$, les valeurs de la fonction et de ses dérivées d'ordre quelconque,

$$f(c),$$

$$f'(c) = \lim \frac{f(c') - f(c)}{c' - c}, \quad f'(c') = \lim \frac{f(c'') - f(c')}{c'' - c'},$$

$$f''(c) = \lim \frac{f'(c') - f'(c)}{c' - c}, \text{ etc.}$$

En appliquant la formule (5), on obtiendra le développement de la fonction suivant les puissances de $z - c$, pour toutes les valeurs de z renfermées dans le cercle de convergence décrit du centre c.

Prenons actuellement pour nouveau centre un point c_1, intérieur au cercle $\mathfrak{C}$, mais aussi voisin que l'on voudra de la circonférence de ce cercle, et décrivons de ce centre c_1 un nouveau cercle de convergence $\mathfrak{C}_1$, qui comprendra, en général, des points extérieurs au cercle $\mathfrak{C}$. On obtiendra ainsi, pour tous les points intérieurs à $\mathfrak{C}_1$, un développement suivant les puissances entières et positives de $z - c_1$.

En prenant de même, pour nouveau centre, un point c_2 intérieur à $\mathfrak{C}_1$, on décrira de ce point un nouveau cercle de convergence $\mathfrak{C}_2$, qui comprendra une nouvelle portion de plan, et l'on pourra, à l'intérieur de $\mathfrak{C}_2$, développer la fonction suivant les puissances de $z - c_2$.

En continuant de cette manière, on pourra embrasser, dans l'ensemble de ces cercles, passant entre les points de discontinuité, tous les points z du plan que l'on voudra, et alors, pour chacun de ces points, on aura un développement de la fonction donnée en série convergente. On aura même plusieurs développements pour les points qui seront intérieurs à la fois à plusieurs cercles de convergence.

On déduit de là ce théorème : *Si une fonction $f(z)$ doit rester uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ (sauf pour certains points désignés, où elle peut devenir discontinue), cette fonction sera complètement déterminée dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, dès que l'on connaîtra les valeurs qu'elle prend en tous*

points d'un élément fini quelconque, superficiel ou linéaire, situé dans cette aire, et aussi petit que l'on voudra.

152. Si la fonction $f(z)$ doit rester constante dans l'élément considéré, alors, en désignant encore par c, c', c'', ... des points consécutifs pris sur cet élément, on aura $f(c') = f(c)$, d'où

$$f'(c) = \lim \frac{f(c') - f(c)}{c' - c} = 0,$$

et de même

$$f'(c') = 0,$$

ensuite

$$f''(c) = \lim \frac{f'(c') - f'(c)}{c' - c} = 0\ ,$$

puis, de la même manière,

$$f'''(c) = 0, \quad f^{\text{IV}}(c) = 0, \ldots,$$

et ainsi de suite, aussi loin qu'on voudra.

Si l'on prend maintenant le point c pour centre du cercle de convergence renfermé dans l'aire $\mathfrak{A}$ considérée, la formule de développement (7) se réduira à

$$f(z) = f(c) + \Omega_n,$$

quelque grand que soit n; et comme Ω_n est infiniment petit pour n infini, il en résulte que l'on a rigoureusement

$$f(z) = f(c) = \text{constante},$$

dans toute l'étendue du cercle de convergence.

En raisonnant maintenant comme au n° 151, on étendra successivement la démonstration à toute l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc *une fonction uniforme et continue à l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$ ne peut rester constante sur un élément fini quelconque, superficiel ou linéaire, situé dans cette aire et aussi petit que l'on voudra, à moins que cette fonction ne se réduise à une constante dans toute l'étendue de l'aire.*

Il en résulte immédiatement que deux fonctions uniformes et continues ne peuvent être égales sur un élément fini sans l'être dans toute l'aire.

153. Dans l'évaluation des intégrales qui représentent les coefficients (n° 150), on peut substituer au contour du cercle de convergence celui d'un cercle de même centre et de rayon moindre, et la valeur d'un coefficient quelconque

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+Re^{i\varphi})\,d\varphi}{R^n e^{in\varphi}}$$

n'en sera pas altérée. On voit donc que cette intégrale est indépendante de la valeur du module R, tant que ce module n'atteint pas le rayon du cercle de convergence.

154. *Théorème de Laurent.* Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue dans l'espace annulaire renfermé entre les contours de deux aires $\mathfrak{A}$ et a, intérieurs l'un à l'autre. Si l'on parcourt les deux contours dans le sens direct relativement aux deux aires $\mathfrak{A}$ et a, comprises dans l'intérieur de ces contours, le sens direct pour l'aire a sera le sens rétrograde pour le contour intérieur de l'aire à connexion double $\mathfrak{A}-\mathrm{a}$, et l'on aura

$$\int_{\mathfrak{A}-\mathrm{a}} = \int_{\mathfrak{A}} - \int_{\mathrm{a}}.$$

Si donc z est un point de l'aire annulaire $\mathfrak{A}-\mathrm{a}$, nous aurons

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\mathrm{a}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right),$$

d'où, en différentiant par rapport à z,

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} - \int_{\mathrm{a}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right).$$

155. Supposons maintenant que les deux contours soient deux cercles, de centre commun c, et de rayons R et r. Nous aurons identiquement

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\zeta\left[1 + \frac{z-c}{\zeta - c} + \cdots + \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{n-1} + \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n-1}(\zeta-z)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[A_0 + A_1(z-c) + \cdots + A_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n\right],$$

en posant toujours, pour $\zeta = c + Re^{i\varphi}$.

(2) $$A_k = \frac{1}{2\pi K^k}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-ki\varphi}\, d\varphi,$$

(3) $$\Omega_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{ni\varphi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{e^{ni\varphi}\,(\zeta - z)} \cdot$$

Pour la seconde intégrale de la formule (1), on a identiquement

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-c)-(\zeta-c)}$$
$$= -\left[\frac{1}{z-c} + \frac{\zeta - c}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-c)^{m-1}}{(z-c)^m} + \frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m\,(z-\zeta)}\right],$$

d'où, en faisant

$$\zeta - c = \mathbf{r} e^{i\varphi},$$
$$d\zeta = i(\zeta - c)\, d\varphi,$$

il vient

$$-\int_a \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\varphi\left[\frac{\zeta-c}{z-c} + \frac{(\zeta-c)^2}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m}\right]$$
$$= 2\pi i\left[\frac{A_{-1}}{z-c} + \frac{A_{-2}}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{A_{-m}}{(z-c} + \omega_m\right],$$

en posant, pour $\zeta = c + \mathbf{r} e^{i\varphi}$,

(4) $$A_{-k} = \frac{\mathbf{r}^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{ki\varphi}\, d\varphi,$$

(5) $$\omega_m = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)^m e^{-mi\varphi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, e^{mi\varphi}\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Le point $z = re^{i\varphi} + c$ étant situé extérieurement au cercle de rayon $\mathbf{r}$, on a $\frac{\mathbf{r}}{r} < 1$, et on en conclura, comme on l'a déjà fait pour l'expression de Ω_n, que ω_m est infiniment petit pour m infini.

Donc, si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'aire comprise entre deux cercles de centre commun c et de rayons $\mathbf{r}$ et R, la fonction sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z - c$, et dans laquelle le coefficient $A_{\pm k}$ de la puissance, positive ou négative, $(z - c)^{\pm k}$ est déterminé par les formules (2) et (4).

Remarquons que l'on peut réduire ces deux formules à une seule. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^{k+1}}$$

est la même, quel que soit le contour fermé (tracé à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}-\mathbf{a}$ et n'entourant qu'une seule fois le cercle $\mathbf{a}$) le long duquel on prenne cette intégrale. On peut donc la prendre indifféremment soit le long du cercle extérieur, soit le long du cercle intérieur, soit le long d'un cercle intermédiaire quelconque de rayon ρ. D'après cela, on pourra, dans les formules (2) et (4), remplacer R et $\mathbf{r}$ par ρ, et l'on aura alors, pour toute valeur positive, nulle ou négative de l'indice k,

(6) $$A_k = \frac{1}{2\pi\rho^k}\int_0^{2\pi} f(c+\rho e^{i\varphi})\, e^{-ki\varphi}\,d\varphi.$$

156. Si la fonction $f(\zeta)$ était uniforme et continue en tout point de l'aire du cercle intérieur, il en serait de même de la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, pour toute valeur de z intérieure à ce cercle. Donc alors la seconde intégrale de la formule (1),

$$\int_{\mathbf{a}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

s'évanouirait, et avec elle la partie du développement qui contient les puissances négatives de $z-c$. On retomberait alors sur le théorème de Cauchy.

Si l'on suppose, au contraire, la fonction $f(z)$ uniforme et continue pour tous les points en dehors du cercle intérieur, on pourra supposer le rayon R du cercle extérieur infini. Mais alors, dans l'expression (3) de Ω_n (n° 155), $f(\zeta)$ convergeant vers une valeur nulle ou finie, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}(\zeta-z)}$$

ne deviendra pas infinie, tandis que le facteur $\left(\frac{\mathbf{r}}{R}\right)^n$ tendra vers zéro. Donc Ω_n sera nul, quel que soit n, et en particulier pour

$n = 1$. Donc la partie de la série correspondante aux puissances positives de $z-c$ se réduira à son premier terme

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\varphi,$$

lequel s'annulera lui-même, si $f(\infty) = 0$. Alors le développement ne contiendra que des puissances négatives de $z-c$.

157. Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)},$$

où l'on suppose $\mod a < \mod b$. Si l'on décrit deux cercles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ayant pour centre l'origine, et passant par les points a et b $f(z)$ sera uniforme et continue dans l'intérieur du cercle $\mathfrak{A}$. Elle sera donc développable, pour toute valeur de z intérieure à ce cercle, en une série ordonnée suivant les puissances positives de z.

Dans l'intervalle des deux cercles, la fonction sera développable, par le théorème de Laurent, en une série contenant à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z.

Enfin, pour une valeur de z extérieure au cercle $\mathfrak{B}$, la fonction $f(z)$ sera uniforme et continue, quelque grand que soit le module de z. Le développement ne contiendra donc plus que des puissances négatives de z, le terme constant étant nul, puisque $f(\infty)$ a pour valeur zéro.

158. Le théorème de Laurent est un cas particulier d'une formule plus générale.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ les points de discontinuité de la fonction uniforme $f(z)$, renfermés dans l'aire $\mathfrak{A}$, et supposons que l'on ait tracé dans cette aire un cercle $\mathfrak{C}$ (*fig.* 31), de centre quelconque c, qui renferme dans son intérieur tous ces points de discontinuité. Décrivons, de plus, de ces points comme centres, des cercles $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\mu$, assez petits pour être tous extérieurs les uns aux autres et intérieurs au cercle $\mathfrak{C}$.

La fonction $f(z)$ sera uniforme et continue dans tout l'espace

Fig. 31.



$$\Gamma = \mathfrak{C} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_\mu)$$

compris entre tous ces cercles, et si c désigne un point quelconque de cet espace Γ, il viendra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or, on aura, comme au n° 154,

$$\int_\Gamma = \int_\mathfrak{C} - \left(\int_{\mathfrak{C}_1} + \int_{\mathfrak{C}_2} + \cdots + \int_{\mathfrak{C}_\mu}\right).$$

De plus, dans $\int_\mathfrak{C}$, le module de $\zeta - c$ étant plus grand que celui de $z - c$, on en conclura, comme au n° 149,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\mathfrak{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = A_0 + A_1(z-c) + \cdots + A_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

Ω_n étant infiniment petit pour n infini, et chaque coefficient A_k étant donné par la formule

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\mathfrak{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^{k+1}}.$$

Dans $\int_{\mathfrak{C}_k}$, au contraire, le module de $\zeta - c_k$ étant plus petit que celui de $z - c_k$, on en conclura, comme au n° 155,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{A_1^{(k)}}{z - c_k} + \cdots + \frac{A_m^{(k)}}{(z-c_k)^m} + \omega_m,$$

ω_m étant infiniment petit pour m infini, et chaque coefficient $A_k^{(k)}$ donné par la formule

$$A_k^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\mathfrak{C} f(\zeta)(\zeta - c_k)^{k-1}d\zeta.$$

Comme on peut prendre les rayons des cercles $\mathfrak{C}_k$ aussi petits que l'on voudra, il s'ensuit que, pour tout point z, pris à l'intérieur du

cercle $\mathfrak{C}$, et autre que les points de discontinuité, on pourra développer la fonction en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$, et suivant les puissances entières et négatives des différences

$$z-c_1\,,\quad z-c_2\,,\ldots,z-c_\mu\,;$$

de sorte que l'on obtiendra un développement de la forme

$$\begin{aligned} f(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots \\ + \frac{A'_1}{z-c_1} + \frac{A'_2}{(z-c_1)^2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{A_1^{(\mu)}}{z-c_\mu} + \frac{A_2^{(\mu)}}{(z-c_\mu)^2} + \cdots \end{aligned}$$

159. Les théorèmes précédents peuvent s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Soit une fonction $f(z\,,z')$ des variables z, z', uniforme et continue par rapport à chacune de ces variables dans l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$. En appliquant la formule du n° 144, on aura

$$f(z,z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta,z')}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

On a d'ailleurs, d'après la même formule,

$$f(\zeta,z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta,\zeta')}{\zeta'-z'}\,d\zeta'$$

Donc

$$f(z\,,z') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathfrak{A}}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta\,,\zeta')}{(\zeta-z)(\zeta'-z')}\,d\zeta d\zeta'\,.$$

On étendrait de même la formule au cas d'un nombre quelconque de variables.

On en tirerait ensuite la généralisation du théorème de Taylor pour le cas de plusieurs variables.

CHAPITRE III.

ÉTUDE D'UNE FONCTION UNIFORME DANS LE VOISINAGE DES POINTS OU ELLE DEVIENT NULLE OU INFINIE.

§ I[er].

Indice d'une fonction en un point donné.

160. Soit $f(z)$ une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et n'ayant dans toute cette aire qu'un seul *zéro*, pour $z = c$. Si l'on désigne par μ un nombre entier quelconque, l'expression

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{\mu}}$$

sera uniforme et continue dans toute l'aire, excepté peut-être au point c. Si μ est très-petit, ce rapport pourra s'annuler en c; si μ est très-grand, il pourra devenir infini.

La fonction $f(z)$ étant uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, on pourra développer $f(z)$ comme au n° 149, et l'on aura

$$f(z) = A_0 + A_1(z-c) + \cdots + A_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

en posant

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!},$$

$$\Omega_n = \frac{1}{2\pi i}(z-c)^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^n(\zeta-z)}.$$

Le premier terme,

$$A_0 = f(c),$$

est nul, par hypothèse. Il peut se faire que quelques-uns des coefficients suivants,

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots,$$

s'annulent également. Mais il y aura nécessairement quelqu'un de

ces coefficients qui différera de zéro, sans quoi $f(z)$, se réduisant à Ω_n, quel que fût n, serait infiniment petit pour n infini, ce qui veut dire que cette fonction ne pourrait avoir qu'une valeur rigoureusement nulle pour tout point de l'intérieur du cercle, et par suite de l'aire $\mathfrak{A}$ tout entière.

Soit A_m le premier coefficient qui ne s'annule pas, ou, ce qui revient au même, soit $f^{(m)}(c)$ le premier terme de la suite

$$f(c), \quad f'(c), \quad f''(c), \ldots,$$

qui soit différent de zéro. On pourra alors écrire

$$f(z) = \Omega_m = A_m(z-c)^m + \Omega_{m+1},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-c)^m \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^m(\zeta-z)} \\ &= A_m(z-c)^m + (z-c)^{m+1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^{m+1}(\zeta-z)}. \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z-c)^m} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^m(\zeta-z)} \\ &= A_m + (z-c)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{m+1}(\zeta-z)}. \end{aligned}$$

La première expression montre que la valeur de la quantité $\dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$ est finie, quel que soit le point z pris à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

La seconde expression montre que cette valeur se réduit à A_m pour $z=c$; par conséquent cette valeur n'est pas nulle pour $z=c$.

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, ayant un seul zéro au point c, il existera une certaine puissance,* ENTIÈRE ET POSITIVE,

$$(z-c)^m,$$

de la différence $z-c$, telle que la limite du rapport

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m}$$

pour $z=c$, sera finie et différente de zéro; d'où il suivra que la fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = E(z)$$

sera uniforme, continue et différente de zéro pour tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$.

L'exposant m est l'indice de la première des dérivées

$$f'(z),\quad f''(z),\ldots,$$

qui ne s'annule pas avec $f(z)$ pour $z=c$.

On voit que, dans cette hypothèse, la fonction $f(z)$ pourra toujours se mettre sous la forme

$$f(z) = (z-c)^m E(z),$$

$E(z)$ étant une fonction de z uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

161. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et qu'elle soit continue en chaque point de cette aire, excepté au point $z=c$, où elle présente un infini de première espèce. Alors, d'après ce que nous avons vu (n° 113), la fonction $\frac{1}{f(z)}$ sera uniforme et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et ne s'annulera qu'au point $z=c$. Donc, en vertu de ce qui vient d'être dit, on pourra poser

$$\frac{1}{f(z)} = (z-c)^m (Fz),$$

$F(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$; et, comme la fonction réciproque

$$\frac{1}{F(z)} = E(z)$$

jouit évidemment des mêmes propriétés, il en résulte que la fonction proposée pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = (z-c)^{-m} E(z),$$

m étant un nombre entier et positif, et $E(z)$ une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Enfin, si la fonction $f(z)$ est elle-même uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, on pourra la mettre, par analogie, sous la forme

$$f(z) = (z-c)^0 E(z),$$

c étant un point quelconque de l'aire.

162. Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$, et si elle est continue et différente de zéro en tout point de cette aire, excepté au seul point c, où cette fonction peut devenir nulle ou infinie (de première espèce), cette fonction pourra, dans toute l'étendue de l'aire, se mettre sous la forme*

$$f(z) = (z-c)^m E(z),$$

$E(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro en chaque point de $\mathfrak{A}$ sans exception, et m étant un nombre ENTIER, *positif, négatif ou nul, suivant que $f(c)$ sera nul, ou infini, ou fini et différent de zéro.*

Ce nombre m s'appelle l'*indice* de la fonction $f(z)$ au point c.

On voit que l'indice d'une fonction exprime l'ordre infinitésimal de cette fonction au point considéré c, où cet ordre peut être différent de zéro dans l'aire $\mathfrak{A}$.

La valeur de $E(z)$, en un point z infiniment voisin de c, étant infiniment peu différente de $E(c)$, il s'ensuit de là que, dans le voisinage de c, les deux fonctions

$$f(z) \qquad \text{et} \qquad (z-c)^m E(c)$$

ont pour limite de rapport l'unité. C'est ce que l'on exprime en disant que $f(z)$, *dans le voisinage du point c, varie comme la fonction $(z-c)^m E(c)$; ou encore qu'il varie proportionnellement à $(z-c)^m$.*

163. De l'équation $f(z) = (z-c)^m E(z)$ on tire

$$f'(z) = (z-c)^{m-1}\left[(z-c)E'(z) + mE(z)\right],$$

et comme $E'(z)$ est fini et continu dans le voisinage de c (n° 147), cette expression pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = (z-c)^{m-1} E_1(z),$$

$E_1(z)$ ne devenant ni nul ni infini pour $z = c$. Donc *l'indice de la dérivée d'une fonction qui devient nulle ou infinie en un point c est égal à l'indice de la fonction diminué d'une unité.*

Cette règle ne s'appliquerait plus si l'indice m était 0.

Il résulte de là que, *si une fonction est infinie en un point c, toutes ses dérivées successives sont infinies au même point.*

164. Comme toute fonction rationnelle se forme au moyen des trois opérations d'addition (comprenant la soustraction), de multiplication et de division, il suffit, pour avoir l'indice d'une fonction rationnelle, en un point, de connaître les indices en ce point des différentes fonctions dont elle est composée.

Soient f_1, f_2 deux fonctions d'indices m_1, m_2 au point c, continues et différentes de zéro en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$; et a_1, a_2 deux constantes qui ne sont ni nulles ni infinies. La fonction

$$F = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

pourra, suivant ce que nous venons de voir, se mettre sous la forme

$$F = a_1 (z-c)^{m_1} E_1 + a_2 (z-c)^{m_2} E_2,$$

E_1, E_2 étant deux fonctions continues et différentes de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Soit maintenant μ un nombre entier et fini quelconque, tel qu'aucune des deux sommes $\mu + m_1$, $\mu + m_2$ ne soit négative. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(z-c)^{\mu}$, il vient

$$(z-c)^{\mu} F = z_1 (z-e)^{\mu+m_1} E_1 + a_2 (z-c)^{\mu+m_2} E_2.$$

Chacun des deux termes du second membre étant une fonction uniforme et continue dans le voisinage du point c, il en sera évidemment de même du premier membre

$$(z-c)^{\mu} F.$$

Or, ce produit est lui-même d'un certain ordre ν ; de sorte que l'on a, ν étant entier, et G désignant une fonction uniforme, continue et différente de zéro,

$$(z-c)^{\mu} F = (z-c)^{\nu} G .$$

Donc

$$F = (z-c)^{\nu-\mu} G,$$

et par suite F est une quantité de l'ordre entier, positif, nul ou négatif, $\nu - \mu$.

La fonction F, si $\nu - \mu > 0$, ou son inverse $\frac{1}{F}$, si $\nu - \mu < 0$, sera continue dans le voisinage de c. Donc le point c est un infini de l'une des deux fonctions F, $\frac{1}{F}$, et l'autre sera alors finie et continue dans le voisinage de c. Donc la fonction F sera continue, ou du moins elle n'aura que des infinis de première espèce (1).

165. Les fonctions

$$\varphi = f_1 \cdot f_2, \qquad \chi = \frac{f_1}{f_2},$$

pourront s'écrire sous la forme

$$\varphi = (z-c)^{m_1+m_2} E_1 . E_2 ,$$
$$\chi = (z-c)^{m_1-m_2} \frac{E_1}{E_2} .$$

$E_1 . E_2$ et $\frac{E_1}{E_2}$ étant des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro en tout point de $\mathfrak{A}$, φ et χ auront pour indices respectifs, au point c, $m_1 + m_2$ et $m_1 - m_2$. En tout autre point de $\mathfrak{A}$, φ et χ seront continues et différentes de zéro. Ces fonctions présenteront donc le même caractère que f_1 et f_2, d'être uniformes et continues dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, à l'exception du point c, où elles peuvent avoir un *infini*.

---

(1) F pourrait s'annuler en d'autres points de $\mathfrak{A}$ que le point c. On dirait pour ces points ce qu'on vient de dire pour le point c. Les zéros de F, autres que le point c, seront nécessairement isolés les uns des autres, comme cela résulte de ce que nous avons vu (n° 152), à moins que la fonction F ne se réduise identiquement à zéro.

166. Le caractère des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro, à l'exception d'un nombre limité de zéros et d'infinis isolés, ne se perd donc pas, lorsque l'on combine les fonctions par addition, multiplication ou division, de manière à en former une fonction rationnelle quelconque.

En particulier, si l'on considère une fonction de la forme

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_k}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k},$$

les indices des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$, au point c, étant

$$m_1, m_2, \ldots, m_k,$$

et ceux des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ au même point étant

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k,$$

l'indice, en ce même point, de la fonction proposée sera

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k).$$

§ II.

Développement en série d'une fonction uniforme en tout point d'une aire donnée, à l'exception d'un certain nombre d'infinis de première espèce.

167. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des points isolés, pris à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des entiers positifs quelconques. La fonction

$$(1) \qquad F = (z - c_1)^{m_1}(z - c_2)^{m_2} \ldots (z - c_k)^{m_k}$$

sera uniforme et continue en tout point de $\mathfrak{A}$, et ne s'annulera qu'aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Elle n'aura donc aucun infini, mais seulement des zéros isolés en ces points c. Donc l'indice de cette fonction sera positif aux points c, nul dans tout le reste de l'aire.

Si l'on pose

$$F = (z - c_1)^{m_1} E,$$

il est clair que E sera une fonction uniforme et continue dans toute l'aire $\mathfrak{A}$, et restera différente de zéro dans le voisinage du point c_1. Donc m_1 sera l'indice de F au point c_1. Pareillement, $m_2, \ldots, m_k$ seront les indices de F aux autres points-zéros $c_2, \ldots, c_k$.

Soit maintenant $f = f(z)$ une fonction quelconque, uniforme dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et continue dans cette même étendue, excepté aux k points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, où elle devient infinie. Les indices de f en ces points seront des entiers négatifs,

$$-n_1, -n_2, \ldots, -n_k.$$

En tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$, l'indice de f sera nul ou positif.

Si l'on considère le produit

$$\varphi = F.f,$$

ce produit sera uniforme et continu en tout point de $\mathfrak{A}$ autre que les points c. En un point c, l'indice de ce produit sera $m - n$. En tout autre point, l'indice sera égal à celui de f, et, par suite, nul ou positif.

Si donc on prend les indices $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivement égaux à $n_1, n_2, \ldots, n_k$, les indices du produit φ aux points $c_1, c_2, \ldots c_k$, seront tous nuls, et, par suite, la fonction φ sera finie et continue en ces points c, comme en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$.

. Donc, si la fonction f est discontinue seulement aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, et que les indices correspondants soient $-n_1$, $-n_2, \ldots, -n_k$, le produit

$$\varphi = (z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2} \ldots (z-c_k)^{n_k} f(z)$$

sera une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

On pourra développer cette fonction par le théorème de Cauchy dans l'intérieur d'un cercle tracé dans l'aire $\mathfrak{A}$ autour d'un centre quelconque γ, et l'on aura ainsi

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots,$$

en posant

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(z)dz}{(z-\gamma)^{k+1}} = \mathcal{E}_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-\gamma)^{k+1}}.$$

On a par conséquent, dans l'intérieur du même cercle,

$$f(z) = \frac{A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}}.$$

168. Cette formule nous donne le moyen de calculer le résidu de la fonction $f(z)$ relatif à un de ses points de discontinuité c, d'indice quelconque n. Mettons, en effet, la fonction proposée sous la forme

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-c)^n},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans le voisinage du point c. On aura alors, dans l'intérieur d'un contour $\mathfrak{A}$, suffisamment restreint, autour du point c,

$$\varphi(z)=A_0+A_1(z-c)+A_2(z-c)^2+\cdots,$$

où l'on a posé (n° 149)

$$A_h=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^{h+1}}=\frac{\varphi^{(h)}(c)}{h!}.$$

On en tire

$$f(z)=\frac{A_0}{(z-c)^n}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{z-c}+A_n+\cdots,$$

ce qui donne le développement de $f(z)$ suivant les puissances entières, positives et négatives, de $z-c$. Or, d'après ce que nous avons démontré (n° 141), le résidu de $f(z)$ relatif au point c est le coefficient A_{n-1} de $\dfrac{1}{z-c}$ dans ce développement. On a donc

$$\mathcal{E}_c f(z)=A_{n-1}=\frac{\varphi^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon^{n-1}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right].$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans le voisinage du point de discontinuité c, et que n soit l'indice de la fonction en ce point, le résidu de la fonction relatif au point c sera donné par la formule*

$$\mathcal{E}_c f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz=\lim_{\varepsilon=0}\frac{D_\varepsilon^{n-1}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right]}{(n-1)!},$$

laquelle comprend comme cas particulier la formule du n° 140, correspondante à $n=1$.

§ III.

Expression de l'indice d'une fonction au moyen d'un résidu.

169. Soit $f(z)$ une fonction uniforme, continue et différente de zéro en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c.

Si m est l'indice de $f(z)$ au point c, et que l'on mette $f(z)$ sous la forme

$$(z-c)^m . E,$$

la fonction E et sa valeur réciproque $\frac{1}{E}$ seront l'une et l'autre uniformes et continues en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc (n° 148)

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{E} dE = 0 .$$

Si l'on remplace maintenant E par sa valeur $\frac{f}{(z-c)^m}$, il vient

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{(z-c)^m}{f} \left(\frac{df}{(z-c)^m} - mf . \frac{dz}{(z-c)^{m+1}} \right) = 0 .$$

ou

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = m \int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c} .$$

Or, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c}$ a pour valeur $2\pi i$. Donc, la formule précédente devient

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{df}{f} = \mathcal{E}_c \frac{\mathrm{D}_z f}{f} .$$

ou, ce qui est la même chose,

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_c d \log f = \mathcal{E}_c \, \mathrm{D}_z \log f .$$

Donc, *l'indice d'une fonction f en un point c est égal au résidu de la fonction*

$$\frac{\mathrm{D}_z f}{f} = \mathrm{D}_z \log f$$

relatif au point c, ou, ce qui revient au même, relatif à une aire

quelconque qui ne renferme pas d'autre zéro ou d'autre infini que le point c.

170. Supposons maintenant qu'au lieu d'un seul point c, zéro ou infini, la fonction f ait, à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, k zéros ou infinis,

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_k;$$

et que cette fonction soit uniforme, continue et différente de zéro dans tout le reste de cet aire.

En appliquant à ces divers points ce que nous venons de dire, on aura, pour valeurs de leurs indices respectifs,

$$m_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c_1} \mathrm{D}_z \log f,$$

$$m_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c_2} \mathrm{D}_z \log f,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si c désigne, au contraire, un point quelconque qui ne soit ni un zéro ni un infini, et pour lequel la fonction reste finie et ne s'annule pas, on aura pour l'indice de ce point,

$$m = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{c} \mathrm{D}_z \log f.$$

171. Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont les différents points de l'aire $\mathfrak{A}$ pour lesquels la fonction f devient nulle ou infinie, la somme des indices de la fonction f en ces divers points n'est autre chose que la somme des résidus de la fonction $\frac{\mathrm{D}_z f}{f}$ dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire le *résidu intégral* de cette fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, de sorte qu'on a

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{df}{f} = \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \mathrm{D}_z \log f.$$

Ainsi le résidu intégral de la fonction

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{D}_z \log f(z),$$

relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, exprime la somme des indices de la fonction

$f(z)$ aux différents points de cette aire pour lesquels la fonction devient nulle et infinie.

Cette somme

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

s'appelle l'*indice intégral* de la fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$.

L'indice de la fonction étant nul pour tout point qui n'est ni un zéro ni un infini, on peut, sans changer la somme précédente, y introduire la somme des indices de tous les points autres que les zéros et les infinis. On pourra ainsi considérer l'indice intégral comme la somme des indices de la fonction relatifs à *tous les points* de l'aire $\mathfrak{A}$.

172. Considérons maintenant les racines des deux équations

$$f(z) = 0, \qquad f(z) = \infty.$$

Si l'on regarde l'indice de la fonction $f(z)$ en un point c comme le degré de multiplicité de la racine c, pris positivement s'il s'agit d'une racine de l'équation $f(z) = 0$, négativement s'il s'agit d'une racine de l'équation $f(z) = \infty$; l'indice intégral

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

représentera l'excès du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ sur le nombre des racines de l'équation $f(z) = \infty$, dans l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$. En d'autres termes, M sera égal au nombre des zéros de la fonction $f(z)$ dans l'aire $\mathfrak{A}$, diminué du nombre des infinis de cette même fonction dans la même aire, chaque zéro ou chaque infini comptant pour autant d'unités qu'il y a d'unités dans son indice.

CHAPITRE IV.

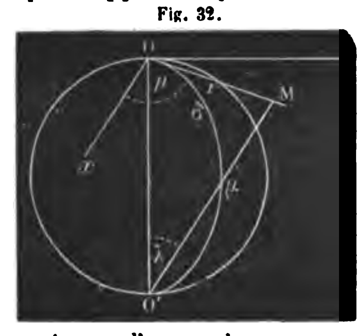
REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE COMPLEXE SUR LA SPHÈRE.

§ Ier.

Passage du plan horizontal à la sphère et au plan antipode.

173. Concevons une sphère de diamètre $= 1$, tangente en l'origine O (*fig.* 32) au plan des coordonnées xOy, *ou plan horizontal*, et située *au-dessous* (¹) de ce plan. Soit O′ le point de la sphère *opposé* au point O.

Fig. 32.



Étant donné un point M (x, y) du plan, joignons ce point au point O′. La droite O′ M rencontrera la sphère en un point μ, qui sera complètement déterminé par la position du point M, et *vice versa*. On pourra prendre donc pour *coordonnées* du point μ les coordonnées soit rectangulaires, soit polaires du point M, de sorte que l'expression

$$z = x + iy = r_p$$

représentera indifféremment le point M du plan ou le point μ de la sphère.

A un contour tracé sur le plan correspondra un contour tracé sur la sphère. Les deux contours seront à la fois tous les deux fermés ou tous les deux non fermés; tous les deux à connexion simple, ou tous les deux à connexion multiple et du même degré de multiplicité.

(¹) Nous entendons par *dessus* du plan xOy la face de ce plan telle qu'un observateur se tenant debout sur cette face, les pieds sur le plan, doive tourner d'*un* angle droit, *de sa droite vers sa gauche*, pour passer de la direction positive de l'axe des x à la direction positive de l'axe des y. Ce sens de rotation est celui du *mouvement propre annuel* du Soleil pour un habitant de l'hémisphère boréal.

Si le point M s'éloigne à l'infini, la droite $O'\mu M$ tend à devenir parallèle au plan xy, et le point μ se rapproche indéfiniment de O'. Donc, dans ce système, non-seulement chaque valeur finie de x est représentée par un point unique et déterminé de la sphère, mais encore la valeur $z = \infty$ est elle-même représentée par le point unique et déterminé O'.

D'après cela, un contour qui, sur le plan horizontal xy, aurait deux branches infinies, comme une parabole, serait représenté sur la sphère par un contour fermé, passant par le point O. A une hyperbole tracée sur le plan des xy correspondrait sur la sphère une courbe en forme de 8, ayant son point multiple en O'.

174. A tout point du plan horizontal, situé à une distance finie de l'origine O, correspond un point unique de la sphère, et réciproquement.

Si donc une fonction $f(z)$ a une valeur unique en chaque point du plan situé à une distance finie de O, cette fonction aura aussi une valeur unique en chaque point de la sphère qui ne se confond pas avec O'. Donc, pour les valeurs *finies* de z, une fonction uniforme sur le plan est aussi uniforme sur la sphère, et réciproquement.

Pour z fini, à un accroissement infiniment petit de z sur le plan correspond un déplacement infiniment petit du point corrélatif de la sphère, et *vice versa*. Donc, si une quantité varie d'une manière continue sur l'une des deux surfaces, elle variera aussi d'une manière continue sur l'autre surface.

175. Il peut y avoir exception pour les valeurs d'une fonction correspondante à des points de la sphère infiniment voisinsdu point O' de la sphère, qui représente l'infini. En effet, sur le plan, les valeurs de z de module infini et d'arguments différents vont en divergeant de plus en plus, tandis que les points correspondants de la sphère convergent tous vers le même point O'. Il peut donc se faire qu'une fonction uniforme pour tous les points de la sphère autres que O' devienne multiforme en ce point, où se réunissent des valeurs variables exprimées par des nombres infiniment différents.

Considérons, par exemple, la fonction

$$\sin z = \sin (x + iy) = \sin x \,\mathrm{Ch}\, y + i \cos x \,\mathrm{Sh}\, y.$$

Cette fonction ne tend pas vers une limite déterminée pour $z = \infty$. Car, si l'on fait $x = 0$, $y = \infty$, elle tend vers $\infty \times i$; si l'on fait $x = \infty$, $y = 0$, elle tend vers $\sin \infty$, quantité réelle, comprise entre -1 et $+1$, mais complètement indéterminée entre ces deux limites. Or, sur la sphère, ces deux valeurs de z sont représentées l'une et l'autre par le point O'. Donc en O' la fonction $\sin z$ n'est plus uniforme et continue, comme elle l'est pour tous les autres points de la sphère. Elle a en O' un point de discontinuité de seconde espèce.

Au contraire, la fonction

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} + \frac{mz}{z^2 + n}$$

tend pour $z = \infty$, vers la limite finie $\frac{a}{c}$, quelles que soient les composantes de z, pourvu que le module soit infini. Donc cette fonction est encore uniforme en O', comme en tous les autres points de la sphère.

176. Si l'on désigne par δ l'arc de grand cercle compris entre le point O et le point z de la sphère, cet arc faisant partie d'un cercle de *diamètre* $= 1$, sa longueur mesurera l'angle $\lambda = z\mathrm{O'O}$, compris entre les directions O'O et O'z. Le module r du point z du plan sera donc égal à

$$\operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \lambda.$$

Donc le point représenté par $re^{i\varphi}$ sur le plan sera représenté par

$$\operatorname{tang} \delta . e^{i\varphi} = \operatorname{tang} \lambda . e^{i\varphi}$$

sur la sphère. Si r varie d'une manière continue, il en sera de même de δ ou de λ, et réciproquement, sauf le cas de $\delta = \lambda = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sauf le voisinage de O'.

177. Si l'on fait décrire à z, sur le plan horizontal, un cercle ayant pour équation

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2,$$

la courbe tracée par le z de la sphère sera l'intersection de cette sphère, représentée par l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0,$$

avec le cône

$$(\xi - a\zeta)^2 + \eta^2 - b^2\zeta^2 = 0.$$

On tire de ces deux équations

$$2a\xi + (1 + b^2 - a^2)\zeta = 1,$$

ce qui montre que la courbe d'intersection est plane. Donc le z de la sphère décrit un cercle comme le z du plan; et réciproquement.

178. Imaginons maintenant un plan tangent à la sphère au *pôle inférieur* O′, et joignons le z de la sphère, que nous désignerons par ζ, au *pôle supérieur* O. La ligne Oζ rencontrera le plan inférieur en un point z', qui sera lié avec z et avec ζ, et qui sera déterminé par chacun d'eux, ou le déterminera sans ambiguïté.

Nous avons, entre le module r et l'angle OO′z = δ, la relation

$$r = \text{tang}\,\delta.$$

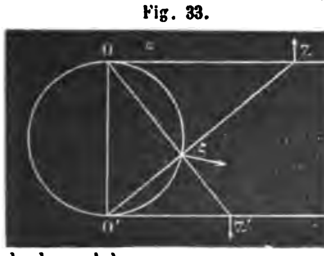
L'angle O′Oz étant égal à $\frac{\pi}{2} - \delta$, le module O′z' aura pour valeur

$$r' = \text{tang}\,\text{O}'\text{O}z = \cot\delta = \frac{1}{r}.$$

L'argument sera le même que celui de z, si l'on prend pour cet argument l'angle du plan OζO′ avec le méridien fixe passant par Ox, ce qui suppose les faces *supérieures* des deux plans tournées vers la même direction, celle qui va de O′ vers O. Mais il est plus convenable de compter l'argument de z' dans le sens opposé.

Examinons, en effet, par quel procédé de déformation nous pouvons passer le plus simplement du plan supérieur à la sphère, puis de celle-ci au plan inférieur. Imaginons un observateur placé en z, debout sur la face supérieure du plan horizontal (*fig.* 33).

Fig. 33.



Concevons qu'on enroule la ligne Oz sur le méridien OζO′, en faisant varier la longueur de cette ligne de manière que chaque point z suive la droite O′ζz. L'observateur, entraîné dans ce mouvement, se trouvera debout en ζ sur la surface *extérieure* de la sphère.

Déroulons maintenant l'arc $O'\zeta$, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur $O'z'$, en faisant varier sa longueur de manière que le point ζ suive la droite $O\zeta z'$. L'observateur placé en ζ, sur la surface extérieure de la sphère, arrivera en z, la tête tournée vers le bas, en sens inverse du sens dans lequel il se trouvait en z, et dans une position que nous pourrons désigner par le mot d'*antipode*. Nous appellerons alors, par analogie, *plan antipode* le plan inférieur $O'z'$.

Cela posé, pour que, sur le plan antipode, l'axe des y soit situé à un angle droit *au delà* de l'axe des x pour un observateur debout en O' sur la face *inférieure* du plan et tournant *de droite à gauche,* il faudra faire *croître* les azimuts sur ce plan en sens contraire des azimuts sur le plan horizontal. Si l'on désigne donc par p' l'argument de z' compté à partir du même plan fixe que l'argument p de z, il faudra prendre

$$p' = -p.$$

On conclut de là que l'on aura

$$z' = r' e^{ip'} = \frac{1}{r} e^{-ip} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi la construction précédente détermine sur le plan antipode une nouvelle variable z', dont la valeur est réciproque de la valeur de z (¹).

179. Étant donc donnée une fonction

$$f(z) = f(re^{ip})$$

de la variable z sur le plan horizontal, on pourra la transformer en une fonction

$$f(\zeta) = f(\operatorname{tang}\delta . e^{ip}) = f(\operatorname{tang}\delta . e^{-ip'})$$

de la variable ζ sur la sphère, puis en une fonction

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = f\left(\frac{1}{r'} e^{-ip'}\right)$$

de la variable z' sur le plan antipode.

(¹) C'est grâce au sens adopté pour compter les arguments sur le plan antipode que z' est une *fonction* (monogène) de z, et, par suite, que toute fonction de z sera aussi une fonction de z', et *vice versa*.

Lorsque z variera de zéro à l'infini, le point δ passera de O en O', et z' variera de l'infini à zéro. Si l'on fait

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z'),$$

la valeur de $f(z)$ pour $z = \infty$ sera la valeur de $\varphi(z')$ pour $z' = 0$, tandis que, sur la sphère, les valeurs infinies soit de z, soit de z', correspondront toujours à des valeurs finies de la quantité δ et à des points déterminés de la sphère. En rapportant donc la variable à un point de la sphère, on n'aura plus à considérer de points situés à l'infini, et l'on pourra traiter l'infini comme toute autre valeur représentée par un point de la surface sur laquelle se meut la variable.

§ II.

180. THÉORÈME. *Une fonction qui est uniforme, finie et continue dans toute l'étendue de la sphère, se réduit à une constante.*

Pour démontrer cette proposition, mettons la fonction $f(z) = f(x + iy)$ sous la forme $u + iv$, u et v ayant chacun une valeur unique en chaque point du plan horizontal, et par suite en chaque point de la sphère. Nous supposons, de plus, qu'en chaque point de la sphère, u et v soient des fonctions continues des variables δ et p, qui déterminent la position de ce point.

Partageons la sphère en deux parties par une ligne fermée quelconque, qui ne se coupe pas, et de telle sorte que la calotte supérieure renferme le point O, la calotte inférieure le point O'. Nous pourrons transformer tous les points de la calotte supérieure en des points du plan horizontal renfermés dans nne certaine aire $\mathfrak{A}$, et tous les points de la calotte inférieure en des points du plan antipode renfermés dans une aire $\mathfrak{A}'$.

D'après la formule démontrée au n° 137, on aura, sur le plan horizontal,

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx\,dy = \int_{\mathfrak{A}} u\,dv,$$

l'intégrale du second membre étant prise dans le sens positif par rapport à l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire en marchant *de l'ouest à l'est* (n° 175, note).

On aura de même, sur le plan antipode,

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_{x'}u)^2 + (D_{y'}u)^2\right] dx'\,dy' = \int_{\mathfrak{A}'} udv,$$

l'intégrale du second membre étant prise dans le sens des angles p' croissants, ou dans le sens des angles p décroissants, c'est-à-dire en marchant *de l'est à l'ouest.*

On peut maintenant considérer x, y, ou x', y' comme les *coordonnées tangentielles* d'un point ζ de la sphère. Les fonctions

$$D_x u, \quad D_y u, \quad D_{x'} u, \quad D_{y'} u, \quad u, \quad dv$$

auront les mêmes expressions et les mêmes valeurs, soit qu'on rapporte les coordonnées à un point de l'un des plans, soit qu'on les considère comme déterminant un point de la sphère. On aura donc

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx\,dy + \int\int_{\mathfrak{A}'} \left[(D_{x'} u)^2 + (D_{y'} u)^2\right] dx'\,dy'$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} udv + \int_{\mathfrak{A}'} udv,$$

la première intégrale de chaque membre se rapportant à la calotte supérieure, et l'autre à la calotte inférieure.

Or les intégrales $\int_{\mathfrak{A}} udv$, $\int_{\mathfrak{A}'} udv$ sont prises l'une et l'autre le long de la courbe de séparation des deux calottes, laquelle, sur les deux plans, s'était transformée dans les contours des aires $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$. Ces intégrales sont donc composées des mêmes éléments. Mais dans la première le contour est parcouru de l'ouest à l'est, tandis que dans la seconde il est parcouru de l'est à l'ouest. Donc les mêmes éléments sont pris en signe contraire dans ces deux intégrales. Il résulte de là que ces intégrales sont égales et de signe contraire, et que leur somme est nulle. Il en est donc de même aussi pour la somme des intégrales doubles.

Mais ces intégrales doubles sont composées d'éléments qui ne peuvent être négatifs. Donc, pour que leur somme soit nulle, il faut que ces éléments soient nuls séparément, ce qui entraîne les équations

$$D_x u = 0, \qquad D_y u = 0, \qquad D_{x'} u = 0, \qquad D_{y'} u = 0.$$

Donc la fonction u se réduit à une constante dans toute l'étendue de la sphère, et comme on a, en chaque point (nº 102)

$$D_x u = D_y v, \quad D_y u = -D_x v, \quad D_{x'} u = D_{y'} v, \quad D_{y'} u = -D_{x'} v,$$

il en résulte que v doit se réduire aussi à une constante. Donc $f(z)$ se réduit à une constante dans toute l'étendue de la sphère, et par suite aussi dans toute l'étendue du plan ([1]).

181. Il résulte de là que toute fonction uniforme de z, qui ne se réduit pas à une constante, doit présenter au moins un infini en quelque point de la sphère, et par suite elle doit devenir infinie pour une valeur au moins de z, finie ou infinie.

182. Si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, il en sera de même de son inverse $\frac{1}{f(z)}$. Donc la fonction $\frac{1}{f(z)}$ devra aussi présenter un ou plusieurs infinis, et par conséquent la fonction $f(z)$ un ou plusieurs zéros.

Donc toute fonction uniforme de z, qui ne se réduit pas à une constante, doit nécessairement présenter, dans l'étendue infinie du plan, un ou plusieurs zéros, et aussi un ou plusieurs infinis.

De plus, si le point O′ est un zéro (ou un infini), il faut que la fonction ait en un autre point un infini (ou un zéro). Donc toute fonction uniforme a au moins soit un zéro, soit un infini, situé à une distance finie.

([1]) On peut encore démontrer ce théorème comme il suit :

La fonction $f(z)$ étant toujours finie et continue, quelque grand que soit z, on aura, en prenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon infini, et posant $\zeta = Re^{i\varphi}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\varphi}{1 - \frac{z}{\zeta}}.$$

Or pour R infini, $f(\zeta)$ restant toujours fini, l'intégrale différera infiniment peu de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi,$$

quantité finie et indépendante de z. Donc $f(z)$ est aussi indépendant de z, et se réduit à une constante.

Il est aisé de voir que cette proposition contient comme cas particulier le théorème, que toute équation algébrique a au moins une racine (nos 74-76).

183. La fonction $f(z) - k$ doit, d'après cela, avoir au moins un zéro. Il s'ensuit de là que *la fonction $f(z)$ passe au moins une fois par une valeur donnée quelconque k.*

Ainsi *toute fonction uniforme dans toute l'étendue de la sphère reçoit nécessairement toutes les valeurs possibles, y compris zéro et l'infini.*

184. Remarquons que les zéros (et les infinis) d'une fonction doivent être nécessairement isolés. Car s'ils étaient infiniment rapprochés, ils formeraient un élément continu, sur lequel la fonction présenterait une valeur constante, et l'on en conclurait alors (n° 152) que la fonction devrait rester constante dans toute l'étendue du plan.

Un infini de première espèce ne peut être non plus à une distance infiniment petite d'un zéro; car alors l'inverse de la fonction serait discontinu en ce point, aussi bien que la fonction elle-même, et l'infini ne serait plus de première espèce.

185. Soit $f(z)$ une fonction finie et continue en tout point de la sphère autre que le point O'. Partageons toujours la sphère en deux calottes, dont l'une contienne O, l'autre O', et transportons tous les points de la calotte inférieure $\mathfrak{A}'$ sur le plan antipode.

La fonction $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ sera finie et continue pour toute valeur de z, excepté pour $z' = 0$. Soit $-n$ l'indice de cette fonction pour $z' = 0$. On pourra, d'après ce que nous avons vu, développer la fonction

$$z'^n \varphi(z'),$$

uniforme et continue dans toute l'étendue du plan antipode, en série ordonnée suivant les puissances positives de z', et poser

$$z'^n \varphi(z') = A_0 + A_1 z' + \cdots + A_{n-1} z'^{n-1} + \Omega_n z'^n,$$

Ω_n étant une fonction finie et continue dans toute l'étendue du plan antipode. Donc

$$\varphi(z') = \frac{A_0}{z'^n} + \frac{A_1}{z'^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z'} + \Omega_n,$$

d'où en remplaçant z' par $\frac{1}{z}$, $\varphi(z')$ par $f(z)$,

$$\Omega_n = f(z) - (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z),$$

formule vraie sur toute l'étendue de la calotte $\mathfrak{A}'$.

Or la fonction Ω_n est finie et continue sur toute la calotte $\mathfrak{A}'$; elle l'est évidemment aussi sur toute la calotte $\mathfrak{A}$. Donc elle l'est aussi sur toute la sphère, et par conséquent elle se réduit (n° 182) à une constante A_n. On a donc

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n.$$

Donc *une fonction uniforme qui ne devient infinie que pour z infini, et qui, pour toute autre valeur de z, reste finie et continue, est une fonction entière et rationnelle de z, dont le degré est égal à l'indice du point $z = \infty$.*

186. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ait des infinis $c_1, c_2, \ldots, c_k$, autres que le point O'. Partageons la sphère, comme précédemment, en deux calottes contenant l'une tous les points c, l'autre le point O', qu'il soit ou non un infini.

Suivant ce qui a été démontré, la fonction pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots}{(z - c_1)^{n_1} (z - c_2)^{n_2} \cdots (z - c_k)^{n_k}};$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant les indices des points $c_1, c_2, \ldots, c_k$; de sorte que la fonction

$$F = (z - c_1)^{n_1} (z - c_2)^{n_2} \ldots (z - c)^{n_k} . f(z)$$

sera uniforme et continue dans toute l'étendue de la calotte supérieure.

Elle sera également uniforme et continue en tout point de la calotte inférieure, à l'exception peut-être du point O'. Donc, d'après

ce que nous venons d'établir au numéro précédent, cette quantité F sera une fonction entière et rationnelle de z, d'un degré n marqué par son indice au point O', et, par suite, de la forme

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_0 .$$

Donc la fonction proposée $f(z)$ sera de la forme

$$\frac{A_n z_n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_0}{(z-c_1)^{n_1}(z-c^2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}};$$

le numérateur se réduisant à une constante, si la fonction F est finie en O'.

Donc *toute fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est une fonction rationnelle.*

187. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tous les points où une fonction $f(z)$ devient nulle ou infinie sur le plan horizontal; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ leurs indices, positifs ou négatifs. La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\cdots(z-c_k)^{n_k}}$$

ne pourra devenir nulle ou infinie en aucun point du plan. Donc elle se réduira à une constante A (n° 184), d'où l'on tire

$$f(z) = A\,(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k} .$$

Donc *une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est connue, à un facteur constant près, dès que l'on donne ses zéros et ses infinis avec leurs indices respectifs.*

§ III.

Détermination d'une fonction par des conditions relatives au contour et aux points de discontinuité.

188. Nous avons vu (n° 151) qu'une fonction uniforme et continue dans une aire donnée est déterminée pour toutes les valeurs de la variable comprise dans cette aire, lorsqu'on donne ses valeurs en tout point d'un élément de l'aire aussi petit que l'on voudra.

Nous allons voir comment on peut réduire au strict nécessaire les conditions de la détermination d'une fonction, ce qui conduira aux moyens d'étudier une fonction suffisamment déterminée, sans avoir besoin de connaître son expression analytique.

189. Nous avons vu (n° 151) que si une fonction uniforme et continue w de $z = x + iy$ est donnée pour un élément, superficiel ou linéaire, de l'aire $\mathfrak{A}$, aussi petit que l'on voudra, on obtiendra d'abord l'expression de cette fonction, sous forme de série convergente, pour tous les points de l'intérieur du cercle de convergence qui a son centre en un point quelconque de l'élément; et de là, en s'avançant de proche en proche, on peut déterminer la fonction dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Nous pourrons supposer que l'élément linéaire le long duquel la fonction est donnée est le contour même du cercle de convergence $\mathfrak{C}$, de rayon R et de centre c, ou d'un autre cercle quelconque compris dans le cercle de convergence, et aussi voisin de lui que l'on voudra. Si l'on connaît les valeurs que prend la fonction $f(z)$ en tous les points de la circonférence $\mathfrak{C}$, les formules du n° 154 détermineront les coefficients du développement de $f(z)$, sous forme d'intégrales portant sur des fonctions connues, et ce développement donnera les valeurs de $f(z)$ en un point quelconque de l'intérieur du cercle.

La fonction $w = f(z)$ ainsi déterminée, jouira des propriétés suivantes :

Elle sera continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour toute valeur de z intérieure au cercle;

Elle satisfera à l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 w + D_y^2 w = 0.$$

190. Au lieu de la fonction $w = u + iv$ elle-même, il nous suffira, dans nos recherches, de considérer sa partie réelle u. Cette partie réelle une fois obtenue, les conditions (2) du n° 102, auxquelles le coefficient de i devra satisfaire, nous feront connaître la différentielle

$$dv = D_x v\,dx + D_y v\,dy = -D_y u\,dx + D_x u\,dy,$$

expression intégrable en vertu de la condition

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

On en tirera, par l'intégration, la valeur de v, à une constante réelle près. Enfin cette constante elle-même sera déterminée, si l'on donne la valeur numérique de v en un point quelconque (x_0, y_0) de l'aire considérée.

191. Si dans le développement

$$w = u + iv = A_0 + A_1(z - c) + A_2(z - c)^2 + \cdots,$$

on sépare le réel de l'imaginaire, en faisant

$$A_n = B_n + iC_n, \qquad z - c = re^{ip},$$

on obtiendra le développement de la partie réelle u de w sous la forme

$$u = B_0 + B_1 r\cos p + B_2 r^2 \cos 2p + \cdots$$
$$- C_1 r \sin p - C_2 r^2 \sin 2p - \cdots.$$

En un point du contour de $\mathfrak{C}$, pour $r = R$, cette valeur deviendra

$$u_0 = B_0 + B_1 R\cos p + B_2 R^2 \cos 2p + \cdots$$
$$- C_1 R \sin p - C_2 R^2 \sin 2p - \cdots.$$

Réciproquement, si l'on connaît la valeur u_0 de u en tout point du contour de $\mathfrak{C}$, on aura la valeur de u en un point quelconque $z = c + re^{ip}$ de l'intérieur du cercle, en multipliant les termes du développement de u_0 par les puissances correspondantes de $\frac{r}{R}$.
Les conditions auxquelles satisfait w sont remplies également par la partie réelle u. Ainsi *il existe une fonction réelle u de x et de y satisfaisant aux conditions suivantes :*

I. *Elle prend le long de la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$ la même suite de valeurs qu'une fonction donnée u_0, continue en chaque point de cette circonférence;*

II. *En tout point de l'intérieur du cercle, elle est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles;*

III. *Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

192. Cette fonction u, que nous venons de déterminer, est la

seule qui satisfasse aux conditions du numéro précédent. En effet, reprenons l'intégrale double déjà considérée aux nos 137 et 180,

$$\Omega(u) = \int_x\int_{\mathfrak{C}}^{\cdot} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dxdy\,,$$

et soit, s'il est possible, une autre fonction U, satisfaisant comme u aux conditions I, II et III. Nous pourrons représenter cette fonction par $u + \theta$, θ étant une fonction différente de zéro dans tout l'intérieur du cercle, mais s'annulant en tout point de la circonférence, en vertu de la condition I, à laquelle les fonctions u et $u + \theta$ sont supposées satisfaire l'une et l'autre.

De plus, d'après la condition II, θ sera continue, ainsi que toutes ses dérivées. Enfin, d'après la condition III, on devra avoir

$$D_x^2\theta + D_y^2\theta = 0.$$

Cela posé, en faisant le même calcul qu'au n° 137, on trouvera

$$\Omega(\theta) = \int_{\mathfrak{C}} \theta\,(D_x\theta\, dy - D_y\theta\, dx),$$

quantité nulle, puisque θ a la valeur constante zéro tout le long du contour de $\mathfrak{C}$.

De la condition $\Omega(\theta) = 0$ il résulte, l'élément de cette intégrale ne pouvant être négatif, que l'on a

$$(D_x\theta)^2 + (D_y\theta)^2 = 0\,,$$

d'où il s'ensuit que l'on aura en tout point de l'intérieur du cercle

$$D_x\theta = 0, \qquad D_y\theta = 0\,,$$

et par suite

$$\theta = \text{constante}.$$

Enfin, cette valeur constante elle-même doit être nulle, puisque $\theta = 0$ tout le long du contour. Donc la fonction u, déterminée au numéro précédent, est la seule fonction uniforme qui satisfasse aux conditions I, II et III.

La démonstration précédente subsisterait encore dans le cas où l'on substituerait au cercle $\mathfrak{C}$ une aire quelconque à connexion simple.

193. $\Omega(\theta)$ sera nul toutes les fois que $D_x\theta$ et $D_y\theta$ le seront en

chaque point du contour, c'est-à-dire toutes les fois que la fonction θ aura le long de ce contour une valeur constante. On en conclura alors que θ sera aussi constant dans tout l'intérieur du cercle, et par suite, si θ est la partie réelle d'une certaine fonction ω de $x + iy$, cette fonction elle-même (nº 137) se réduira à une constante dans toute l'étendue de l'aire circulaire. Ainsi une fonction de z, uniforme et continue dans un cercle donné, ou plus généralement dans une aire donnée quelconque à connexion simple, se réduit à une constante toutes les fois que la valeur de sa partie réelle reste constante tout le long du contour de l'aire.

194. Supposons maintenant que la fonction w doive être finie et continue pour toute valeur de z, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la sphère. Prenons pour aire $\mathfrak{A}$ la sphère entière moins un cercle infiniment petit de centre quelconque c. La fonction étant continue dans le voisinage de c, sera constante le long de la circonférence infiniment petite qui forme le contour de l'aire. Donc elle sera aussi constante dans tout l'intérieur de l'aire, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la sphère.

Nous sommes ainsi ramenés au théorème du nº 180.

195. La fonction unique u, qui satisfait aux conditions I, II et III du nº 190, jouit, de plus, de la propriété de rendre minimum l'intégrale double

$$\Omega(U) = \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x U)^2 + (D_y U)^2\right] dx dy,$$

lorsqu'on prend pour U toutes les fonctions uniformes et continues qui satisfont seulement à la condition I, c'est-à-dire qui prennent la valeur u_0 le long de la circonférence du cercle $\mathfrak{C}$.

En effet, comparons les valeurs que prend $\Omega(U)$ lorsqu'on y remplace successivement U par la fonction u satisfaisant aux conditions I et II, et par une fonction quelconque prenant également le long du contour la valeur u_0, et que nous pourrons représenter par

$$u + \theta,$$

θ étant une fonction réelle quelconque, uniforme et continue à l'intérieur de $\mathfrak{C}$, et s'annulant tout le long du contour de $\mathfrak{C}$. Les

dérivées de θ seront continues (nº 147). On trouve, en développant,

$$\Omega(u+\theta) = \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx dy$$

$$+ 2\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u\, D_x \theta + D_y u D_y \theta\right] dx dy + \int\int_{\mathfrak{C}} \left[(D_x \theta)^2 + (D_y \theta)^2\right] dx dy$$

$$= \Omega(u) + \Omega(\theta) + 2\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u D_x \theta + D_y u D_y \theta\right] dx dy.$$

Or, à cause de

$$D_x(\theta . D_x u) = D_x u\, D_x \theta + \theta . D_x^2 u,$$

on a, par la formule (1) du nº 125,

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u\, D_x \theta + \theta . D_x^2 u\right] dx dy = \int_{\mathfrak{C}} \theta . D_x u\, dy,$$

et de même, par la formule du nº 126,

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_y u\, D_y \theta + \theta . D_y^2 u\right] dx dy = -\int_{\mathfrak{C}} \theta . D_y u\, dx.$$

Donc

$$\int\int_{\mathfrak{C}} \left[D_x u D_x \theta + D_y u D_y \theta\right] dx dy$$

$$= \int_{\mathfrak{C}} \theta (D_x u\, dy - D_y u\, dx) - \int\int_{\mathfrak{C}} (D_x^2 u + D_y^2 u)\theta\, dx dy.$$

Or, les intégrales du second membre sont nulles, la première parce que θ s'annule tout le long du contour, la seconde par la même raison et aussi parce que u satisfait à la condition III. Donc on aura simplement

$$\Omega(u+\theta) = \Omega(u) + \Omega(\theta).$$

$\Omega(\theta)$ ne peut être négatif. Donc, tant que $\Omega(\theta)$ ne sera pas nul, on aura toujours

$$\Omega(u+\theta) > \Omega(u).$$

On aura

$$\Omega(u+\theta) = \Omega(u)$$

dans le seul cas où $\Omega(\theta)$ sera nul; mais alors, d'après ce que nous avons vu, θ devra lui-même s'annuler, et $u+\theta$ se réduira à u.

Donc, parmi toutes les fonctions U qui satisfont aux conditions I et II, celle qui donnera pour $\Omega(u)$ la valeur minimum sera la fonction unique qui satisfait à la condition III.

C'est d'ailleurs le seul minimum dont l'intégrale $\Omega(U)$ soit susceptible. Car, si l'on part d'une valeur quelconque $\Omega(U) = \Omega(u+\theta) = \Omega(u) + \Omega(\theta)$, et que l'on remplace θ par $h\theta$, h étant une constante moindre que l'unité, on aura

$$\Omega(h\theta) = h^2\Omega(\theta),$$

et par suite

$$\Omega(u + h\theta) = \Omega(u) + h^2\,\Omega(\theta) < \Omega(u+\theta).$$

Donc $U = u + \theta$ ne peut donner un minimum de $\Omega(U)$, si ce n'est pour $\theta = 0$.

196. Passons maintenant au cas général où l'on considère non plus l'aire d'un cercle $\mathfrak{C}$, mais une aire quelconque $\mathfrak{A}$ à connexion simple. Soit toujours U une fonction de x et de y, continue dans toute cette aire, et prenant le long du contour de l'aire une série de valeurs données, représentée par u_0.

L'intégrale

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x U)^2 + D_y U)^2\right] dx\,dy,$$

étendue à tous les éléments de cette aire, ne peut devenir négative. Parmi les formes, en nombre infini, que l'on peut attribuer à la fonction U, il doit en exister une qui rende cette intégrale minimum. Désignons par u cette détermination particulière de U, que l'on peut supposer obtenue par un moyen quelconque.

Cela posé, traçons à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ un contour fermé quelconque, qui partage l'aire $\mathfrak{A}$ en deux parties, l'une annulaire et extérieure $\mathfrak{B}$, l'autre intérieure et à connexion simple $\mathfrak{C}$. Imaginons que dans toute l'aire annulaire $\mathfrak{B}$ on attribue à la fonction U la valeur *déterminée* u, et que dans la partie intérieure $\mathfrak{C}$ on laisse U indéterminé.

D'après la supposition de la continuité de U, cette fonction devra prendre, le long de la ligne de séparation des aires $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, la même série de valeurs que la fonction u, sans quoi il y aurait discontinuité en passant d'un côté à l'autre de cette ligne. De plus, cette fonction U sera encore assujettie à suivre dans l'intérieur de $\mathfrak{C}$ la loi de continuité.

L'intégrale $\Omega_{\mathfrak{A}}(U)$ se composera de deux parties : l'une $\Omega_{\mathfrak{B}}(U)$

$= \Omega_{\mathfrak{B}}(u)$, qui est déterminée et constante, l'autre $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$, dont la valeur variera avec la forme de la fonction U. Donc la valeur totale

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \text{const.} + \Omega_{\mathfrak{C}}(U)$$

ne pourra être minimum qu'autant que $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ le sera, c'est-à-dire qu'autant que l'on aura choisi pour U la forme qui rendra $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ minimum.

Or, par hypothèse, on aurait la valeur minimum $\Omega(U)$ en faisant $U = u$, non seulement dans $\mathfrak{B}$, mais encore dans l'autre partie $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$. Donc la fonction u est celle qui rend aussi minimum l'intégrale $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ parmi toutes les fonctions qui ont sur le contour de $\mathfrak{C}$ la même valeur que u.

Soit pris maintenant pour $\mathfrak{C}$ un cercle de centre c, compris tout entier dans $\mathfrak{A}$. Parmi toutes les fonctions imaginables qui ont sur le contour de $\mathfrak{C}$ la même valeur que u, celle qui rend $\Omega_{\mathfrak{C}}(U)$ minimum est la fonction qui remplit, à l'intérieur de ce cercle, les conditions II et III. Ainsi, cette dernière fonction est celle que l'on doit prendre en tout point d'un cercle tracé du centre c à l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Si nous déplaçons maintenant le centre c, comme au n° 151, nous finirons, de proche en proche, par embrasser successivement tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc, *(x, y) désignant un point quelconque d'une aire à connexion simple $\mathfrak{A}$, parmi toutes les fonctions réelles de x et de y, qui prennent sur le contour de $\mathfrak{A}$ une même suite donnée de valeurs, et qui restent continues à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, il en existe une u, qui rend minimum l'intégrale*

$$\Omega_{\mathfrak{A}}(U) = \int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x U)^2 + (D_y U)^2\right] dx\, dy;$$

et cette fonction u jouit des propriétés suivantes : 1° elle est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles, à l'intérieur de $\mathfrak{A}$; 2° elle vérifie en tout point de $\mathfrak{A}$ l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

197. Si l'on suppose maintenant que u soit la partie réelle d'une fonction $u + iv$ de $z = x + iy$, on aura (n° 102), en intégrant

entre deux points z_0, z de l'aire $\mathfrak{A}$, et prenant pour chemin d'intégration une courbe quelconque tracée à l'intérieur de $\mathfrak{A}$,

$$v = \int_{z_0}^{z} (D_x u\, dy - D_y u\, dx) + \text{const.}$$

La quantité sous le signe $\int$ étant une différentielle exacte, l'intégrale sera indépendante du chemin parcouru (n° 130). Donc v sera, comme u, une fonction uniforme de x et de y.

De plus, la valeur de dv donne

$$D_x v = -D_y u, \qquad D_y v = D_x u.$$

Donc (n° 102) *$u + iv$ est une fonction de $z = x + iy$, uniforme et continue à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, dont la partie réelle u prend le long du contour de $\mathfrak{A}$ une suite de valeurs données, et dont la partie imaginaire iv peut prendre en un point quelconque de $\mathfrak{A}$ une valeur donnée.*

Enfin, *la fonction $u + iv$ qui satisfait à ces conditions est unique.*— Car, si l'on remplace $u + iv$ par $(u + iv) + (\upsilon + i\nu)$, 1° $\upsilon + i\nu$ devra être une fonction de $x + iy$, uniforme et continue dans toute l'aire $\mathfrak{A}$; 2° υ devra s'annuler tout le long du contour de $\mathfrak{A}$; 3° ν prendra la valeur zéro en un certain point z_0 de $\mathfrak{A}$. Puisque υ est nul tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \upsilon\, d\nu$$

est nulle. Donc (n° 137) $\upsilon + i\nu$ se réduit à une constante. Cette constante est nulle, puisque υ s'évanouit sur le contour, et ν au point z_0. Donc la fonction $u + iv$ est la seule qui puisse satisfaire aux conditions ci-dessus.

Remarque. Les recherches précédentes reposent sur le principe, admis comme évident, que, parmi toutes les fonctions U qui satisfont à des conditions données dans une aire donnée, il en existe une qui rend l'intégrale $\Omega(U)$ minimum, et nous avons vu que c'est celle qui satisfait à une équation aux dérivées partielles, analogue à celle du *potentiel.* Ce principe a été employé par Lejeune-Dirichlet dans ses Leçons sur l'action des forces qui agissent en raison inverse du carré de la distance, et pour cette raison, Riemann lui a donné le nom de *principe de Dirichlet.*

198. Supposons maintenant que la fonction à déterminer ne

soit plus assujettie à rester toujours continue à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, mais qu'elle puisse présenter des infinis de première espèce. Ses dérivées étant infinies pour les mêmes points, l'intégrale

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u)^2 + (D_y u)^2\right] dx\,dy$$

sera elle-même infinie, et ne pourra plus être employée.

Dans ce cas, Riemann emploie, au lieu de cette intégrale, la suivante,

$$\Omega(\alpha) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x \alpha - D_y \beta)^2 + (D_y \alpha + D_x \beta)^2\right] dx\,dy,$$

prise encore dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$. Cette expression s'annule (nº 102), toutes les fois que $\alpha + i\beta$ est une fonction de $z = x + iy$.

Soit maintenant u une fonction de x et de y qui ait les mêmes infinis $c, c', \ldots$ que la partie réelle α de $\alpha + i\beta$, et qui en ces points prenne une valeur différant de celle de α d'une quantité finie, c'est-à-dire telle que $\lim_{z=c}(u - \alpha)$ ait une valeur finie en chaque point c. Nous dirons dans ce cas, pour abréger, que la fonction u *devient infinie de la même manière que* α.

Cela posé, si l'on fait

$$u - \alpha = \mu,$$

la fonction μ sera finie et continue dans tout l'intérieur de $\mathfrak{A}$, et il en sera de même de toutes ses dérivées,

$$D_x\mu = D_x u - D_x\alpha = D_x u - D_y\beta,$$
$$D_y\mu = D_y u - D_y\alpha = D_y u + D_x\beta.$$

Donc

$$\Omega(u) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x u - D_y \beta)^2 + (D_y u + D_x \beta)^2\right] dx\,dy$$

aura une valeur finie.

Si l'on applique à la recherche de la fonction μ, ou, ce qui revient au même, de la fonction u qui rend cette intégrale minimum, le même calcul qu'au nº 195, on verra que l'intégrale sera rendue

minimum par la fonction u qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

L'existence d'une fonction μ et d'une seule entraîne l'existence d'une fonction u et d'une seule.

Si l'on considère maintenant u comme la partie réelle d'une fonction de $x + iy$, l'autre composante v sera déterminée, à une constante près, par l'équation

$$d(v - \beta) = -(D_y u + D_x \beta)\,dx + (D_x u - D_y \beta)\,dy.$$

Donc *une fonction $w = u + iv$ d'une variable complexe est déterminée dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$ à connexion simple, lorsqu'on donne :* 1° *la suite des valeurs de u le long du contour de $\mathfrak{A}$;* 2° *la valeur de v en un point quelconque de $\mathfrak{A}$;* 3° *une fonction $\alpha + i\beta$ qui ait les mêmes infinis que w et qui devienne infinie de la même manière.*

199. Soit $m + in$ une fonction quelconque, non de $x + iy$, mais simplement de x et de y; et supposons que dans l'aire $\mathfrak{A}$ cette fonction *ait les mêmes infinis et soit infinie de la même manière qu'une fonction $\alpha + i\beta$ de $x + iy$.* Les expressions

$$D_x m - D_y n \quad , \quad D_y m + D_x n$$

seront alors finies en tout point de $\mathfrak{A}$, et il en sera de même de l'intégrale

$$\Omega(m) = \int\int_{\mathfrak{A}} \left[(D_x m - D_y n)^2 + (D_y m + D_x n)^2\right] dx\,dy.$$

Si maintenant μ désigne une fonction de x et de y, qui reste finie dans $\mathfrak{A}$, et que nous posions

$$u = m + \mu,$$

u sera infini de la même manière que m et par suite que α. Donc $\Omega(u)$ sera fini, et deviendra minimum lorsqu'on prendra pour u la fonction qui satisfera à l'équation

$$(1) \qquad D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

La fonction u, ainsi déterminée, pourra être prise pour la partie

réelle d'une fonction de $x+iy$. On peut donc déterminer μ de façon que $u=m+\mu$, satisfaisant à l'équation (1), prenne la même valeur que m le long du contour de $\mathfrak{A}$, et soit, à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, infini de la même manière que α, et nous avons vu que cette détermination est unique.

On a ensuite, comme précédemment,

$$d(v-n)=-(D_y u+D_x n)\,dx+(D_x u-D_y n)\,dy,$$

les coefficients de dx et de dy étant finis en tout point de $\mathfrak{A}$, et l'on voit aisément que la fonction v ainsi déterminée remplit les conditions du n° 102. Si donc on pose la différentielle du second membre $=d\nu$, on aura

$$v=n+\nu,$$

et par suite, en ajoutant à $m+in$ la fonction finie et continue $\mu+i\nu$,

$$(m+in)+(\mu+i\nu)$$

deviendra une fonction de $x+iy$, dont la partie réelle aura les mêmes valeurs que m le long du contour de $\mathfrak{A}$. La fonction ν renfermera une constante arbitraire, que l'on déterminera si l'on connaît la valeur de ν en un point de l'aire $\mathfrak{A}$.

On peut se servir de ce calcul pour déterminer la fonction $w=u+iv$. Comme on peut choisir les fonctions m et n d'une manière entièrement arbitraire, on pourra faire ensorte qu'à l'intérieur de contours infiniment petits tracés autour des infinis que doit avoir w, la fonction $m+in$ prenne les mêmes valeurs que la fonction donnée $\alpha+i\beta$, qui doit être infinie de la même manière que w; qu'en dehors de ces contours elle reste toujours finie et continue, et que sur le contour de $\mathfrak{A}$ la partie réelle m prenne les valeurs données pour la partie réelle de w. Alors $\Omega\,(m)$ sera identiquement nulle à l'intérieur de ces contours, et sera finie dans tout le reste de l'aire $\mathfrak{A}$. En ajoutant à $m+in$ la fonction $\mu+i\nu$, on obtiendra une fonction w de z, et comme le changement de $m+in$ en une fonction de z ne peut se faire que d'une seule manière, w sera déterminé à une constante près, renfermée dans ν.

§ IV.

200. Supposons, comme au n° 180, la sphère partagée en deux calottes : l'une $\mathfrak{A}$ contenant tous les infinis de la fonction qui sont, sur le plan horizontal, à des distances finies de l'origine; l'autre $\mathfrak{A}'$ ne contenant pas d'autre infini que le point O', s'il en est un.

L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz$ sera le résidu intégral de la fonction relativement à l'aire $\mathfrak{A}$. L'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \varphi(z')\,dz' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}$$

(en ayant égard au changement de signe indiqué au n° 180) sera le résidu de la fonction $\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ relativement au point O', c'est-à-dire à $z' = 0$ ou à $z = \infty$.

Or les deux intégrales, prises le long de la même ligne de séparation des deux calottes et en sens contraire, sont égales et de signe contraire. Donc le résidu intégral $\mathcal{E} f(z)$, relatif à tous les infinis de la fonction autres que $z = \infty$, est égal, au signe près, au résidu de la fonction $\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ relatif à $z' = 0$,

$$\mathcal{E} f(z) = -\mathcal{E}_0 \frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Si $z' . \frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z'} f\left(\frac{1}{z'}\right) = z f(z)$ a une limite *nulle* ou *finie* F pour $z = 0$ ou pour $z = \infty$, on aura alors, dans le premier cas, $\mathcal{E} f(z) = 0$, et dans le second $\mathcal{E} f(z) = -F$.

201. Supposons, par exemple, que l'on se propose de calculer le résidu intégral d'une fonction rationnelle

$$\frac{\mathrm{f}(z)}{F(z)},$$

$\mathrm{f}(z)$ et $F(z)$ étant deux polynômes entiers, de degrés m et n, savoir,

$$\mathrm{f}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,$$
$$F(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n.$$

On tire de là

$$\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = z^{n-m-2} \frac{a_m + a_{m-1} z' + \cdots}{b_n + b_{n-1} z' + \cdots}.$$

Soit maintenant

$$n - m - 2 = -\mu.$$

On pourra, par la simple division, mettre la fraction

$$\frac{a_m + a_{m-1} z' + \cdots}{b_n + b_{n-1} z' + \cdots}$$

sous la forme

$$\frac{a_m}{b_n} + \alpha_1 z' + \cdots + \alpha_{\mu-1} z'^{\mu-1} + \omega_n z'^{\mu},$$

ω_n étant une quantité qui ne devient pas infinie pour $z' = 0$. Il vient alors

$$\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a_m}{b_n} z'^{-\mu} + \alpha_1 z'^{-\mu+1} + \cdots + \alpha_{\mu-1} z'^{-1} + \omega_n.$$

En intégrant maintenant les deux membres le long du contour de $\mathfrak{A}'$, comme au n° 141, il vient, le résidu de ω_n étant nul,

$$\mathcal{E}_0 \frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \alpha_{\mu-1}.$$

Donc

$$\mathcal{E} \frac{f(z)}{F(z)} = -\alpha_{\mu-1}.$$

Pour

$$n - m - 2 = -1, \text{ ou } n = m + 1,$$

on a

$$\mathcal{E} \frac{f(z)}{F(z)} = -\frac{a_m}{b_n}.$$

Cette valeur n'est autre chose que la valeur de $-zf(z)$ du numéro précédent. Pour

$$n - m - 2 \gtreqqless 0, \quad \text{ou } n \gtreqqless m + 2,$$

le résidu intégral est nul. On a alors, en effet, $\lim_\infty zf(z) = 0$.

La fonction $\dfrac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)}$ devenant infinie d'ordre $-(n-m-2)=\mu$ pour $z'=0$, le résidu $\alpha_{\mu-1}$ aura pour expression générale (n° 168), en supposant $m-n+1 \geqq 0$,

$$\frac{1}{(m-n+1)!}\lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon^{m-n+1}\left[\varepsilon^{m-n}\frac{f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right].$$

202. Ce que nous avons dit de l'évaluation des indices d'une fonction aux points où elle devient nulle ou infinie, s'applique également à la valeur $z=\infty$, comme on peut le voir en transformant cette variable, et rapportant la fonction au plan antipode, auquel cas on a à considérer l'indice d'une fonction de z' pour $z'=0$.

Soient maintenant $c_1, c_2, \ldots$ tous les zéros et les infinis de la fonction dans toute l'étendue de la sphère, y compris, s'il y a lieu, le point O'; $n_1, n_2, \ldots$ leurs indices respectifs, positifs ou négatifs.

Partageons la sphère en deux calottes $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$, contenant chacune une partie des points c, savoir : l'une les points $c_1, c_2, \ldots$, y compris le point O; l'autre les points $c'_1, c'_2, \ldots$, y compris le point O'. En transportant ces points, les premiers sur le plan horizontal, les seconds sur le plan antipode, nous aurons (n° 171)

$$n_1+n_2+\cdots=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{df}{f},$$

$$n'_1+n'_2+\cdots=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'}\frac{df}{f}.$$

Or les deux intégrales $\int_{\mathfrak{A}}\frac{df}{f}$, $\int_{\mathfrak{A}'}\frac{df}{f}$ sont égales et de signe contraire, comme les intégrales analogues considérées au numéro 182. Donc la somme totale des indices est nulle,

$$n_1+n_2+\cdots+n'_1+n'_2+\cdots=0.$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans toute l'étendue de la sphère, et ne présentant que des discontinuités de première espèce, la somme des indices de la fonction pour tous les points de la sphère est nulle.*

En d'autres termes, *le nombre total des zéros d'une fonction uniforme est égal au nombre total de ses infinis,* en comptant chaque zéro ou chaque infini autant de fois qu'il y a d'unités dans l'indice correspondant.

Considérons, par exemple, un polynôme de degré m. Pour $z = \infty$, en O', ce polynôme est infiniment grand de l'ordre m, et il ne devient infini qu'en ce point O', de sorte qu'aux autres points de la sphère les indices ne peuvent être que positifs. La somme de ces indices positifs devant être m, le polynôme, égalé à zéro, admet donc m racines, égales ou inégales, ce qui donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. (*Première partie,* n°s 75 et 76.)

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

§ Ier.

Détermination du nombre des racines d'une équation comprises dans une aire donnée.

203. Nous avons vu (n° 172) que, dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$, l'excès M du nombre des zéros d'une fonction uniforme $f(z)$ sur le nombre de ses infinis est égal au résidu intégral de la fonction $D_z \log f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} d \log f(z).$$

Désignons par la caractéristique Δ l'accroissement d'une fonction non uniforme, représentée par une intégrale, lorsque cette intégrale est prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$. D'après cela, en représentant par z_0 la valeur de la variable z en un point du contour, par z_1 la valeur de la variable au même point, lorsqu'on a fait croître son argument de 2π, de sorte que

$$z_0 = re^{i\varphi}, \qquad z_1 = re^{i(\varphi+2\pi)},$$

et par F_0, F_1 les valeurs correspondantes de la fonction multiforme $F(z)$, on aura,

$$\int_{\mathfrak{A}} dF = \Delta F = F_1 - F_0.$$

On trouvera ainsi, en particulier,

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = \log \frac{f_1}{f_0} = \Delta \log f,$$

et de plus

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z} = \log \frac{z_1}{z_0} = \Delta \log z = 2\pi i.$$

Donc la valeur de l'indice intégral relatif à l'aire $\mathfrak{A}$ pourra se mettre sous la forme

$$M = \frac{\Delta \log f}{\Delta \log z}.$$

Cette expression de la différence entre les nombres de racines des équations

$$f=0, \qquad f=\infty$$

a reçu de Cauchy le nom de *compteur logarithmique*.

204. Supposons, par exemple, que f soit un polynôme entier du degré n,

$$\begin{aligned} f &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right). \end{aligned}$$

Il est clair que l'équation $f=\infty$ ne peut avoir de racines finies. Donc la somme M ne contient aucun indice négatif, et par suite elle est égale au nombre des racines de l'équation $f=0$. Prenons pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon aussi grand que l'on voudra. Nous aurons

$$\log f = n \log z + \log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right),$$

en désignant par x une quantité qui ne devient pas infinie pour $z=\infty$. Donc

$$\Delta \log f = n \,.\, \Delta \log z + \Delta \log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right),$$

d'où

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n + \frac{\Delta \log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right)}{\Delta \log z}.$$

Or, pour z assez grand, le module de $\frac{x}{z}$ devient inférieur à celui de a_0, d'où il suit que $\log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right)$ reprend sa valeur primitive, lorsque z a parcouru la circonférence entière [1].

---

[1] Soit, en effet, mod $\frac{v}{u} < 1$, $\frac{v}{u} = re^{ip}$, r étant <1. On a

$$\Delta \log(u+v) = \Delta \log u + \Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right),$$

$$1 + \frac{v}{u} = 1 + re^{ip} = \rho e^{i\varphi},$$

$$1 + r\cos p = \rho \cos\varphi.$$

Donc

$$\Delta \log\left(a_0 + \frac{x}{z}\right) = \Delta \log a_0 = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n.$$

L'équation $f = 0$ a donc n racines. Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du théorème établi dans la *Première partie* (pages 46 et suivantes).

205. On peut énoncer d'une autre manière le théorème du n° 203. Soit

$$f(z) = u + iv = Re^{iP},$$

d'où

$$u = R\cos P, \quad v = R\sin P,$$

$$\frac{u}{v} = \cot P.$$

Lorsque la variable z a fait le tour de l'aire $\mathfrak{A}$, $f(z)$ reprenant sa valeur, $\log f(z)$ a crû d'un multiple de $2\pi i$, et nous avons vu que cet accroissement $\Delta \log f(z)$ est égal à $2\pi i\, M$ multiplié par l'excès M du nombre des zéros sur le nombre des infinis.

Il s'ensuit de là que

$$\log f(z) = \log R + iP$$

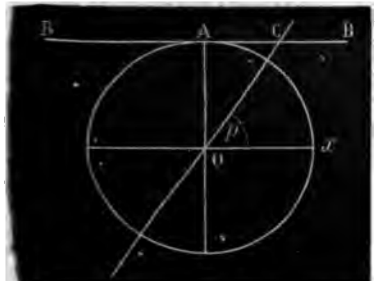
croît de $2M\pi i$, et par conséquent l'argument P croît de $2M\pi$.

Puisque r est < 1, $1 + r\cos p$ sera toujours positif, ainsi que $\cos \varphi$. Donc, l'argument φ de $1 + \frac{v}{u}$ ne croît pas d'une circonférence, et par suite $\log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$ reprend sa valeur primitive, après que z a parcouru le contour de $\mathfrak{A}$. Donc

$$\Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right) = 0, \qquad \Delta \log(u + v) = \Delta \log u.$$

On peut donc, dans la somme $u + v$, négliger la partie v dont le module est constamment $<$ mod u.

Considérons maintenant (*fig.* 32) une droite indéfinie dans les deux sens, mobile autour du centre du cercle sur lequel se mesurent les angles, et tournant dans un sens quelconque. Chaque fois que l'une ou l'autre des directions de la droite passera par le point A, la droite ayant décrit un angle $P = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la cotangente de cet angle P, représentée par la ligne AC, s'annulera. De plus, elle s'annulera en passant d'une valeur positive à une valeur négative, si à ce moment l'angle P va en croissant, et, au contraire, elle s'annulera en passant d'une valeur négative à une valeur positive, si l'angle P va en décroissant.



Si à la fin du mouvement l'angle P a repris sa valeur primitive, la droite OC aura dû passer par le point A autant de fois en allant de droite à gauche qu'en allant de gauche à droite. Si l'angle P a crû de π, OC aura dû passer par A une fois de plus en allant de droite à gauche que de gauche à droite. Si l'angle P a crû de $2M\pi$, OC aura passé $2M$ fois de plus par A de droite à gauche que de gauche à droite. Donc $\cot P$ se sera annulée $2M$ fois de plus en passant du positif ou négatif qu'en passant du négatif ou positif.

Donc, lorsque l'argument P de $f(z)$ croîtra de $2M\pi$, la quantité

$$\frac{u}{v} = \cot P$$

s'annulera $2M$ fois de plus en passant du positif au négatif qu'en passant du négatif au positif.

Si donc on pose

$$f(z) = u + iv,$$

et qu'en faisant parcourir à z le contour entier d'une aire $\mathfrak{A}$, *on compte combien de fois le rapport* $\frac{u}{v}$ *s'annule en passant du positif au négatif, et combien de fois il s'annule en passant du négatif au positif, l'excès du premier nombre de fois sur le second sera double de l'excès du nombre des racines de l'équation* $f(z) = 0$ *comprises dans l'aire* $\mathfrak{A}$ *sur le nombre des racines de l'équation* $f(z) = \infty$ *comprises dans la même aire.*

Si la fonction $f(z)$ n'a aucun infini à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, l'excès en

question sera précisément égal au double du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans l'aire $\mathfrak{A}$.

206. Soit, en particulier, une fonction entière et rationnelle

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m .$$

Cette fonction ne deviendra pas infinie pour des valeurs finies de z. Prenons pour contour un cercle de rayon infini r. Le premier terme $a_0 z^m$ deviendra infiniment grand par rapport à la somme des autres, et l'on pourra poser

$$f(z) = a_0 r^m e^{mip} (1 + \varepsilon),$$

ε étant infiniment petit.

Soit maintenant

$$a_0 = \lambda e^{i\theta}.$$

On aura, à des quantités près infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve,

$$u = \lambda r^m \cos (mp + \theta), \qquad v = \lambda r^m \sin (mp + \theta),$$

d'où

$$\frac{u}{v} = \cot (mp + \theta),$$

à un infiniment petit près.

Si maintenant z fait le tour du cercle, p croîtra de 2π, et $mp + \theta$ de $2m\pi$. Donc $\cot (mp + \theta)$ s'annulera $2m$ fois en passant du positif au négatif, sans jamais s'annuler en passant du négatif au positif. Donc, l'équation $f(z) = 0$ a m racines dans l'intérieur du cercle infini.

207. Pour déterminer la différence $\nu - \nu'$ entre le nombre de fois ν que $\frac{u}{v}$ passe en s'annulant du positif au négatif et le nombre de fois ν' qu'il passe du négatif au positif, tandis que z parcourt le contour de $\mathfrak{A}$, Sturm a fait connaître le procédé suivant, qui est une extension de celui qu'il avait donné pour le cas des racines réelles.

Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne qui se compose de parties $C, C', \ldots$, sur chacune desquelles x et y soient exprimées en fonctions rationnelles d'une troisième variable t. Pour chaque partie, u et v seront exprimés également en fonctions rationnelles de t, de sorte

que le rapport $\frac{u}{v}$ se changera dans le rapport $\frac{U}{V}$ de deux fonctions entières de t. Le problème se ramènera alors à trouver la différence $\nu - \nu'$ pour chacune des parties C du contour. La somme de toutes ces valeurs donnera le nombre $2M$.

Divisons maintenant U par V; soit $-V_1$ le reste de la division. Divisons de même V par V_1, et soit $-V_2$ le reste de la division, et ainsi de suite ([1]). On finira par arriver à un reste constant $-V_n$. Car U et V, ne s'annulant pas à la fois sur le contour, n'ont pas de facteur commun. Soient maintenant, dans le sens du mouvement positif, a et b les extrémités initiale et finale de la portion de contour C. Alors $\nu - \nu'$ sera égal à l'excès du nombre de variations que la suite

$$U, V, V_1, \ldots, V_n$$

présente au point b sur le nombre des variations que la même suite présente au point a.

La démonstration est la même que pour le théorème relatif aux racines réelles. On fait voir qu'un changement de signe de l'une des quantités V, $V_1, \ldots$ n'a pas d'influence sur le nombre des variations. U et V ne peuvent pas changer de signe en même temps. Donc, si $U = 0$ pour $t = c$, on aura à considérer les cas suivants, ε désignant un accroissement compté positivement de a vers b :

	U	V	U	V	U	V	U	V
$c - \varepsilon$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$c + \varepsilon$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

Dans le 1[er] et le 4[e] cas, $\frac{U}{V}$ passe de $+$ à $-$; donc, dans le passage par le point c, ν augmente d'une unité, et en même temps il se produit une variation de plus; de sorte que l'accroissement du nombre des variations donne bien l'accroissement de $\nu - \nu'$.

Dans le 2[e] et le 3[e] cas, $\frac{U}{V}$ passe de $-$ à $+$, ν' croît d'une unité, et par suite $\nu - \nu'$ diminue d'une unité. Mais en même

---

([1]) V peut être de degré plus élevé que U, auquel cas le reste de la division de U par V est U, et alors $-V_1 = U$.

temps le nombre des variations diminue aussi d'une unité. Donc le théorème continue à subsister. Or, comme il ne peut y avoir de changement dans le nombre des variations que lorsqu'on passe par un point c, le théorème est complètement démontré.

208. Pour mettre en pratique cette méthode, prenons pour contour celui d'un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes coordonnées, et qui ait pour abscisses extrêmes x_0, X, et pour ordonnées extrêmes y_0, Y, en supposant

$$x_0 < X \ , \ y_0 < Y.$$

Le contour se composera de quatre parties :

C correspondant à $y = y_0$, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$;
C' .... $x = X$, ... $y = y_0$ .... $y = Y$;
C'' .... $y = Y$, ... $x = X$ .... $x = x_0$;
C''' .... $x = x_0$, ... $y = Y$ .... $y = y_0$.

Ainsi, dans chacune des quatre portions, U et V ne dépendront que d'une seule variable, savoir, de x pour C et C'', de y pour C' et C'''.

Si l'on veut obtenir toutes les racines d'une équation, on emploiera d'abord la méthode connue de Sturm pour trouver les racines réelles

$$z = a_1 \,, \quad z = a_2 \,, \quad \ldots, \quad z = a_k \,.$$

On divisera ensuite $f(z)$ par le produit

$$(z - a_1)\,(z - a_2)\,\ldots\,(z - a_k),$$

ce qui donnera une équation $\varphi(z) = 0$, qui n'aura plus de racines réelles, situées sur l'axe de x. On pourra prendre alors cet axe lui-même pour un des côtés du rectangle. En faisant d'abord

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = 0 \,, \quad X = +\infty, \quad Y = +\infty,$$

on obtiendra le nombre des racines complexes $x + iy$ pour lesquelles le coefficient y de i est positif. Puis, en faisant

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = -\infty, \quad X = +\infty, \quad Y = 0,$$

on trouvera de même le nombre des racines complexes dans lesquelles le coefficient de i est négatif.

On partagera ensuite le plan en bandes par des parallèles à l'axe

des z; puis on subdivisera par des parallèles à l'axe des y chacune des bandes qui renfermeront des racines. De cette manière, les racines se trouveront resserrées dans des limites assez étroites pour qu'on leur applique la méthode d'approximation de Newton.

Ici, comme dans la recherche des racines réelles, il n'est pas absolument nécessaire que l'équation soit réduite à n'avoir plus que des racines simples. Cependant, il y a naturellement avantage à commencer par l'application de la méthode des racines multiples, afin d'opérer ensuite sur une équation plus simple.

Il est facile de déterminer les racines imaginaires pures, qui sont les racines communes aux deux équations

$$u(0,y)=0, \qquad v(0,y)=0,$$

et qui s'obtiendront en égalant à zéro le facteur commun à ces deux équations. Après les avoir supprimées, on partagera le plan en quatre parties correspondantes aux quatre angles des axes coordonnés.

§ II.

Développement des fonctions en séries périodiques.

209. Du théorème de Laurent, démontré au n° 155, il résulte que, si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'intervalle compris entre deux cercles concentriques, de rayons r et R, on pourra développer $f(z)$ en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z-c$, c représentant le centre commun des deux cercles. On aura de cette manière

$$\begin{aligned} f(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \cdots \\ + A_{-1}(z-c)^{-1} + A_{-2}(z-c)^{-2} + \cdots, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$z-c = re^{ip},$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(c+re^{ip}) = A_0 + A_1 re^{ip} + A_2 r^2 e^{2ip} + \cdots \\ + A_{-1} r^{-1} e^{-ip} + A_{-2} r^{-2} e^{-2ip} + \cdots, \end{aligned}$$

chaque coefficient A_n, d'indice positif, nul ou négatif, étant déterminé par la formule générale

$$A_n = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(c+\rho e^{i\varphi})e^{-ni\varphi}\,d\varphi,$$

où ρ est un module quelconque compris entre r et R.

Si dans le second membre de la série (1) on remplace l'argument p par $p + 2k\pi$, ce second membre ne change pas. Donc le second membre est une *fonction périodique* de l'angle p, et par conséquent il en est de même du premier membre, tant que l'équation (1) subsiste. C'est ce qui résulte d'ailleurs de la supposition que la fonction $f(z)$ est uniforme dans l'aire considérée; car, puisque l'on a

$$c + re^{ip} = c + re^{i(p+2k\pi)},$$

il en résulte

$$f(c + re^{ip}) = f(c + re^{i(p+2k\pi)}),$$

c'est-à-dire, si l'on pose $f(c+re^{ip}) = F(p)$,

$$F(p) = F(p + 2k\pi).$$

Ainsi, une fonction uniforme de $z = c + re^{ip}$ est une *fonction périodique* de l'argument p, et la série qui exprime le développement de la fonction suivant les puissances de $z - c = re^{ip}$ est nécessairement une *série périodique* par rapport à l'argument p.

210. On peut présenter le développement (1) sous forme trigonométrique, en remplaçant chaque exponentielle e^{nip} par $\cos np + i \sin np$. Il vient alors, en posant

$$A_0 = B_0,\quad A_n r^n + A_{-n} r^{-n} = B_n,$$

$$i(A_n r^n - A_{-n} r^{-n}) = C_n,$$

$$F(p) = B_0 + B_1 \cos p + B_2 \cos 2p + \cdots$$
$$+ C_1 \sin p + C_2 \sin 2p + \cdots.$$

On voit aisément que, si $F(p)$ est une fonction *paire* de p, telle que $F(-p) = F(+p)$, le développement devra se réduire à la première ligne, et ne contenir que des cosinus. Au contraire, si $F(p)$ est une fonction *impaire* de p, telle que $F(-p) = -F(+p)$, le développement devra se réduire à la seconde ligne, et ne contenir que des sinus.

211. Appliquons, par exemple, ces formules au développement de la *fonction perturbatrice.*

Soit $\mathbf{r}$ la distance de deux astres, s un nombre entier quelconque. On veut développer la fonction

$$\Omega = \frac{1}{\mathbf{r}^s}$$

en une série coordonnée suivant les puissances de l'exponentielle

$$z = e^{i\psi},$$

qui a pour argument l'anomalie excentrique ψ de l'un des astres.

La distance mutuelle $\mathbf{r}$ est déterminée par une équation de la forme

$$\mathbf{r}^2 = H - K\cos(\psi - \alpha) + J\cos 2\psi,$$

H, K, α, J étant des quantités réelles, indépendantes de ψ. On fait voir facilement que la valeur de $\mathbf{r}^2$ peut se décomposer en quatre facteurs du premier degré par rapport à z. Les racines de l'équation $\mathbf{r}^2 = 0$, du 4e degré en z, sont de la forme

$$ae^{i\theta}, \quad \frac{1}{a}e^{i\theta}, \quad be^{-i\theta}, \quad \frac{1}{b}e^{-i\theta},$$

a, b, θ désignant des constantes réelles, et l'on peut supposer

$$0 < b < a < 1.$$

La valeur de $\mathbf{r}^2$ prendra alors la forme

$$\mathbf{r}^2 = \frac{J}{2ab}\left(1 - ae^{-i\theta}.z\right)\left(1 - ae^{i\theta}.\frac{1}{z}\right)\left(1 - be^{i\theta}.z\right)\left(1 - be^{-i\theta}.\frac{1}{z}\right),$$

d'où l'on tire

$$\Omega = \left(\frac{2ab}{J}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1 - ae^{-i\theta}.z\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 - ae^{i\theta}.\frac{1}{z}\right)^{-\frac{s}{2}} \times \left(1 - be^{i\theta}.z\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 - be^{-i\theta}.\frac{1}{z}\right)^{-\frac{s}{2}}.$$

Bien que la fonction Ω se présente sous la forme d'une fonction à deux déterminations (n° 120), nous verrons cependant dans la *Troisième partie* que cette fonction peut être considérée comme

uniforme, lorsqu'on fait varier z d'une manière continue dans l'intervalle de deux cercles passant par deux points-racines consécutifs de l'équation $r^2 = 0$. Donc la fonction sera développable par le théorème de Laurent pour toute valeur de z dont le module sera compris entre a et $\frac{1}{a}$, et en particulier pour le cas que nous considérons, où le module de z est égal à l'unité. On aura donc, en faisant, dans la formule des numéros précédents,

$$r = \rho = 1,$$

$$\begin{aligned}\Omega &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \\ &\quad + A_{-1} z^{-1} + A_{-2} z^{-2} + \cdots \\ &= A_0 + A_1 e^{i\psi} + A_2 e^{2i\psi} + \cdots \\ &\quad + A_{-1} e^{-i\psi} + A_{-2} e^{-2i\psi} + \cdots,\end{aligned}$$

et pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative, de n,

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega e^{-ni\psi} d\psi.$$

Ω étant une fonction réelle de ψ, les valeurs de A_n, A_{-n}, qui correspondent à deux indices égaux et de signe contraire, seront deux quantités complexes conjuguées, de la forme

$$M_n e^{iN_n}, \qquad M_n e^{-iN_n}.$$

En réunissant donc les termes de développement qui correspondent à ces deux indices, on aura

$$\begin{aligned}A_n z^n + A_{-n} z^{-n} &= M_n \left(z^n e^{iN_n} + z^{-n} e^{-iN_n} \right) \\ &= 2 M_n \cos(n\psi + N_n),\end{aligned}$$

M_n et N_n étant des quantités réelles.

212. Sous la forme que nous avons donnée au développement (1) de $f(c + re^{ip}) = F(p)$, la variable p est supposée n'admettre que des valeurs réelles. Il est facile de transformer ce développement de manière que la variable réelle p soit remplacée par une variable complexe, sans que la fonction et la série cessent d'être périodiques par rapport à cette nouvelle variable.

Il suffit, pour cela, de faire

$$z - c = re^{ip} = e^{-q+ip} = e^{i(p+iq)},$$

d'où

$$f(c + re^{ip}) = f(c + e^{i(p+iq)}),$$

et, en posant

$$p + iq = \frac{2\pi w}{\lambda},$$

$$f(z) = f\left(c + e^{\frac{2\pi i w}{\lambda}}\right) = F(w),$$

$$\begin{aligned} (3) \qquad F(w) = A_0 + A_1 e^{\frac{\pi i w}{\lambda}} + A_2 e^{\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \cdots \\ + A_{-1} e^{-\frac{2\pi i w}{\lambda}} + A_{-2} e^{-\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \cdots . \end{aligned}$$

La fonction et la série ne changent pas, lorsqu'on fait croître $\frac{2\pi i w}{\lambda}$ de $2k\pi i$, ou w de $k\lambda$, de sorte qu'on a

$$F(w) = F(w + k\lambda).$$

La fonction est donc périodique par rapport à la variable w, la période étant la quantité réelle ou complexe λ.

En introduisant la même transformation dans la formule (2) qui détermine le coefficient A_n, et posant

$$\zeta = \rho e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + i\chi)} = e^{\frac{2\pi i \omega}{\lambda}},$$

d'où

$$\omega = \frac{\lambda}{2\pi}(\varphi + i\chi),$$

il vient

$$A_n = \int_0^{2\pi} F\left[\frac{\lambda}{2\pi}(\varphi + i\chi)\right] e^{-ni(\varphi + i\chi)}\, d\varphi.$$

213. Par suite du changement de variable, le contour de l'aire dans laquelle était renfermée la variable indépendante z va changer de forme. Voyons par quelles lignes seront remplacés les deux cercles qui limitaient cette aire.

Il faut pour cela voir quel lieu décrit le point ζ, lorsqu'on laisse constant le module ρ de l'expression

$$\rho e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+i\chi)} = e^{\frac{2\pi i \upsilon}{\lambda}},$$

c'est-à-dire lorsque le point z décrit autour du centre c un cercle de rayon ρ. Si l'on fait.

$$\upsilon = \mathrm{r} e^{i\varpi}, \qquad \lambda = l\, e^{i\theta},$$

il vient

$$\mathrm{r} e^{i\varpi} = \frac{l}{2\pi} e^{i\theta} (\varphi + i\chi),$$

d'où

$$\frac{2\pi \mathrm{r}}{l} \sin(\varpi - \theta) = \chi,$$

$$\frac{2\pi \mathrm{r}}{l} \cos(\varpi - \theta) = \varphi.$$

Donc, pour que ρ et, par suite, χ restent constants, il faut et il suffit que $\mathrm{r} \sin(\varpi - \theta)$ reste aussi constant.

Or $\mathrm{r} \sin(\varpi - \theta) =$ constante est l'équation, entre les coordonnées polaires r et ϖ, d'une droite faisant avec l'axe des x l'angle θ, et parallèle par conséquent à la droite menée de l'origine au point λ. Donc le cercle de rayon ρ et de centre c se changera en une droite menée à la distance $\frac{l\chi}{2\pi} = \frac{l}{2\pi} \log \frac{1}{\rho}$ de l'origine, et parallèle à la droite $O\lambda$.

Les deux cercles extrêmes, des rayons r_0 et r_1, menés par deux points de discontinuité consécutifs z_0, z_1 de la fonction $f(z)$, se changeront en deux droites, menées parallèlement à $O\lambda$ par les points de discontinuité correspondants w_0, w_1 de la fonction $F(w)$, et la droite qui remplace le cercle de rayon ρ sera une parallèle quelconque aux deux autres droites, comprise entre ces deux droites.

Si l'on désigne par h_0, h_1 les distances des points z_0, z_1 à la droite $O\lambda$, la droite intermédiaire sera à une distance h de $O\lambda$, telle qu'on aura

$$h_0 < h < h.$$

On aura alors

$$\chi = \frac{2\pi h}{l}$$

et en faisant

$$\varphi = \frac{2\pi\omega}{l},$$

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F\left(\frac{\lambda(\omega + ih)}{l}\right) e^{\frac{2n\pi}{l}(h - i\omega)} d\omega.$$

214. Lorsqu'on voudra obtenir le développement de $f(z)$ pour un point z situé en dehors de l'intervalle des cercles décrits par les points z_0, z_1, par exemple, dans l'intervalle compris entre les cercles menés par z_1 et par le point de discontinuité suivant z_2, on devra donner à ρ une autre valeur, comprise entre les distances cz_1 et cz_2, et substituer cette nouvelle valeur dans l'expression (2) de A_n.

De même, lorsqu'on voudra développer $F(w)$ pour un point w situé en dehors des parallèles à 0λ menées par w_0, w_1, pour un point compris entre les parallèles menées par w_1 et le point de discontinuité suivant w_2, on devra prendre pour h une nouvelle valeur comprise entre les distances h_1, h_2 de w_1, w_2 à 0λ, et substituer cette nouvelle valeur dans la formule (4).

215. On peut toujours, par un changement de variable, qui revient à faire tourner l'axe des x de l'angle θ, faire ensorte que la période λ de la fonction $F(w)$ soit réelle. Il suffit, pour cela, l étant le module de λ, de poser

$$\frac{2\pi w'}{l} = \frac{2\pi w}{\lambda} = \frac{2\pi}{l} we^{-i\theta},$$

c'est-à-dire d'introduire, au lieu de w, la variable proportionnelle

$$w' = we^{-i\theta}.$$

Alors la fonction

$$F(w) = F(w'e^{i\theta}) = F_1(w')$$

aura pour période, par rapport à w', la quantité réelle l.

Ainsi, on peut supposer que l'on ait multiplié w par un facteur tel que la période soit une quantité réelle l, et que les *bandes de convergence*, qui limitent l'étendue dans laquelle chaque développement est possible, deviennent toutes parallèles à l'axe des x.

Si l'on partage alors le plan en bandes verticales, de largeur l, par des parallèles à l'axe des y, la marche de la fonction $F_1(w')$ sera identique dans toutes les bandes verticales, comme nous en avons déjà vu un exemple au n° 83.

216. Si nous reprenons maintenant les notations du n° 200, en y faisant seulement $\lambda = l$, les formules deviendront

$$(5) \qquad F(w) = F(w+kl) = A_0 + A_1 e^{\frac{2\pi i w}{l}} + A_2 e^{\frac{4\pi i w}{l}} + \cdots$$
$$+ A_{-1} e^{-\frac{2\pi i w}{l}} + A_{-2} e^{-\frac{4\pi i w}{l}} + \cdots,$$

$$(6) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(\omega + ih) e^{\frac{2n\pi}{l}(h - i\omega)} d\omega.$$

Enfin, par un changement de variable, on peut amener l'axe des x à l'intérieur de la bande de convergence, et alors rien n'empêche de supposer $h = 0$. La formule (6) se simplifie, et l'on a

$$(7) \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(\omega) e^{-\frac{2n\pi i\omega}{l}} d\omega.$$

217. Les formules (5) et (7) donnent, comme cas particulier, le développement en série périodique d'une fonction quelconque de la variable réelle w, dont on connaît toutes les valeurs dans l'intervalle compris entre $w = 0$ et $w = l$.

On démontre même que les formules subsistent lorsqu'on fait passer l'axe des x par des points de discontinuité de la fonction, pourvu que ces discontinuités soient telles que la fonction $F(w)$ reste toujours uniforme et finie. Cela revient à dire que les formules (5) et (7) subsistent encore, pourvu que ces points (nécessairement de *seconde espèce*) ne soient pas des infinis.

Si pour une valeur $w = a$, la fonction $F(w)$ passe brusquement d'une valeur finie b à une valeur finie différente c, le développe-

ment représentera, pour $w = a$, la demi-somme des valeurs b et c, c'est-à-dire

$$\lim \frac{F(a-\varepsilon) + F(a+\varepsilon)}{2}.$$

La démonstration directe de ce théorème, qui n'appartient plus, à proprement parler, à la théorie des quantités complexes, se trouve dans la plupart des Traités de Calcul intégral. Elle est présentée avec plus de développement et de rigueur dans les Mémoires de Lejeune-Dirichlet (*Crelle's Journal*, T. IV, p. 94, et *Dove's Repertorium der Physik*. T. I, p. 152), et dans le *Compendium der höheren Analysis* de Schlömilch, 2e éd. (T. II, p. 115.) *Voy.* encore le Mémoire posthume de Riemann, intitulé : *Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.*

§ III.

Séries de Bürmann et de Lagrange.

218. Nous avons vu (art. 149) que si $f(w)$ est une fonction de w, uniforme et continue pour toutes les valeurs de cette variable renfermées dans un certain cercle $\mathfrak{C}$ (que nous supposerons, pour plus de simplicité, avoir son centre à l'origine O), cette fonction pourra se développer en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de w,

$$(1) \qquad f(w) = A_0 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

Supposons maintenant que l'on change de variable, et que w représente une fonction donnée

$$w = \varphi(z)$$

de la nouvelle variable z, qui soit uniforme et continue dans une portion du plan, laquelle renferme nécessairement le point z_0 correspondant à l'origine de w et tel que

$$\varphi(z_0) = 0.$$

Si l'on fait

$$f(w) = f[\varphi(z)] = F(z),$$

$F(z)$ sera une fonction de z uniforme et continue tout autour du point z_0, dans toute l'étendue où les fonctions φ et f seront elles-mêmes uniformes et continues.

Si l'on substitue pour w sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra pour $F(z)$ un développement ordonné suivant les puissances entières et positives de la fonction $\varphi(z)$,

$$(2) \qquad F(z) = A_0 + A_1\varphi(z) + A_2[\varphi(z)]^2 + \cdots$$

Il reste maintenant à trouver l'expression des coefficients A_n du développement, et à déterminer l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$ où doivent être renfermées les valeurs de z.

219. Considérons le résidu [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{F'(\zeta)d\zeta}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}.$$

Tant que la dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annulera pas dans l'aire $\mathfrak{A}$ considérée, la valeur de ce résidu sera (art. 140)

$$\lim_{\zeta=z}(\zeta-z)\frac{F'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{\lim F'(\zeta)}{\lim\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}} = \frac{F'(z)}{\varphi'(z)}.$$

Si, dans la même aire, le module de $\varphi(\zeta)$, pour un point quelconque ζ du contour, est constamment plus grand que le module de $\varphi(z)$, on pourra développer $\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}$ en une série convergente, suivant les puissances de $\varphi(z)$,

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(\zeta)}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} + \left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\right)^2 + \cdots\right],$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{2\pi i}F'(\zeta)d\zeta$, et intégrant tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$,

$$(3) \qquad \frac{F'(z)}{\varphi'(z)} = B_1 + B_2\varphi(z) + B_3[\varphi(z)]^2 + \cdots,$$

les coefficients de ce développement étant donnés par la formule (art. 168)

---

[1] *Voy.* Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV, p. 381, 1850).

$$(4) \qquad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n} = \mathcal{E}_{z_0} \frac{F(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n},$$

$\zeta = z_0$ étant le seul infini de la fonction sous le signe $\mathcal{E}$, pourvu que, comme nous le supposerons, l'équation $\varphi(z) = 0$ n'ait pas d'autre racine que $z = z_0$ dans l'aire $\mathfrak{A}$.

220. La condition

$$\text{mod.}\,\varphi(\zeta) > \text{mod.}\,\varphi(z)$$

sera remplie, si l'on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ la courbe que l'on détermine en égalant le module de $\varphi(z)$ à la plus petite des valeurs de ce module qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

En effet, le module R de $\varphi(z)$, qui s'annule pour $z = z_0$, va nécessairement en croissant, lorsqu'on part de ce point, puisqu'il ne peut recevoir de valeurs négatives. Traçons autour de z_0 une suite de courbes que nous désignerons par (R), dont chacune correspondra à une valeur constante de ce module R. Si l'on pose, u et v étant réels,

$$w = \varphi(z) = u + iv,$$

l'équation générale de ces courbes sera

$$u^2 + v^2 = R^2.$$

Deux courbes quelconques de cette suite ne se couperont pas, sans quoi il faudrait que $u^2 + v^2$ admît deux valeurs différentes pour le point d'intersection, et alors u et v, et par suite $\varphi(z)$ ne seraient plus des fonctions uniformes. Donc ces courbes iront en s'élargissant à mesure que le module R croîtra, et chacune renfermera entièrement toutes les précédentes.

Il en sera de même tant que le module R n'aura pas atteint un maximum. Or, pour ce maximum on doit avoir

$$d(u^2 + v^2) = 0,$$

ou, en reprenant les notations de l'article 106,

$$(uX + vY)\,dx + (vX - uY)\,dy = 0.$$

x et y étant deux variables indépendantes, il en résulte

$$uX + vY = 0,$$
$$vX - uY = 0,$$

d'où

$$X = 0\,, \qquad Y = 0\,,$$

et par suite

$$\varphi'(z) = X + iY = 0\,.$$

Donc, *toutes les fois que le module d'une fonction $\varphi(z)$ passe par un maximum (ou par un minimum), la dérivée $\varphi'(z)$ de la fonction s'annule.*

Il s'ensuit de là que, si R_1 est le plus petit des modules de $\varphi(z)$ qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$, R_1 sera égal au plus petit des modules maxima, ou lui sera inférieur. Si donc on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ la courbe (R_1), donnée par l'équation

$$u^2 + v^2 = R_1^2\,,$$

$\varphi'(z)$ sera différent de zéro dans toute l'étendue de cette aire, et, si z est un point de l'intérieur et ζ un point du contour, on aura toujours.

$$\operatorname{mod} \varphi(\zeta) > \operatorname{mod} \varphi(z)\,.$$

Si, de plus, la courbe (R_1) est contenue tout entière dans l'*aire de continuité* $\mathfrak{B}$ de la fonction $F(z)$ et par suite de sa dérivée $F'(z)$ (art. 147), la fonction $\dfrac{F'(z)}{\varphi'(z)}$ sera uniforme et continue dans toute l'aire limitée par (R_1), et le développement donné par les formules (3) et (4) sera possible.

Si (R_1) sortait de l'aire $\mathfrak{B}$ dans laquelle $F(z)$ est uniforme et continue, on remplacerait (R_1) par une autre courbe (R_1') de la suite (R), correspondante à un module $< R_1$, et contenue entièrement dans $\mathfrak{B}$.

221. Cela posé, multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\varphi'(z)\,dz$, et intégrons de part et d'autre entre les limites z_0 et z (art. 133). Si l'on pose

$$A_0 = F(z_0)\,, \qquad A_n = \frac{B_n}{n}\,,$$

en remarquant que $\varphi(z_0) = 0$, il viendra

$$F(z) = A_0 + A_1\varphi(z) + A_2[\varphi(z)]^2 + \cdots, \tag{5}$$

les coefficients A_n ayant pour expression générale

$$(6)\quad A_n = \frac{1}{n} \mathcal{E}_{z_0} \frac{F'(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n} = \frac{1}{n!} \lim_{\zeta = z_0} \mathrm{D}_\zeta^{n-1} \frac{(\zeta - z_0)^n F'(\zeta)}{[\varphi(\zeta)]^n}$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{\varepsilon=0} \mathrm{D}_\varepsilon^{n-1} \frac{\varepsilon^n F'(z_0+\varepsilon)}{[\varphi(z_0+\varepsilon)]^n}.$$

Ces formules représentent la série de Bürmann. *Voy.* le tome II des *Mémoires de l'Institut*, an VII, page 14.

222. Pour obtenir la formule (5), nous avons intégré deux fois une série convergente, et nous avons admis que la série résultante est convergente. On pourrait le déduire d'une proposition générale analogue à celle que l'on démontre pour les séries de quantités réelles, et qui s'établirait de la même manière. On peut aussi s'en assurer, comme nous l'avons fait pour les théorèmes de Cauchy et de Laurent, par la considération du reste de la série.

Si l'on arrête au $n^{\text{ième}}$ terme le développement de $\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}$, le reste de la série sera exactement égal à

$$\frac{[\varphi(z)]^n}{[\varphi(\zeta)]^n[\varphi(\zeta)-\varphi(z)]},$$

et par suite le reste de la série (3) sera

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}[\varphi(z)]^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n[\varphi(\zeta)-\varphi(z)]}.$$

Le module P de $\varphi(\zeta)$ est constant et plus grand que le module R de $\varphi(z)$. On voit donc, en faisant sortir P du signe $\int$, que cette quantité se réduit à une fonction finie de z et de ζ, multipliée par $\left(\frac{R}{\mathrm{P}}\right)^n$, c'est-à-dire par un facteur infiniment petit pour n infini. Donc la série (3) est convergente.

On obtiendra maintenant le reste de la série (5) en multipliant l'expression infiniment petite (7) par $\varphi'(z)\,dz = d\varphi(z)$, et intégrant entre les limites z_0 et z. Si l'on pose $\varphi(z) = R\,\chi(z)$, R étant le module correspondant à la limite supérieure z, on obtiendra pour résultat une intégrale finie multipliée encore par le facteur infiniment petit $\left(\frac{R}{\mathrm{P}}\right)^n$, et l'on en conclura que la série (5) est également convergente.

On pourrait remarquer que le reste de la série (5) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n}\int_0^{\varphi(z)} \frac{Z^n dZ}{\varphi(\zeta)-Z}\,,$$

expression qu'il serait facile de transformer en effectuant l'intégration par rapport à Z. On obtiendrait ainsi le reste de la série de Bürmann sous la forme d'un résidu intégral, comme on l'a fait pour la série de Cauchy (art. 149). Nous n'insisterons pas davantage sur cette formule, trop compliquée pour être d'une utilité pratique.

223. Donnons quelques applications de la série de Bürmann.

I. Supposons

$$\varphi(z) = (z-a)(z-b).$$

Les courbes (R) seront données par l'équation

$$\text{mod.}\,(z-a)(z-b) = R\,,$$

ou

$$\text{mod.}\,(z-a) \times \text{mod.}\,(z-b) = R\,.$$

Or mod. $(z-a)$ et mod. $(z-b)$ sont les distances du point z aux deux points a et b. Ces courbes jouissent donc de la propriété que le produit des distances de chacun de leurs points aux deux points fixes a, b est constant. Ce sont donc des ovales de Cassini. Pour R moindre que le carré de la moitié de la distance $\overline{ab}$ des deux foyers, chaque courbe se compose de deux ovales séparées, entourant l'une le point a, l'autre le point b. Pour $R = \left(\frac{1}{2}\overline{ab}\right)^2$, les deux ovales se rejoignent pour former une lemniscate. Pour une valeur de R plus grande, on a une courbe unique, renfermant les deux zéros a et b de la fonction.

La dérivée $\varphi'(z) = 2z - a - b$ s'évanouit pour $z = \frac{a+b}{2}$, expression qui, substituée dans $\varphi(z)$, donne pour valeur du module

$$\text{mod.}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{ab}\right)^2\,.$$

Il faut donc prendre $R < \left(\frac{1}{2}\overline{ab}\right)^2$, et par suite choisir pour $\mathfrak{A}$ celle des deux ovales dont se compose alors la courbe, qui entoure le foyer dont z doit être le plus voisin, le foyer a, par exemple.

On a alors, en supposant cette ovale assez petite pour que la fonction $F(z)$ reste uniforme et continue à son intérieur,

$$F(z) = F(a) + A_1(z-a)(z-b) + A_2(z-a)^2(z-b)^2 + \cdots,$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \lim_{\zeta=a} D_\zeta^{n-1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta-b)^n}$$
$$= \frac{1}{n!} D_a^{n-1} \frac{F(a)}{(a-b)^n}.$$

Soit, par exemple,

$$a = 0, \quad b = 1, \quad F(z) = (1-z)^\mu,$$

d'où $R < \frac{1}{4}$; et supposons que la fonction $F(z)$, uniforme dans l'aire $\mathfrak{A}$ qui ne renferme pas le point de ramification $z = 1$, parte du point $z = 0$ avec la valeur initiale $1^\mu = 1$. Il viendra

$$(1-z)^\mu = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-2)}{2!} z^2(1-z)^2$$
$$- \frac{\mu(\mu-3)(\mu-4)}{3!} z^3(1-z)^3 + \cdots.$$

224. II. *Inversion des fonctions.*

Étant donnée entre w et z une équation de la forme

$$w = \varphi(z),$$

la série de Bürmann permet de développer z, ou plus généralement une fonction donnée $F(z)$ de z, en une série ordonnée suivant les puissances de w, ce qui donne l'expression de la fonction *inverse* de la fonction φ. La valeur de z en fonction de w pouvant offrir plusieurs déterminations, on obtiendra plusieurs formes de développement, correspondantes aux différentes aires $\mathfrak{A}$ qui entourent les diverses racines z_0 de l'équation $\varphi(z) = 0$, et à l'intérieur de chacune desquelles z est une fonction uniforme de w.

Soit, par exemple, l'équation

$$w = ze^{-z}.$$

On a ici $z_0 = 0$, $\varphi'(z) = (1-z)e^{-z}$. Pour la racine $z = 1$ de $\varphi'(z) = 0$, on a mod. $\varphi(z) = \frac{1}{e}$. Le contour à l'intérieur duquel doit se mouvoir z est donc déterminé par l'équation

$$\text{mod. } ze^{-z} = \frac{1}{e},$$

ou

$$x^2 + y^2 = e^{2(x-1)}.$$

Pour un point de l'intérieur de ce contour, on aura

$$F(z) = F(0) + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$

$$A_n = \lim_{\zeta=0} \frac{1}{n!} D_\zeta^{n-1} \left[e^{n\zeta} F'(\zeta) \right].$$

225. III. *Série de Lagrange.*

La quantité z étant donnée par une équation de la forme

$$z = c + wf(z),$$

on propose de développer z, ou plus généralement $F(z)$ suivant les puissances de w.

On aura dans ce cas

$$w = \varphi(z) = \frac{z-c}{f(z)},$$

d'où l'on tire $z_0 = c$, en admettant que $f(c)$ ne soit pas nul. L'équation $\varphi'(z) = 0$ devient, en supposant que $f(z)$ reste fin dans l'aire considérée,

$$f(z) - (z-c) f'(z) = 0.$$

Parmi les racines de cette équation, on prendra celle qui donnera pour mod. $\frac{z-c}{f(z)}$ la plus petite valeur R_1, et le contour de l'aire où z devra être contenu sera déterminé par l'équation

$$\text{mod.} \frac{z-c}{f(z)} = R_1.$$

On aura alors

$$F(z) = F(c) + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$

$$A_n = \frac{1}{n!} D_c^{n-1} \left\{ F'(c) . [f(c)]^n \right\}.$$

Soit, en particulier, l'équation du problème de Kepler.

$$c = z - w \sin z,$$

c représentant l'anomalie excentrique, z l'anomalie moyenne, et w l'excentricité. L'équation $\varphi'(z) = 0$ devient ici

$$\frac{\sin z-(z-c)\cos z}{\sin^2 z}=0$$

ou

$$z-c-\operatorname{tang} z=0\,,$$

c'est-à-dire

$$x+iy-\frac{\operatorname{tang} x+i\operatorname{Th} y}{1-i\operatorname{tang} x\operatorname{Th} y}=c$$

équation qui se partage, pour c réel, en deux autres,

$$x-c=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\operatorname{Ch} 2y}\,,\qquad y=\frac{\operatorname{Sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{Ch} 2y}\,.$$

Ne pouvant résoudre ces équations tant que la valeur numérique de c n'est pas donnée, cherchons du moins quelle est la plus petite valeur que puisse recevoir le module de w, pour une valeur quelconque de c.

La seconde des équations précédentes peut se mettre sous la forme

$$2\sin^2 x=1-\frac{\operatorname{Sh} 2y}{y}+\operatorname{Ch} 2y\,.$$

Le second membre croissant avec y, et le premier membre ayant pour valeur maximum 2, il s'ensuit que y ne pourra surpasser la racine réelle de l'équation

$$1=\operatorname{Ch} 2y-\frac{\operatorname{Sh} 2y}{y}\,,$$

ou

$$\frac{1}{y}=\frac{\operatorname{Ch} 2y-1}{\operatorname{Sh} 2y}=\operatorname{Th} y\,,$$

ou enfin

$$y=\frac{1}{\operatorname{Th} y}\,.$$

Cette équation, résolue par interpolation à l'aide d'une Table de fonctions hyperboliques [1] donne approximativement

$$y=1{,}1997.$$

---

[1] *Voy.*, par exemple, notre *Recueil de Formules et de Tables numériques*, page 50.

Si maintenant, dans la valeur de w, savoir,

$$w = \frac{z-c}{\sin z},$$

on remplace $z-c$ par sa valeur tang z, tirée de $\varphi'(z) = 0$, il vient

$$w = \text{séc}\, z = 2\,\frac{\text{Ch}y\cos x + i\,\text{Sh}y\sin x}{\cos 2x + \text{Ch}\,2y},$$

expression dont le module a pour valeur

$$R = \sqrt{\frac{2}{\cos 2x + \text{Ch}\,2y}},$$

ou, en remplaçant $\cos 2x + \text{Ch}\,2y$ par sa valeur $\frac{\text{Sh}2y}{y}$,

$$R = \sqrt{\frac{2y}{\text{Sh}\,2y}}$$

Cette quantité décroît pour y croissant, et a par suite son minimum correspondant au maximum de y, c'est-à-dire à la valeur $y = 1{,}1997$. On a alors

$$\frac{\text{Sh}2y}{2y} = \frac{\text{Ch}\,2y - 1}{2} = \text{Sh}^2 y,$$

d'où

$$R = \frac{1}{\text{Sh}y} = 0{,}6627\,.$$

Donc le développement ne sera possible, quelle que soit la valeur réelle de c, que pour des valeurs de mod. w inférieures à $0{,}6627$.

Pour de telles valeurs, on aura

$$F(z) = F(c) + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$
$$A_n = \frac{1}{n!}\,D_c^{n-1}\left[F'(c)\sin^n c\right]\cdot$$

§ IV.

Décomposition des fonctions en fractions simples.

226. Soit $f(z)$ une fonction présentant à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ (prise sur le plan ou sur la sphère) des infinis de première espèce

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \cdots$$

Si le point z est également compris dans l'aire $\mathfrak{A}$, la fonction

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

aura les mêmes infinis que $f(\zeta)$, et de plus l'infini z. Le résidu intégral de cette fonction, relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, sera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \Sigma \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \mathcal{E}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Le dernier résidu $\mathcal{E}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est égal à $f(z)$ (art. 144). On aura donc la formule

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \Sigma \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

On a maintenant, en désignant par n l'indice de l'infini c,

$$\mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{(z-c)-(\zeta-c)}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-c}\cdot\int_c f(\zeta)d\zeta\left[1 + \frac{\zeta-c}{z-c} + \cdots + \left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^{n-1} + \frac{(\zeta-c)^n}{(z-c)^{n-1}(z-\zeta)}\right],$$

ou, en posant

$$(\zeta - c)^n . f(\zeta) = \varphi(\zeta),$$

$$\mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-c}\cdot\int_c \varphi(\zeta)d\zeta\left[\frac{1}{(\zeta-c)^n} + \cdots + \frac{1}{(z-c)^{n-1}(\zeta-c)} + Z\right],$$

Z ne devenant pas infini pour $\zeta = c$. Le produit $Z\,\varphi(\zeta)$ ne deviendra pas non plus infini au point $\zeta = c$, et par suite on aura

$$\int_c Z\varphi(\zeta)d\zeta = 0.$$

Donc la quantité précédente se réduit à

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z-c}\int_c \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c)^n} + \cdots + \frac{1}{(z-c)^n}\int_c \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c}\right]$$
$$= \frac{C'}{z-c} + \frac{C''}{(z-c)^2} + \cdots + \frac{C^{(n)}}{(z-c)^n},$$

en posant

$$(2)\quad C^{(h)} = \mathcal{E}_c \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - c)^{n-h+1}} = \frac{\varphi^{(n-h)}(c)}{(n-h)!} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{D_\varepsilon^{n-h}\left[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)\right]}{(n-h)!}.$$

214. Il reste à calculer maintenant la première intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$. Supposons d'abord que les infinis $c_1, c_2, \ldots$ soient tous contenus dans une aire limitée $\mathfrak{A}$, et qu'il reste sur la sphère (Chap. IV), autour du point O′ correspondant à $z = \infty$, une aire finie $\mathfrak{A}'$, qui ne contienne aucun infini de $f(z)$, si ce n'est peut-être le point O′ lui-même. Transformons les ζ du plan horizontal en ζ' du plan antipode, en posant

$$\zeta = \frac{1}{\zeta'};$$

l'intégrale précédente prendra la forme

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) d\zeta'}{\zeta'^2\left(\frac{1}{\zeta'} - z\right)},$$

et elle devra être prise en tournant autour de O′ de l'est à l'ouest. Pour la ramener au même sens que les intégrales du plan horizontal, changeons son signe, et elle deviendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) d\zeta'}{\zeta'\,(1 - z\zeta')} = \mathcal{E}_0 \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'(1 - z\zeta')}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0 f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[1 + z\zeta' + z^2\zeta'^2 + \cdots + z^\nu\zeta'^\nu + K\zeta'^{\nu+1}\right],$$

ν étant l'indice de l'infini O′ pour lequel $\zeta = \infty$ ou $\zeta' = 0$, et K étant une quantité qui ne devient pas infinie pour $\zeta' = 0$. En posant

$$\zeta'^\nu f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \chi(\zeta'),$$

cette fonction $\chi(\zeta')$ sera continue dans le voisinage de $\zeta' = 0$. L'intégrale précédente pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 \chi(\zeta')d\zeta'\left[\frac{1}{\zeta'^{\nu+1}}+\frac{z}{\zeta'^{\nu}}+\cdots+\frac{z^\nu}{\zeta'}+K\right],$$

et la fonction $K\chi(\zeta')$ restant finie pour $\zeta'=0$, le résidu de cette fonction sera nul, et, en remettant pour l'intégrale son expression primitive, il viendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}=\mathcal{E}_0\frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'(1-z\zeta')}=B_0+B_1z+\cdots+B_\nu z^\nu,$$

en posant

$$(3)\qquad B_h=\mathcal{E}_0\frac{\chi(\zeta')}{\zeta'^{\nu-h+1}}=\lim_{\zeta'=0}\frac{D_{\zeta'}^{\nu-h}\left[\zeta'^{\nu}f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]}{(\nu-h)!}.$$

L'ordre ν de l'infini $\zeta=\infty$ de la fonction $f(\zeta)$, lorsque cette fonction est rationnelle, est égal à l'excès du degré du numérateur sur celui du dénominateur.

Si les deux termes sont de même degré, l'expression précédente se réduit à une constante, savoir, à $f(\infty)$ ou au rapport des coefficients des plus hautes puissances de z dans les deux termes.

Si le numérateur est de degré moindre que le dénominateur, O′ n'est plus un infini de la fonction

$$\frac{1}{\zeta'}f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=\zeta f(\zeta),$$

et par suite le résidu de cette fonction pour $\zeta'=0$ est nul. La fonction $f(z)$ se réduit alors à

$$\Sigma\,\mathcal{E}_c\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

215. Donc, si $f(z)$ est une fonction dont tous les infinis, à l'exception de $z=\infty$, soient contenus dans une aire finie $\mathfrak{A}$, et si $n_1, n_2, \ldots, \nu$ sont les indices respectifs des infinis $c_1, c_2, \ldots, \infty$, $f(z)$ pourra se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(z) &= B_0+B_1z+\cdots+B_\nu z^\nu \\ &+\Sigma\left(\frac{C'}{z-c}+\frac{C''}{(z-c)^2}+\cdots+\frac{C^{(n)}}{(z-c)^n}\right), \end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant nécessairement à tous les infinis $c_1, c_2, \ldots,$

et les coefficients B_k et $C^{(h)}$ étant déterminés par les formules (3) et (2) [1].

Si l'indice ν était négatif, la première ligne du développement disparaîtrait.

On voit que, si le nombre des infinis $c_1, c_2, \ldots$ est limité, et que les indices $n_1, n_2, \ldots, \nu$ aient tous des valeurs finies, la fonction $f(z)$ est nécessairement une fonction rationnelle, comme nous l'avions déjà établi d'une autre manière (art. 186). La formule (4) donne alors la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples.

Dans le cas contraire, le développement de $f(z)$ se composerait d'une infinité de termes. Pour pouvoir faire usage de ce développement, il faut s'assurer préalablement de sa convergence.

216. *Formule d'interpolation de Lagrange.*

Soit

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)},$$

$F(z)$ étant une fonction entière, de degré moindre que le degré n du dénominateur. On est alors dans le cas où la partie entière du développement de $f(z)$ disparaît. On aura donc simplement

$$\begin{aligned} f(z) &= \Sigma \mathcal{E}_{z_k} \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_n)} \cdot \frac{1}{z-\zeta} \\ &= \Sigma \lim_{\zeta=z_k} \frac{(\zeta-z_k)F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_n)} \cdot \frac{1}{z-\zeta} \\ &= \Sigma \frac{F(z_k)}{(z_k-z_1)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_n)} \cdot \frac{1}{z-z_k}. \end{aligned}$$

En mettant pour $f(z)$ sa valeur, on tire de là une expression de $F(z)$, qui n'est autre chose que la formule d'interpolation de Lagrange.

217. Prenons encore pour exemple la fonction

$$\cot \frac{1}{z},$$

[1] *Voy.* art. 158.

qui a pour infinis toutes les valeurs de z de la forme

$$z = \frac{1}{n\pi}.$$

Choisissons pour contour de l'aire une courbe qui entoure tous ces infinis, à l'exception de celui qui répond à $n = 0$, et par suite à $z = \infty$, et qui est le point O'. On aura, par la formule de l'art. 215,

$$\cot\frac{1}{z} = \mathcal{E}_0 \frac{\cot\zeta'}{\zeta'(1-z\zeta')} + \sum_1^\infty \left(\mathcal{E}_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} + \mathcal{E}_{-\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} \right).$$

D'ailleurs, $\cot\zeta'$ étant infini du premier ordre pour $\zeta' = 0$, on a

$$\mathcal{E}_0 \frac{\cot\zeta'}{\zeta'(1-z\zeta')} = \lim_{\zeta'=0} \left[D_{\zeta'}(\zeta'\cot\zeta') + z\,.\,\zeta'\cot\zeta' \right] = z.$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \varepsilon\,.\,\frac{\cot\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}+\varepsilon}}{z-\frac{1}{n\pi}-\varepsilon} \right\}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{n\pi z-1}.$$

Donc

$$\cot\frac{1}{z} = z - \frac{1}{n\pi}\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n\pi z-1} + \frac{1}{n\pi z+1} \right]$$

$$= z\left[1 - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2\pi^2 z^2 - 1} \right].$$

De ce développement dont il est facile de constater la convergence, on tirerait aisément ceux de $\cot z$, $\operatorname{tang} z$, etc., en remplaçant z par $\frac{1}{z'}$, puis z' par $\frac{\pi}{2} - z'$, etc.

218. Si la fonction $f(z)$ a un nombre illimité d'infinis, correspondants à des valeurs de z indéfiniment croissantes, alors les infinis, sur la sphère, se presseront autour du point O' avec une densité infinie, et l'on ne pourra plus toujours appliquer à l'évaluation de cette intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ le procédé du n° 214.

On peut, dans certains cas, effectuer simplement cette évaluation.

Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne de dimensions infinies, qui ne passe par aucun des infinis de $f(\zeta)$. On peut alors écrire l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}.$$

Pour ζ infini et z fini, le facteur $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$ différera infiniment peu de l'unité, et par suite on n'altérera qu'infiniment peu l'intégrale en le supprimant. On pourra donc, dans ce cas, toutes les fois que cette intégrale aura une valeur finie, remplacer la formule (1) par la formule

$$(5)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta} + \Sigma \mathcal{E}_c \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

L'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}$ est une constante, indépendante de z, mais qui peut dépendre de la forme choisie pour la courbe infinie qui limite l'aire $\mathfrak{A}$. La somme de résidus $\Sigma \mathcal{E}_\delta \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}$, relative à tous les infinis *renfermés dans l'aire* $\mathfrak{A}$, sera en même temps dépendante de la forme de cette courbe. Alors le développement de la fonction en une somme infinie de fractions simples ne pourra pas se faire sans tenir compte du terme complémentaire représenté par la première intégrale.

Mais si, en donnant au contour de $\mathfrak{A}$ une forme symétrique par rapport à l'origine, il arrive que cette intégrale prenne une valeur constante, indépendante de la nature de la courbe symétrique, nulle par exemple, comme cela a lieu lorsque $f(z)$ est une fonction *impaire* de z, alors, en associant deux à deux les résidus correspondants à des infinis symétriquement placés, on aura un développement convergent de la fonction $f(z)$, sous forme d'une suite infinie de fractions simples.

219. Soit, par exemple, la fonction

$$\text{coséc}\, z.$$

Les infinis de cette fonction, qui sont les zéros de $\sin z$, sont situés

tous sur l'axe de x, aux distances $\pm n\pi$ de l'origine. Prenons pour contour de l'aire une courbe infinie quelconque qui ait pour centre l'origine, et qui coupe l'axe des x entre deux infinis consécutifs, de sorte que coséc ζ ne soit infini en aucun point du contour. L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{\zeta}\,d\zeta,$$

prise le long de cette courbe aura, en deux points diamétralement opposés, des éléments égaux et de signe contraire, coséc ζ étant une fonction impaire de ζ. Donc cette intégrale sera nulle, et l'on aura simplement

$$\text{coséc}\,z = \lim \Sigma\, \mathcal{E}_{n\pi} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta},$$

la somme devant être prise entre deux valeurs de n égales et de signe contraire, et qui tendent vers l'infini.

On a d'ailleurs

$$\mathcal{E}_{n\pi} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta} = \lim\,(\zeta - n\pi)\cdot\frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta} = \lim\left(\varepsilon\,\frac{\text{coséc}\,(n\pi+\varepsilon)}{z-n\pi-\varepsilon}\right)$$
$$= \lim \frac{(-1)^n}{z-n\pi-\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{z-n\pi}.$$

Donc

$$\text{coséc}\,z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2\pi^2}.$$

En remplaçant z par $\frac{\pi}{2} - z$, on en tire

$$\text{séc}\,z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} = \pi\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - z^2}.$$

En changeant z en iz dans ces deux formules, on aurait les développements de $\frac{1}{\text{Sh}\,z}$, $\frac{1}{\text{Ch}\,z}$.

§ V.

Développement des fonctions en produits infinis.

220. Appliquons au développement de la fonction

$$F(z) = D_z \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

la formule du § précédent,

$$F(z) = \Sigma \mathcal{L}_c \frac{F(\zeta)}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

la fonction $f(z)$ étant supposée uniforme dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

La fonction dérivée $f'(z)$ a les mêmes infinis que la fonction $f(z)$ (art. 147); donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ne peut devenir infinie que pour les valeurs qui rendent $f(z)$ ou infinie ou nulle.

Soit c un zéro ou un infini de $f(z)$, m son indice, positif ou négatif (art. 162). La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = \varphi(z)$$

sera finie, continue et différente de zéro pour $z = c$ (art. 160 et 161). Donc

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{(z-c)^m} - \frac{m f(z)}{(z-c)^{m+1}}$$

sera aussi continue pour $z = c$. Il en sera de même, par conséquent, de

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m}{z-c}.$$

Donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est égal à $\frac{m}{z-c}$, plus une fonction finie et continue pour $z = c$. Le terme $\frac{m}{z-c}$ étant infiniment grand du premier ordre, tandis que l'autre partie est finie, on en conclut que, *pour*

toute valeur $z = c$ qui rend la fonction $f(z)$ nulle ou infinie, la fonction

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = D_z \log f(z)$$

deviendra infiniment grande du premier ordre.

D'après ce que nous avons vu (art. 213 et 215), le résidu

$$\mathcal{E}_c \frac{D_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta}$$

est égal à la partie de la fonction $D_z \log f(z)$ qui devient infinie pour $z = c$, c'est-à-dire à $\frac{m}{z-c}$, comme il est aisé de le vérifier, en calculant directement

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c d\zeta\left[\frac{m}{(\zeta-c)(z-\zeta)} + \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)(z-\zeta)}\right].$$

Donc

$$\Sigma\mathcal{E}_c \frac{D_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma\frac{m}{z-c}.$$

221. Il reste à calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log(\zeta)}{\zeta - z}.$$

On pourra développer $\frac{1}{\zeta - z}$ en une série ordonnée suivant les puissances positives de z, le module de ζ sur le contour de $\mathfrak{A}$ pouvant toujours être supposé plus grand que le module de z. L'intégrale se présentera alors sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, le contour étant choisi de manière à ne passer par aucun des infinis de $D_z \log f(z)$.

Si l'on suppose l'aire $\mathfrak{A}$ infinie dans toutes ses dimensions, on verra, comme au n° 218, que l'intégrale précédente a la même valeur que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log f(\zeta)}{\zeta},$$

et par suite elle se réduit alors à une constante A, indépendante de z.

222. Cela posé, en désignant par A la valeur, variable ou constante, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log f(\zeta)}{\zeta - z},$$

on aura

$$D_z \log f(z) = \Sigma \frac{m}{z-c} + A.$$

En intégrant les deux membres entre les limites z_0 et z, z_0 n'étant ni un zéro ni un infini de $f(z)$, il vient

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} = \Sigma \log \left(\frac{z-c}{z_0-c}\right)^m + \int_{z_0}^{z} A dz,$$

ou, si l'on suppose A constant,

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} = \Sigma \log \left(\frac{z-c}{z-c_0}\right)^m + A(z-z_0).$$

On tire de là [1]

$$(1) \qquad f(z) = f(z_0).\Pi \left(\frac{z-c}{z_0-c}\right)^m . e^{\int_{z_0}^{z} A dz},$$

le produit Π s'étendant à tous les infinis contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

223. Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = \cos z.$$

On a

$$D_z \log f(z) = -\operatorname{tang} z.$$

Les seuls infinis de cette fonction sont les zéros de $\cos z$, donnés par la formule

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

et comme ces zéros sont du premier ordre, on aura

$$\Sigma \mathcal{E}_c \frac{D_\zeta \log f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma \frac{1}{z - \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

---

[1] L'intégrale de $d \log f(z)$ dépend du chemin suivi pour passer de z_0 en z, et les valeurs que l'on obtient pour $\log f(z)$ pourront différer d'un multiple de $2\pi i$. Il en est de même pour l'intégrale du second membre. Mais des multiples de $2\pi i$ ne peuvent avoir aucune influence, lorsqu'on vient à repasser des logarithmes aux nombres.

Si l'on prend maintenant pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne infinie, symétrique par rapport à l'origine, on aura

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{\operatorname{tang} \zeta \, d\zeta}{\zeta} = 0.$$

Donc $A = 0$, et l'on aura

$$D_z \log \cos z = -\operatorname{tang} z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi};$$

d'où

$$\log \frac{\cos z}{\cos z_0} = \sum_{-\infty}^{\infty} \log \frac{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{z_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

ou, en faisant $z_0 = 0$,

$$\log \cos z = \sum_{-\infty}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

Donc enfin

$$\cos z = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

224. Soit encore la fonction

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

d'où

$$D_z \log f(z) = \cot z - \frac{1}{z}.$$

On trouve encore $A = 0$ pour cette fonction. Les zéros de $\frac{\sin z}{z}$ sont du premier ordre, et ont lieu pour $z = n\pi$. Donc, l'indice n devant recevoir toutes les valeurs entières, zéro excepté,

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right),$$

ou

$$\sin z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

§ VI.

Calcul des intégrales définies.

225. Nous avons vu (Chap. II) que si U et V sont deux fonctions de x et de y, uniformes et continues dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et si, de plus, elles satisfont à la condition

$$D_y U = D_x V,$$

en vertu de laquelle $Udx + Vdy$ est une différentielle exacte, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy),$$

prise le long du contour de $\mathfrak{A}$, est nulle.

Si les fonctions U, V, en restant toujours uniformes, cessaient d'être continues en des points c_1, $c_2, \ldots$, compris à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, entourons ces points de contours infiniment petits. En raisonnant alors comme au n° 139, on verra que l'intégrale prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ se réduira à la somme

$$\Sigma \int_c (Udx + Vdy)$$

des valeurs-limites de toutes les intégrales prises le long de chaque contour infiniment petit tracé autour d'un des points de discontinuité contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

Ainsi, si U et V sont des fonctions de x, y, uniformes dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et continues dans toute cette même étendue, à l'exception des infinis c_1, $c_2, \ldots$; si, de plus, elles sont telles que $Udx + Vdy$ soit une différentielle exacte, on aura la formule fondamentale

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{A}} (Udx + Vdy) = \Delta,$$

en posant

$$(2) \qquad \Delta = \Sigma \int_c (Udx + Vdy),$$

le signe de sommation s'étendant, dans cette expression, à tous les points de discontinuité c contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$, et Δ étant nulle

toutes les fois que l'aire $\mathfrak{A}$ ne renferme aucun point de discontinuité.

226. Pour calculer l'intégrale

$$\int_c (U dx + V dy),$$

posons

$$x + iy - c = \rho e^{ip},$$

d'où, en faisant $c = a + ib$,

$$x - a = \rho \cos p, \qquad y - b = \rho \sin p,$$

et prenons pour contour infinitésimal le cercle de centre c et de rayon infiniment petit ρ. L'expression $U dx + V dy$ prendra la forme

$$F(\rho, p)\, dp,$$

et l'on aura

$$\int_c (U dx + V dy) = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} F(\rho, p)\, dp.$$

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

prise le long du contour d'un carré ayant pour centre l'origine et dont les côtés sont parallèles aux axes et égaux à 2 unités. Le long de ce contour, l'intégrale deviendra

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dx}{x^2+1} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dy}{1+y^2}$$
$$= 4 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Or, les fonctions $\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ ont l'une et l'autre un point de discontinuité pour $x = 0$, $y = 0$. En calculant, par la transformation précédente, l'intégrale prise autour de ce point, on aura

$$\Delta = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\, dp}{\rho^2} = 2\pi.$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

227. Si, en particulier, $Udx + Vdy$ est la différentielle d'une fonction $F(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, on aura alors (nº 106)

$$U = F'(z), \qquad V = iF'(z),$$

d'où

$$U + iV = 0.$$

En faisant donc

$$U = f(z),$$

l'expression $Udx + Vdy$ se changera en $f(z)\,dz$, et $\frac{\Delta}{2\pi i}$ sera le résidu intégral de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc les formules

$$(3) \qquad \int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = \Delta,$$

$$(4) \qquad \Delta = 2\pi i . \Sigma \mathcal{E}_c\, f(z) = 2\pi i\, \mathcal{E}_{\mathfrak{A}}\, f(z).$$

228. Pour faire usage des formules (1) et (3), sur lesquelles repose ce que Cauchy appelle la *Méthode du passage du réel à l'imaginaire*, on choisit le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ de manière à pouvoir exprimer l'intégrale du premier membre à l'aide d'intégrales définies relatives à des variables réelles. En séparant ensuite de part et d'autre le réel de l'imaginaire, on obtiendra deux relations entre des intégrales définies réelles et des quantités connues, dès que l'on saura calculer Δ.

On prendra généralement pour contour une ligne telle qu'une seule des variables x et y, ou r et p varie à la fois, auquel cas on rencontre immédiatement des intégrales définies ordinaires. Pour cela, on composera, par exemple, le contour de parties circulaires ayant pour centre l'origine, ou de parties rectilignes parallèles aux axes. Dans le premier cas, le rayon vecteur r sera constant; dans le second, une seule des coordonnées x, y variera.

Examinons successivement plusieurs cas particuliers de cette méthode.

229. I. Si l'on prend pour contour un cercle de rayon r et de centre $c = a + ib$, et que l'on pose, comme au nº 226,

$$x = a + r\cos p, \qquad y = b + r\sin p,$$

la différentielle $Udx + Vdy$ prendra la forme $F(r,p)\,dp$, ou simplement $F(p)\,dp$, et l'intégrale proposée deviendra

$$\int_0^{2\pi} F(p)\,dp.$$

On aura donc la formule

$$\int_0^{2\pi} F(p)\,dp = \Delta,$$

qui se partagera en deux autres, si $F(p)$ est une fonction complexe de p.

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1-az}\,\frac{dz}{z},$$

$f(z)$ étant une fonction continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. La fonction

$$\frac{f(z)}{(1-az)z}$$

a d'abord l'infini $z = 0$, et de plus, si le point $z = \frac{1}{a}$ est contenu dans l'aire $\mathfrak{A}$, ce point sera un second infini. On aura donc

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1-az}\,\frac{dz}{z} = 2\pi i\left[\mathcal{E}_0 \frac{f(z)}{(1-az)z} + \mathcal{E}_{\frac{1}{a}} \frac{f(z)}{(1-az)z}\right].$$

Le premier résidu a pour valeur

$$\lim_{z=0}\left[z.\,\frac{f(z)}{(1-az)z}\right] = f(0).$$

Le second est nul si le point $\frac{1}{a}$ est extérieur à l'aire; si le point $\frac{1}{a}$ est contenu dans l'aire, il sera égal à

$$\lim_{z=\frac{1}{a}}\left[\left(z-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{f(z)}{(1-az)z}\right] = -f\left(\frac{1}{a}\right).$$

Donc la valeur de l'intégrale sera

$$2\pi i f(0)\quad,\qquad \text{ou}\qquad 2\pi i\left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right)\right],$$

suivant que $\frac{1}{a}$ sera extérieur ou intérieur à l'aire.

Prenons maintenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon 1. Alors $z = e^{ip}$, $\frac{dz}{z} = i\,dp$, et il vient

pour mod. $a < 1$, $$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - a e^{ip}} = 2\pi f(0);$$

pour mod. $a > 1$, $$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - a e^{ip}} = 2\pi\left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

En supposant $f(z) = 1$ et a réel, il vient, suivant que a est < 1 ou > 1, en valeur absolue,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 - a e^{ip}} = 2\pi \quad \text{ou} \quad = 0,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - a\cos p)\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 2\pi \text{ ou} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 0.$$

230. Dans certains cas, on peut connaître *a priori* la valeur de Δ. Supposons, par exemple, que l'on sache développer, par un moyen quelconque, la fonction $F(z)$ de la variable complexe z en une série convergente pour tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$, et ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - c$. Le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance de $z - c$ aura pour expression (n° 149)

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{F(z)\,dz}{(z - c)^{n+1}}.$$

Si donc on connaît d'avance la valeur de ce coefficient A_n, on aura par là même la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{F(z)\,dz}{(z - c)^{n+1}} = 2\pi i . A_n,$$

ou, en prenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon r et de centre c, compris à l'intérieur du cercle de convergence,

(5) $$\int_0^{2\pi} F(c + re^{ip})\,e^{-inp}\,dp = 2\pi r^n . A_n.$$

Plus généralement, si l'on connaît le développement d'une fonc-

tion $F(z)$ en une série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $z - c$, et convergente dans tout l'intervalle compris entre deux cercles de centre c, on aura la même formule (5) pour toute valeur entière de n, positive, nulle ou négative, r étant le rayon vecteur d'un point quelconque situé entre les deux cercles.

Pour appliquer ces formules au calcul des intégrales définies, il suffira de séparer dans chaque membre, le réel de l'imaginaire, ce qui fournira deux relations.

Par exemple, du développement connu de la fonction

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n z^n}{n!} + \cdots$$

on tire, pour $n \geqq 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{-re^{ip}} e^{-nip}\, dp = 2\pi r^n . A_n = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{n!},$$

formule qui se décompose en deux autres,

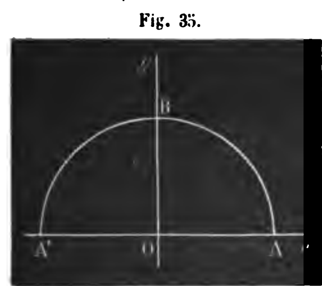
$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \cos(r\sin p + np)\, dp = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{n!},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \sin(r\sin p + np)\, dp = 0.$$

Pour $n < 0$, la première intégrale serait nulle aussi bien que la seconde.

231. II. Prenons pour l'aire $\mathfrak{A}$ un demi-cercle ayant pour diamètre l'un des axes coordonnés, l'axe des x par exemple, et pour centre l'origine. En désignant par R le rayon de ce cercle, la formule (3) devient (*fig.* 35)

Fig. 35.



$$\int(\text{A}'\text{A}) + \int(\text{A B A}') = \Delta,$$

c'est-à-dire,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + i\int_0^{\pi} f(Re^{ip})\,Re^{ip}\,dp = \Delta.$$

Supposons maintenant que $f(Re^{ip})$ soit infiniment petit d'ordre μ pour R infini. Alors la fonction $R^{\mu} f(Re^{ip})$ conservera, pour R croissant

indéfiniment, une valeur finie $\varphi(e^{ip})$. La seconde des intégrales précédentes pourra alors s'écrire sous la forme

$$i \cdot \frac{1}{R^{\mu-1}} \int_0^{\pi} \varphi(e^{ip}) dp.$$

La quantité sous le signe $\int$ restant toujours finie, l'intégrale sera pareillement finie, et, si l'on suppose

$$\mu > 1,$$

l'intégrale sera multipliée par un facteur infiniment petit. Donc on aura, pour $R = \infty$,

$$\lim. \, i \int_0^{\pi} f(Re^{ip}) Re^{ip} dp = 0,$$

et notre formule se réduira à la suivante,

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \Delta,$$

Δ représentant le produit de $2\pi i$ par le résidu intégral de la fonction $f(z)$, relatif à tous les infinis situés au-dessus de l'axe des x.

232. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{z^{2m}\, dz}{1 + z^{2n}},$$

m et n étant deux entiers positifs, tels que l'on ait

$$m < n.$$

Alors $f(Re^{ip}) = \dfrac{R^{2m} e^{2mip}}{1 + R^{2n} e^{2nip}}$ est infiniment petit de l'ordre $2n - 2m > 1$. Par suite, la formule (5) est applicable, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1 + x^{2n}} = \Delta.$$

Maintenant, les infinis situés au-dessus de l'axe des x sont celles des racines

$$c = e^{ip}$$

de l'équation

$$1+z^{2n}=0,$$

dans lesquelles le coefficient de i est positif, et que l'on obtiendra par conséquent en prenant pour p les valeurs

$$\frac{\pi}{2n},\quad \frac{3\pi}{2n},\quad \frac{5\pi}{2n},\ldots,\quad \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Il vient alors

$$\Delta=2\pi i\,(F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}),$$

en posant, pour abréger,

$$F_k=\mathcal{E}_{c_k}\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}},\qquad c_k=e^{\frac{k\pi i}{2n}}.$$

On a, pour $z=c$,

$$F=\lim\frac{\varepsilon(c+\varepsilon)^{2m}}{1+(c+\varepsilon)^{2n}}=\lim\frac{\varepsilon(c^{2m}+2m\varepsilon c^{2m-1}+\cdots)}{1+c^{2n}+2n\varepsilon c^{2n-1}+\cdots},$$

ou, à cause de $1+c^{2n}=0$,

$$F=\lim\frac{\varepsilon c^{2m}+\cdots}{-2n\varepsilon\,.\,c^{-1}+\cdots}=-\frac{1}{2n}c^{2m+1}.$$

Donc, en faisant, pour abréger, $e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}=\gamma$,

$$\Sigma F=-\frac{1}{2n}(\gamma+\gamma^3+\cdots+\gamma^{2n-1})=-\frac{1}{2n}\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma-\gamma^{-1}}.$$

Or, pour n entier, $\gamma^{2n}=-1$. Donc

$$\Sigma F=\frac{1}{n}\,\frac{1}{\gamma-\gamma^{-1}}=\frac{1}{2in}\operatorname{cos\acute{e}c}\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Si l'on fait maintenant $R=\infty$, et que l'on suppose $m<n$, d'où $2m+1<2n$, l'intégrale prise le long de la demi-circonférence s'évanouira, et il restera

$$\int_0^\infty\frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{2n}\operatorname{cos\acute{e}c}\frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

En posant

$$x^{2n} = y, \qquad \frac{2m+1}{2n} = a,$$

la formule devient

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad (0 < a < 1).$$

233. Soit encore l'intégrale

$$\int \frac{e^{iz}}{ia - z}\,dz.$$

En faisant $z = Re^{ip}$, la fonction $f(z)$ devient

$$e^{-R\sin p} \cdot \frac{e^{iR\cos p}}{ia - Re^{ip}},$$

et pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et π, cette quantité est infiniment petite d'ordre infini, lorsqu'on fait $R = \infty$. Il reste à examiner ce que devient l'intégrale $i\int f(Re^{ip})\,Re^{ip}\,dp$ pour les valeurs de p très voisines de 0 ou de π, c'est-à-dire, à trouver la limite de l'expression

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\left(\frac{e^{iR\cos p}}{ia - Re^{ip}} - \frac{e^{-iR\cos p}}{ia + Re^{-ip}}\right) Re^{ip}\,dp.$$

Si l'on fait abstraction du facteur $e^{-R\sin p}$, l'expression sous le signe $\int$ peut se mettre sous la forme $(P + iQ)\cos p\,dp$, P et Q étant des fonctions de p, qui ne deviennent pas infinies avec R, et $\cos p$ restant voisin de l'unité. Donc l'intégrale proposée revient à

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\cos p\,dp \,.\, (P + iQ),$$

expression dont la valeur est égale à la quantité

$$\int_0^\varepsilon e^{-R\sin p}\cos p\,dp = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-R\sin\varepsilon}\right),$$

multipliée par une valeur moyenne de la fonction $P + iQ$, c'est-à-dire par une quantité finie. Donc l'intégrale s'annule pour R infini, et la formule (5) est applicable.

Pour $a > 0$, la fonction a, au-dessus de l'axe des x, l'infini $z = ia$, auquel correspond le résidu

$$\mathcal{E}_{ia} \frac{e^{iz}}{ia - z} = -e^{-a}.$$

Donc, pour $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{ia - x}\, dx = -2\pi i e^{-a}.$$

Si l'on change a en $-a$, la fonction n'aura plus d'infini au-dessus de l'axe des x, et l'on aura $\Delta = 0$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{ia + x}\, dx = 0.$$

En combinant ces intégrales par addition et soustraction, et séparant le réel de l'imaginaire, on en tire facilement les deux formules

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2},$$

Cette dernière donne, en faisant tendre a vers zéro,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

234. Si la fonction $f(z)$ a un infini en un point de l'axe des x, à l'origine $z = 0$ par exemple, l'axe des x faisant partie du contour, nous changerons alors la forme de ce contour, afin d'éviter le point O, en décrivant autour de ce point un demi-cercle de rayon infiniment petit r, et prenant pour aire l'espace compris entre les deux demi-cercles. On aura alors la formule

Fig. 36.

$$\int_r^R [f(x) + f(-x)]\, dx + i\int_0^{\pi} f(Re^{ip})\, Re^{ip}\, dp$$
$$- i\int_0^{\pi} f(re^{ip}) re^{ip}\, dp = \Delta.$$

Si la dernière intégrale $\int_0^\pi f(re^{ip})\, re^{ip}\, dp$ tend vers zéro en même temps que r, on se trouve alors dans le cas du n° 231, et si l'intégrale prise le long du demi-cercle extérieur s'évanouit pour $R = \infty$, on pourra appliquer la formule (5). Si la dernière intégrale tend vers une limite finie et déterminée, on joindra sa valeur, prise en signe contraire, à la valeur de Δ.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

On a

$$\int_0^\pi f(re^{ip})\, re^{ip}\, dp = \int_0^\pi e^{ire^{ip}}\, dp.$$

En développant $e^{ire^{ip}}$ en série, et faisant $r = 0$, on voit que cette intégrale a pour valeur π. On en conclut alors, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\right) dx = \pi i,$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

235. III. Prenons pour aire $\mathfrak{A}$ le rectangle parallèle aux axes (*fig.* 37), dont les côtés ont pour équations respectives

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y.$$

Les formules (1) et (3) deviendront

$$(6) \quad \int_{x_0}^{X} (U_{x,y_0} - U_{x,Y})\, dx + \int_{y_0}^{Y} (V_{X,y} - V_{x_0,y})\, dy = \mathbf{A},$$

$$(7) \quad \int_{x_0}^{X} \left[f(x+iy_0) - f(x+iY)\right] dx + i\int_{y_0}^{Y} \left[f(X+iy) - f(x_0+iy)\right] dy = \Delta.$$

Si nous considérons l'intégrale double

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y F(x,y)\, dx\, dy,$$

elle aura pour expression soit

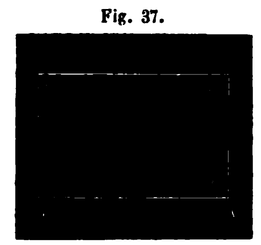
$$\int_{x_0}^{X} \left[D_x F(x, Y) - D_x F(x, y_0) \right] dx,$$

soit

$$\int_{y_0}^{Y} \left[D_y F(X, y) - D_y F(x_0, y) \right] dy,$$

suivant que l'on commencera à intégrer par rapport à y ou par rapport à x ; ou, ce qui revient au même, suivant que l'on intégrera

Fig. 37.



le long du contour du rectangle BACD, en passant soit par le chemin BDC, soit par le chemin BAC. Ces deux chemins conduisent au même résultat, si les fonctions $D_x F(x, y)$, $D_y F(x, y)$ sont uniformes et continues dans tout l'intérieur du rectangle. Dans le cas contraire, ils conduisent à des résultats dont la différence ne sera pas nulle, et cette différence ne sera autre chose que l'intégrale de la fonction

$$D_x F(x, y)\, dx + D_y F(x, y)\, dy,$$

prise le long du contour total du rectangle BACD. On a alors la formule (6), en supposant

$$U = D_x F(x, y) \quad , \quad V = D_y F(x, y).$$

C'est pour cette raison que Cauchy a désigné l'emploi de la formule (5) sous le nom de *Méthode fondée sur la différence des valeurs que prend une intégrale double, quand on intervertit l'ordre des intégrations.*

236. La formule (6) se simplifie dans le cas où les intégrales prises le long de trois des côtés du rectangle s'annulent lorsque ces côtés s'en vont à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\int_{x_0}^{X} U_{x,Y}\, dx = 0, \qquad \int_{y_0}^{Y} V_{x_0,y}\, dy = 0, \qquad \int_{y_0}^{Y} V_{X,y}\, dy = 0,$$

pour

$$x_0 = -\infty \quad , \quad X = +\infty \quad , \quad Y = +\infty .$$

Or $\int_{x_0}^{X} U_{x,Y}\,dx = (X - x_0) \times$ une moyenne de $U_{x,Y}$. Pour que cette quantité s'annule lorsque $X - x_0$ devient infini, il faut que $U_{x,Y}$ prenne pour $Y = \infty$, une valeur infiniment petite d'un ordre supérieur à l'unité. Il en sera de même pour les autres intégrales. Donc on pourra énoncer les conditions précédentes en disant que les fonctions

$$U_{x,\infty}, \qquad V_{\pm\infty,y}$$

doivent être, quels que soient x ou y, infiniment petites d'ordre supérieur à l'unité [1].

---

[1] Cauchy pose simplement pour conditions que les fonctions $U_{x,\pm\infty}$, $V_{\pm\infty,y}$ s'annulent. Il nous semble que ces conditions sont insuffisantes. En effet, elles sont remplies par la fonction

$$\frac{x+iy}{1+(x+iy)^2},$$

qui est infiniment petite du 1[er] ordre pour toute valeur infinie de l'une des variables x, y. Or, l'intégrale de cette fonction prise par rapport à x, en supposant

$$x_0 = -\omega, \quad X = a\omega, \quad Y = b\omega,$$

a pour valeur

$$\int_{-\omega}^{a\omega} \frac{(x+ib\omega)\,dx}{1+(x+iy)^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+(a+ib)\omega}{1+(-1+ib)\omega}$$

quantité dont la limite, pour $\omega = \infty$, est

$$\frac{1}{2}\log\frac{a+ib}{-1+ib},$$

et cette valeur n'est pas nulle, mais indéterminée.

Au contraire, si l'on traite de même la fonction

$$\frac{1}{1+(x+iy)^2},$$

qui est infiniment petite du second ordre, on trouve pour résultat

$$\text{arc tang}\,\frac{(1+a)\omega}{1+(a+ib)(-1+ib)\omega^2},$$

qui a pour limite arc tang (0) ou zéro.

Si ces conditions sont satisfaites, la formule (6) deviendra

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} U_{x,y_0} \, dx = \Delta.$$

De même, si les valeurs

$$f(x + i.\infty) \quad , \quad f(\pm\infty + iy)$$

sont, pour toute valeur de x ou de y, infiniment petites d'ordre supérieur au premier, on aura, au lieu de (7), la formule plus simple

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy_0)\, dx = \Delta,$$

qui n'est autre chose que ce que devient la formule (5) du n° 231 pour $y_0 = 0$. Il est aisé de voir, en effet, que les conditions précédentes se réduisent à celle du n° 231.

237. On peut mettre la formule (6) sous une forme plus commode, qui exprime que $Udx + Vdy$ est bien une différentielle exacte. Pour cela, w étant une fonction donnée de x et de y, et $F(w)$ une fonction quelconque de w, il suffira de poser

$$U = F(w) . \mathrm{D}_x w \quad , \quad V = F(w) . \mathrm{D}_y w .$$

La formule (6) deviendra alors

$$\int_{x_0}^{X} \left[F(w_{x,y_0})\, \mathrm{D}_x w_{x,y_0} - F(w_{x,Y})\, \mathrm{D}_x w_{x,Y} \right] dx$$
$$+ \int_{y_0}^{Y} \left[F(w_{X,y})\, \mathrm{D}_y w_{X,y} - F(w_{x_0,y})\, \mathrm{D}_y w_{x_0,y} \right] dy = \Delta.$$

Pour donner une application de cette formule, supposons

$$w = (a + iy)\, x;$$

a étant > 0, et faisons

$$x_0 = y_0 = 0 \quad ; \quad X = +\infty \quad , \quad Y = b.$$

Si l'on admet que $F(w)$ soit infiniment petit d'ordre supérieur au premier pour $x = \infty$, l'équation se réduira à

$$a \int_0^{\infty} F(ax)\, dx - (a + ib) \int_0^{\infty} F\left[(a + ib)x\right] dx = \Delta.$$

Soit, par exemple,

$$F(w) = w^{n-1} e^{-w},$$

n étant réel et positif. On a alors $\Delta = 0$, et $F(w)$ est infiniment petit d'ordre > 1 pour $x = +\infty$. La formule précédente devient donc

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+ib)x} x^{n-1} dx = \frac{a^n}{(a+ib)^n} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx$$
$$= \frac{1}{(a+ib)^n} \Gamma(n).$$

Donc la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{c^n}$$

subsiste pour les valeurs complexes de c dont la partie réelle est positive.

En faisant

$$a + ib = \rho e^{i\theta},$$

la formule que nous venons d'obtenir se décompose dans les deux suivantes,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \cos bx\, dx = \frac{\cos n\theta}{\rho^n} \Gamma(n),$$
$$\int^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \sin bx\, dx = \frac{\sin n\theta}{\rho^n} \Gamma(n),$$

qui, pour $n = 1$, se réduisent à

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$
$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

238. Soit $F(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur de deux unités au moins à celui du dénominateur. Supposons que l'équation $\chi(z) = 0$ n'ait pas de racines réelles ou multiples, et soient $c_1, c_2, \ldots$ les racines complexes qui ont leur partie imaginaire positive. En appliquant à cette fonction la formule (5), il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\,dx = 2\pi i\,\Sigma \frac{\varphi(c)}{\chi'(c)} = 2\pi i\,\Sigma C,$$

le signe Σ s'étendant à tous les infinis c situés au-dessus de l'axe des x, et C_1, C_2, ... étant les numérateurs de celles des fractions simples dans lesquelles se décompose la fonction donnée, qui correspondent à ces infinis.

Si $\chi(z) = 0$ n'a aucune racine au-dessous de l'axe des x, il est facile de voir que ΣC doit être nul, si le degré de $\varphi(z)$ est inférieur de 2 unités à celui de $\chi(z)$. On a dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\,dx = 0.$$

Soit, par exemple, la fonction $\frac{\varphi(z)}{1+z^2}$, le degré de $\varphi(z)$ étant moindre que l'unité. On a le seul infini $z = i$, et l'on trouve

$$\Delta = 2\pi i\,\mathcal{E}_i \frac{\varphi(z)}{1+z^2} = \pi\varphi(i),$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx = \pi\varphi(i).$$

En particulier, si l'on prend

$$\varphi(z) = (-ix)^{\mu-1}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ix)^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \left[(-i)^{\mu-1} + i^{\mu-1}\right]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dy}{1+x^2} = \pi,$$

ou, à cause de $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\mu\pi}{2}}.$$

Cette formule se ramène facilement à celle que nous avons trouvée par une autre voie au n° 232.

239. Prenons pour contour le périmètre d'un triangle rectangle

ABC, dont les sommets aient pour coordonnées respectives (x_0, y_0), (X, y_0), (X, Y). On aura

$$\int(\mathrm{AB}) + \int(\mathrm{BC}) - \int(\mathrm{AC}) = \Delta.$$

En prenant, pour plus de simplicité $x_0 = y_0 = 0$, on aura, en chaque point de AC,

$$y = ax,$$

d'où

$$dy = a\,dx\,, \qquad Y = aX\,,$$

et l'on a, au lieu de la formule du n° 238,

$$\int_0^X F(w_{x,0})\,\mathrm{D}_x w_{x,0}\,dx + \int_0^{aX} F(w_{X,y})\,\mathrm{D}_y w_{X,y}\,dy - \int_0^X F(w_{x,ax})\,dw_{x,ax} = \Delta.$$

Si l'on fait $w = x + iy$, cette formule devient

$$\int_0^X F(x)\,dx + ia\int_0^X F(X + iay)\,dy - \int_0^X F[(1 + ia)x](1 + ia)\,dx = \Delta.$$

Soit, par exemple, la fonction $f(z) = e^{-z^2}$, qui est finie pour toute valeur de x, si l'on prend

$$z = (1 + ia)\,x\,, \qquad a^2 < 1\,.$$

Donc $\Delta = 0$, et l'on a

$$\int_0^X \left[e^{-x^2} + iae^{-(X+iax)^2}\right] dx - (1 + ia)\int_0^X e^{-(1+ia)^2x^2}\,dx = 0.$$

Si l'on fait maintenant $X = \infty$, comme on a, pour $x = tX$,

$$\int_0^X e^{-(X+iax)^2}\,dx = Xe^{-X^2}\int_0^1 e^{-(1+iat)^2}\,dt\,,$$

et que la seconde intégrale a toujours une valeur finie, la première est nulle pour $X = \infty$. Il reste donc, à cause de

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

$$(1 + ia)\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-a^2)x^2}\cos(2ax^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-a^2)x^2}\sin(2ax^2)\,dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)}.$$

240. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle de z. D'après ce que nous avons vu (nos 213 et suiv.), la différence

$$\varphi(z) - \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}$$

est une fonction continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Si l'on désigne par $\mathrm{f}(z)$ une autre fonction uniforme et continue dans l'aire $\mathfrak{A}$, le produit de cette fonction par la différence précédente sera aussi une fonction uniforme et continue, et l'on aura par conséquent

$$\int_{\mathfrak{A}} \left[\varphi(z) - \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right] \mathrm{f}(z)\,dz = 0,$$

ou

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(z)\,\mathrm{f}(z)\,dz = \int_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{f}(z)\,dz,$$

ou, en mettant pour le résidu sa valeur

$$\Sigma_k \left[\frac{C'_k}{z-c_k} + \frac{C''_k}{(z-c_k)^2} + \cdots + \frac{C_k^{(n)}}{(z-c_k)^n}\right],$$

que nous désignerons simplement par

$$\Sigma \frac{C^{(h)}}{(z-c)^h},$$

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(z)\,\mathrm{f}(z)\,dz = \Sigma\, C^{(h)} \int_{\mathfrak{A}} \frac{\mathrm{f}(z)\,dz}{(z-c)^h}$$

$$= 2\pi i\, \Sigma\, C^{(h)} \frac{\mathrm{f}^{(h-1)}(c)}{(h-1)!},$$

le signe de sommation s'étendant aux divers infinis de $\varphi(z)$, ainsi qu'aux divers termes dont se compose le résidu relatif à chaque infini. Le second membre n'est autre que la valeur de Δ.

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(z) = e^{i\mu z}, \text{ pour } \mu > 0,$$

cette fonction sera uniforme et continue dans toute la moitié supérieure du plan. Soit $c = a + ib$ un infini de $\varphi(z)$, b étant positif. On a

$$f(c) = e^{-\mu b}.e^{i\mu a},$$
$$f^{(n-1)}(c) = (i\mu)^{n-1}.e^{-\mu b}.e^{i\mu a}.$$

On verrait, comme au n° 233, que l'intégrale s'évanouit pour un module de z infini. On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x}\varphi(x)dx = 2\pi i\, \Sigma\, C^{(h)} \frac{(i\mu)^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\mu b} e^{i\mu a}.$$

formule vraie pour toute fonction rationnelle $\varphi(x)$ qui ne devient infinie pour aucune valeur réelle de x.

241. Soit w une fonction de z, et $\varphi(w)$ une fonction de w qui devient infinie pour les valeurs

$$w = \gamma_1, \ \gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_m,$$

correspondantes à des valeurs de z contenues dans l'aire $\mathfrak{A}$, et soient

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots, \ \mu_m$$

les ordres respectifs de ces infinis.

Soit, de plus, $f(z)$ une fonction de z qui ait pour infinis dans l'aire $\mathfrak{A}$ les points

$$z = c_1, \ c_2, \ldots, \ c_n,$$

ayant pour ordres respectifs

$$\nu_1, \ \nu_2, \ \ldots, \ \nu_n.$$

Posons, comme précédemment,

$$\mathcal{E}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \Sigma_k\left[\frac{C'_k}{z-c_k} + \frac{C''_k}{(z-c_k)^2} + \cdots + \frac{C_k^{(\nu_k)}}{(z-c_k)^{\nu_k}}\right]$$
$$= \Sigma \frac{C^{(h)}}{(z-c)^h},$$

et de même, en considérant w comme la variable indépendante et ζ comme prenant les valeurs $\zeta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$,

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(\zeta)}{w-\zeta} = \Sigma \frac{\Gamma^{(h)}}{(w-\gamma)^h}.$$

Nous aurons alors

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w)\, \mathrm{f}(z)\, dz = \Sigma \int_\gamma \frac{\Gamma^{(h)} \mathrm{f}(z)\, dz}{(w-\gamma)^h} + \Sigma \int_c \frac{C^{(h)} \varphi(w)\, dz}{(z-c)^h}.$$

Si nous posons maintenant

$$\mathrm{f}(z)\, dz = \chi(w)\, dw, \quad \text{ou} \quad \chi(w) = \mathrm{f}(z)\frac{dz}{dw},$$

la première somme deviendra

$$\Sigma \int_\gamma \frac{\Gamma^{(h)}\chi(w)\, dw}{(w-\gamma)^h} = 2\pi i\, \Sigma \frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!}.$$

Si nous faisons ensuite

$$\varphi(w) = \psi(z),$$

la seconde somme deviendra

$$\Sigma \int_c \frac{C^{(h)}\psi(z)\, dz}{(z-c)^h} = 2\pi i\, \Sigma \frac{C^{(h)}\psi^{(h-1)}(c)}{(h-1)!}.$$

Donc

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w)\, \mathrm{f}(z)\, dz = 2\pi i \left[\Sigma \frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!} + \Sigma \frac{C^{(h)}\psi^{(h-1)}(c)}{(h-1)!}\right].$$

Exemples. Soit $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{1+z^2}$. En prenant toujours pour $\mathfrak{A}$ la moitié supérieure du plan, on a

$$c = i, \qquad C = \lim \frac{\varepsilon}{1+(i+\varepsilon)^2} = \frac{1}{2i}.$$

La seconde somme devient donc

$$2\pi\psi(i) = \pi\varphi[w(i)].$$

Si l'on fait, de plus,

$$w = \frac{1+iz}{1-iz},$$

on a d'abord

$$w(i) = 0, \quad \text{d'où} \quad \pi\psi(i) = \pi\varphi(0).$$

Ensuite

$$\mathfrak{f}(z)\,dz = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{dw}{w},$$

d'où

$$\chi(w) = \frac{1}{2iw}.$$

Donc

$$2\pi i\,\Sigma\,\frac{\Gamma^{(h)}\chi^{(h-1)}(\gamma)}{(h-1)!} = \pi\,\Sigma(-1)^h\,\frac{\Gamma^{(h)}}{\gamma^h}.$$

Par conséquent, si l'on se trouve dans les conditions du n° 231, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi\left[\varphi(0)+\Sigma(-1)^{h-1}\,\frac{\Gamma^{(h)}}{\gamma^h}\right].$$

De même, pour

$$\mathfrak{f}(z) = \frac{r}{r^2+z^2}, \qquad w = \log(-iz),$$

d'où

$$\chi(w) = \frac{1}{i}\,\frac{re^w}{r^2+e^{2w}},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left[\log(-ix)\right]\frac{r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\varphi\left(\log x-\frac{\pi i}{2}\right)+\varphi\left(\log x+\frac{\pi i}{2}\right)\right]\frac{r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \pi.\varphi(\log r) + 2\pi r\,\Sigma\,\frac{\Gamma^{(h)}}{(h-1)!}\,.\,D_{\gamma}^{h-1}\,\frac{e^{\gamma}}{r^2+e^{2\gamma}}.$$

CAS REMARQUABLE

D'ACÉPHALIE

ÉTUDE DE CETTE MONSTRUOSITÉ;

PAR LE D[r] LUZUN,
ancien interne des hôpitaux de Bordeaux, ex-aide de clinique médicale,
membre de plusieurs Sociétés savantes, etc.

Parmi les monstruosités qui se produisent dans l'espèce humaine, la plus bizarre, assurément, est celle où l'enfant venant au monde privé des organes essentiels, indispensables à la vie, jouit, pendant quelques mois, d'une vitalité à peu près complète, et n'est plus à sa naissance, par la force même des choses, qu'un corps inerte impropre à la vie. Tel est le cas des *acéphales* proprement dits, des *anencéphales,* et de ces variétés assez nombreuses de monstres, condamnés à périr le jour de leur naissance par excès ou défauts d'organes. Nous ne nous occuperons aujourd'hui que de l'acéphalie, c'est à dire de ces monstres qui naissent privés de tête et le plus souvent de cerveau. Ces cas ne sont pas assurément fréquents; aussi la science doit-elle recueillir avec soin ceux qui se présentent à l'observation, car leur histoire, qui paraît au premier coup d'œil stérile, est loin de l'être, et ces cas, bien étudiés, peuvent jeter une assez vive lumière sur des points d'anthropologie importants, qu'il serait assurément difficile d'éclairer par ailleurs. Geoffroy Saint-Hilaire attachait une si grande importance à l'étude de ces monstres, qu'il supplia l'administration de les conserver précieusement et de les mettre à la disposition de la science.

Ayant appris qu'un cas d'acéphalie s'était produit à Bordeaux, rue des Vignes, 34, nous fîmes immédiatement les démarches nécessaires pour mettre ce monstre en notre possession. Après bien des difficultés de la part des autorités et des parents, grâce à la bienveillance de notre confrère M. Méran, médecin préposé aux décès, nous pûmes non seulement satisfaire notre ambition, mais encore interroger la nouvelle accouchée. Elle a déjà eu plusieurs enfants (trois), qui tous sont venus, sans accidents, en parfaite santé. Elle a souffert durant sa grossesse, qui datait de sept mois seulement; elle a eu de l'oppression et des vomissements; cependant, il en avait été de même des autres, et rien ne lui faisait supposer qu'elle accouchât cette fois d'un semblable « morceau de chair » *(sic)*. Voici les renseignements qui nous ont été donnés par la sage-femme qui a assisté la malade :

Le travail a duré huit heures. Une poche d'eau, qui se présentait, a été déchirée. Un mamelon conique, sans cavité ni saillies, se présenta, et fut bientôt suivi du tronc d'un fœtus et de membres inférieurs. La sage-femme reconnut immédiatement qu'elle avait affaire à un acéphale. Une deuxième poche se présenta aussitôt au couronnement de l'utérus; elle fut rompue, et la déchirure donna issue à un nouveau produit, cette fois vivant.

La délivrance a donné les résultats suivants : Cordon de l'acéphale très court et très grêle; deux poches, séparées par une cloison résultant de l'adossement ou plutôt de la soudure des deux séreuses; un placenta unique et bien développé, sur lequel est implantée la cloison que nous avons mentionnée, et qui semble le diviser en deux parties à peu près égales.

Le dernier né des jumeaux était, quoique relativement petit, parfaitement conformé; il a vécu quinze heures. Son cordon ombilical, fort long, contrastait d'une façon remarquable avec celui du premier né. Les membres supérieurs et inférieurs étaient régulièrement conformés.

Voici le résultat de l'examen de l'acéphale, fait avec le concours intelligent et dévoué de M. L. Duboul, étudiant en médecine :

Forme extérieure. Ce qui saute d'abord aux yeux, c'est l'in-

filtration générale du sujet. La peau est blafarde, lisse, tendue; les plis des articulations sont profonds, fortement accusés, et rendus plus sensibles encore par les saillies environnantes, dues à l'œdème du tissu cellulaire. Le cordon ombilical semble fixé au fond d'un entonnoir triangulaire, formé en bas par la paroi hypogastrique, et supérieurement par deux masses infiltrées, retombant de la paroi thoracique; celle du côté gauche est plus considérable que l'autre. La partie supérieure du fœtus se termine par un cône tronqué; il n'y a ni tête, ni bras, ni traces de mamelons. Aucune rainure ou dépression n'indique qu'il y ait eu, dans cette région, un franc arrêt de développement des parties supérieures. Dans cette région, on ne constate pas la présence de poils.



La partie inférieure du fœtus est relativement bien conformée. On reconnaît très bien les organes génitaux; ils sont du sexe féminin, comme du reste ceux de l'autre enfant, et parfaitement conformés : grandes lèvres, petites lèvres, clitoris; ce dernier, ainsi que ses freins, démesurément infiltrés. L'anus est perforé et normal. Les membres inférieurs existent dans leurs positions respectives; les pieds seuls sont incomplets et mal tournés; le droit est déversé en dedans, il n'a que trois orteils munis de leurs ongles; le gauche est tourné en dehors, il possède quatre orteils, mais les deux derniers sont soudés ensemble à la base et réunis ensuite par une membrane.

Examen des organes internes. Avant de porter le scalpel à l'intérieur, afin de nous assurer qu'il n'y a, dans la partie supérieure du cône, aucune trace osseuse de l'atrophie du crâne qui pourrait ensuite nous échapper, nous prenons une longue aiguille et l'enfonçons verticalement dans des endroits différents. Elle pénètre chaque fois jusqu'à environ 8 centimètres,

sans jamais rencontrer la moindre résistance. Il n'y a donc absolument dans cette région, que des parties molles, que du tissu cellulaire infiltré.

Voici les résultats détaillés de l'autopsie :

1° *Système osseux.* Il se compose d'une colonne vertébrale ayant neuf vertèbres : six dorsales et trois lombaires. Elle est surmontée par un petit mamelon cartilagineux, moins gros que les vertèbres, et pointu à sa partie antérieure et supérieure. La colonne est arquée en arrière, c'est à dire bombée en avant. Les vertèbres dorsales, qui se laissent couper assez facilement par le scalpel, supportent, du côté droit, quatre côtes et deux fausses côtes; et, du côté gauche, trois côtes seulement et deux fausses côtes. Il n'y a pas de sternum. Les arcs osseux supérieurs sont réunis, en avant, par du tissu cellulaire et l'aponévrose de la ligne blanche abdominale. Le diamètre transversal de la poitrine est de 4 centimètres; le tissu œdématié a, de chaque côté, 3 centimètres et demi; ce qui donne 7 centimètres de paroi à un thorax de 4 centimètres. Les vertèbres lombaires sont articulées, avec un sacrum très étroit, qui paraît être soudé au bassin. Les membres inférieurs ont et fémur et tibia et péroné comme à l'état normal. Au pied droit, deux métatarsiens seulement : un pour le pouce et l'autre pour les deux autres orteils.

2° *Système nerveux.* Le système nerveux central manque en grande partie chez cet acéphale; cependant, il y a une cavité rachidienne, bien conformée d'ailleurs, qui contient, avec du liquide rachidien, depuis la première jusqu'à la dernière vertèbre, une moelle épinière peu dense, mais parfaitement caractérisée. On distingue très bien la substance grise de la substance blanche. La longueur de cette moelle est de sept centimètres; elle se termine en pointe à chacune de ses extrémités. D'elle partent à droite et à gauche des filets nerveux parfaitement reconnaissables, qui se rendent dans les espaces intercostaux. A la partie inférieure, il y a un plexus sacrolombaire très marqué, envoyant de nombreux filets dans les muscles du bassin et les membres inférieurs. Ces filets sont isolés et anormaux. Malgré de minutieuses recherches, nous n'avons pas vu les filets du nerf grand sympathique.

3° *Appareil circulatoire.* L'appareil vasculaire est fort peu développé. Il n'y a point de cœur, ni rien qui rappelle cet organe. C'est du cordon qu'il faut partir pour étudier la circulation. Celui-ci contient seulement deux vaisseaux : le plus gros se divise, en pénétrant dans l'abdomen, en trois branches : une qui se porte directement aux viscères du bassin; une autre qui remonte la colonne vertébrale et s'engage supérieurement dans la cavité rachidienne, envoyant des prolongements de chaque côté; et enfin une dernière, qui se dirige vers le membre inférieur gauche. Au moment de pénétrer dans la cuisse, celle-ci donne un tronc assez considérable, qui se dirige transversalement vers la racine du membre droit. Nous avons examiné attentivement les veines; elles n'offraient pas trace de valvules.

4° *Tube digestif et annexes.* Tout le tube digestif est constitué par un intestin d'environ 12 centimètres de longueur, il est replié plusieurs fois sur lui-même et maintenu à la colonne vertébrale par un mésentère assez étroit. Cet intestin commence supérieurement à l'ombilic, auquel il est adhérent, et se termine inférieurement à l'anus; son calibre est celui d'une plume d'oie. A un centimètre environ de l'ombilic, on trouve sur cet intestin un long appendice ayant environ un centimètre et demi, qui est probablement l'appendice vermiforme, et qui semblerait prouver que le tube digestif est réduit au gros intestin. Cet intestin contient une matière caséeuse et noirâtre qui, sous la pression, s'écoule par l'anus.

5° *Voies génito-urinaires.* Nous avons déjà parlé de la portion externe de ces organes. A l'intérieur, on trouve un conduit vaginal terminé par un corps plus dur et épais, qui était probablement l'utérus. Nous l'avions réservé pour l'étudier à part, mais, par suite d'un accident, cela nous a été impossible. On trouve une vessie avec son méat parfaitement distinct du conduit vaginal, deux urétères placés le long de la colonne vertébrale, et dont on peut très bien suivre la trace; plus haut, deux reins parfaitement isolés l'un de l'autre et relativement plus gros qu'à l'état normal. Ils reçoivent chacun un vaisseau, qui part de la branche centrale du cordon trifurqué; nous n'avons pas trouvé les capsules surrénales, qui manquen

pourtant si rarement; immédiatement au dessus des reins, commençait à apparaître le tissu cellulaire, qui remplissait toute la partie supérieure de la cavité intra-costale.

6° *Système musculaire.* Ce système est réduit supérieurement à quelques muscles pâles et blafards, mais inférieurement il est très bien constitué; on peut même, dans les membres inférieurs, isoler ces muscles les uns des autres; ainsi, nous avons remarqué que l'extenseur commun des orteils avait quatre tendons, quoiqu'il n'y eût du côté droit que deux métatarsiens et trois doigts; le quatrième tendon contournait le métatarsien et se fixait à sa partie inférieure; la ligne blanche abdominale était parfaitement apparente et très résistante.

En résumé, ce produit humain est sans tête, sans cerveau, sans poitrine, sans membres supérieurs, sans poumons, sans cœur, sans diaphragme, sans estomac, sans foie, sans rate, sans intestin grêle; il est incomplet dans les autres systèmes qu'il possède, à part peut-être pour les organes de la reproduction.

Un chirurgien déjà ancien, mais habile, Sandifort, avait groupé les monstres de cette espèce et en avait fait trois catégories : « une de ceux auxquels il ne manque que la tête; une » autre de ceux auxquels, outre la tête, il manque encore quel» ques autres parties; et enfin, une troisième de ceux qui sont » réduits à une masse irrégulière et informe. » *(Dict. des Sciences méd.*, t. XXXIV, p. 194.)

Isidore Geoffroy Saint-Hilaire, qui s'est beaucoup occupé de l'acéphalie, et qui a laissé sur elle des travaux qui prouvent avec quel soin il recherchait tout ce qui pouvait éclairer l'anatomie, la physiologie ou les fonctions de certains organes, divise les produits affectés de cette monstruosité en trois classes distinctes : 1° les *acéphaliens* proprement dits, privés de tête, mais non de bras et de poitrine, et ayant au moins l'un des deux membres supérieurs; leur corps n'est jamais symétrique; 2° les *péracéphaliens,* offrant les mêmes caractères que les précédents, mais privés en plus des membres thoraciques; enfin, 3° les *mylacéphaliens,* ou môles sans tête, ayant un corps irrégulier non symétrique, point de membres ou simplement des appendices, offrant des régions difficiles à constater et surtout à préciser.

Sandifort a été chicané pour sa théorie, on l'a vite oubliée; celle de Geoffroy Saint-Hilaire, au contraire, est encore aujourd'hui la base de la science. Eh bien! nous tenions à faire remarquer en passant que celle du savant moderne n'est, à peu de chose près, que celle de Sandifort, et nous ne voulons pas croire que le seul prestige de mots nouveaux, tirés en droite ligne du grec, suffise à notre époque pour faire oublier le nom d'un homme qui, le premier, a mis l'ordre là où n'existaient que la confusion et le chaos.

Quoi qu'il en soit, en appliquant ici la classification de Geoffroy Saint-Hilaire, on voit que le monstre soumis à notre observation vient naturellement se placer dans le deuxième groupe, celui des péracéphaliens; on peut même le considérer, abstraction faite des organes internes, comme un type de cette variété.

Cette singulière anomalie soulève une foule de questions du plus haut intérêt scientifique; mais, malgré les recherches nombreuses faites par les maîtres de la science, cette partie du mystère de la génération est encore aujourd'hui à peu près impénétrable.

Ce qui nous frappe tout d'abord dans l'observation qui précède, c'est l'époque prématurée de la naissance des jumeaux; ils sont venus au monde dans le commencement du huitième mois de la grossesse, et cela sans qu'aucun accident extérieur ait provoqué l'accouchement; si ce fait était isolé, il n'aurait que peu d'importance, mais on a remarqué qu'il en était ainsi pour tous les acéphaliens; il y a donc évidemment une raison de cette issue prématurée du produit : laquelle? Jusqu'à ce jour, elle échappe à la science, car nous ne considérerons pas comme une bonne raison celle d'Autenrieth, qui répond : « C'est parce que la nature cherche à maintenir la pureté de » l'espèce en expulsant prématurément les germes mal confor- » més. » Pour nous, c'est la réponse de Galilée aux fontainiers de Florence. Nous ne sommes pas à même de donner cette raison, cependant nous pensons qu'il ne serait peut-être pas illogique de chercher la cause de l'issue prématurée du produit dans la brièveté du cordon ombilical; ce cordon étant très court, les embryons demeurent comme suspendus à son extré-

mité dans le liquide amniotique; il y a tension permanente du cordon, et il vient un moment où, par suite du développement et du poids qu'ont acquis ces fœtus, ils sont peut-être à même d'exercer sur le placenta des tractions suffisantes pour amener un certain décollement de ses parties, et par suite l'accouchement prématuré. Nous basons cette théorie nouvelle sur ce que, chez les acéphaliens, le cordon très court est en tension presque permanente dans le liquide amniotique. Cette brièveté du cordon chez les acéphaliens n'a nullement été inventée pour les besoins de cette théorie; c'est un fait d'observation générale; tous les auteurs l'ont mentionnée, et on a vu certains cordons ne mesurer qu'une longueur de trois à quatre pouces; du reste, Geoffroy Saint-Hilaire utilise cette particularité pour la théorie générale des monstruosités. Quoi qu'il en soit, nous faisons prudemment suivre cette théorie de l'accouchement prématuré d'un gros point d'interrogation.

L'embryon qui nous occupe rentre dans la règle générale, quant au non isolement du fœtus dans la cavité utérine : en effet, très rarement les acéphaliens viennent au monde seuls; ils sont presque toujours le produit de grossesses doubles, triples, etc.; nous disons presque toujours, pour ne pas laisser de côté un cas unique dans la science, cas rapporté par Vallesnieri, où un acéphalien vint au monde seul. Mais nous reparlerons ultérieurement de ce fait, qui contrarie vivement les partisans de certaine théorie.

Ce fœtus rentre encore dans la règle générale pour ce qui est de la communauté du sexe avec son jumeau; ils étaient, en effet, tous les deux du sexe féminin; mais il s'en éloigne pour ce qui est de la priorité de naissance, car si ordinairement l'enfant bien conformé et viable sort le premier, ici ce fut le contraire qui se produisit. La question du sexe des jumeaux dans ces cas bizarres, et surtout de celui de l'acéphalien, est intéressante. Par une coïncidence presque fatale, ou pour des raisons inconnues, huit fois sur dix ces individus appartiennent au sexe féminin. Cela dépend-il, ainsi que le demande l'auteur de l'article *Monstruosité* du *Dictionnaire des Sciences médicales*, de ce que dans le premier temps de la vie fœtale, il n'y a qu'un sexe, le féminin, et doit-on en conclure que dans le plus grand

nombre des cas de difformités, il y a ralentissement d'évolution des organes, et par conséquent persistance de ce sexe? Un auteur dont le nom nous échappe, sans doute partisan de la théorie de Galien, admet que c'est là la véritable raison; que tous, dans l'embryon, nous sommes du sexe féminin, et que les organes ne proéminent qu'ultérieurement. A cette assertion trop accentuée, nous opposerons d'abord le raisonnement; il nous répugne d'admettre chez l'embryon, avec les progrès de l'âge, cette transformation successive d'organes d'un sexe à l'autre. Ce serait revenir au chaud pour les garçons, au froid pour les filles des anciens, et nous n'admettrons jamais que les changements anatomiques, et surtout micrographiques, qui seraient nécessaires pour cette transformation, puissent se produire. Nous opposerons enfin à cette assertion l'embryologie, qui nous apprend que si dans les premiers temps de la vie intra-utérine, à l'époque où le long de la colonne vertébrale, en arrière du corps de Wolff, se forment les organes génitaux internes, on ne peut décider si l'embryon sera plus tard mâle ou femelle; il se forme en même temps, non plus avec la *membrane intermédiaire de Reichert,* mais avec le *feuillet externe ou séreux* du blastoderme, les parties extérieures de la génération, parties concordant, par leur nature, à part quelques rares exceptions connues sous le nom impropre d'*hermaphrodisme,* avec la nature des organes génitaux intérieurs. Plus tard, avec le développement de l'embryon, ces deux portions se rencontrent et se soudent, et l'appareil génital se trouve ainsi complété, non par issue des organes extérieurs, mais par leur accolement et leur soudure avec les parties intérieures de la génération. Ainsi, pour nous, la question de la prédominence du sexe féminin chez les acéphales est loin d'être résolue, et la véritable raison est encore à trouver.

L'infiltration du tissu cellulaire des monstres acéphales est un phénomène presque constant. Celui qui fait le sujet de cette observation le présente à un si haut degré, que dans une étendue d'environ 8 centimètres, à la partie supérieure, on ne rencontrait pas traces d'autre tissu, et, dans la région thoracique, la partie œdématiée était presque double de la portion intra-costale. Cette infiltration s'explique par la gêne mécanique

de la circulation, et, d'après certains auteurs, par le défaut complet de circulation de retour chez les acéphales. Nous ne pensons pas que cette dernière théorie puisse être admise; car, si on trouve chez ces individus des organes pour la circulation de retour, c'est qu'elle a certainement eu lieu; sans cela, ces organes se seraient, sinon complétement atrophiés, au moins oblitérés.

Les membres inférieurs des acéphaliens sont généralement mal conformés. Très rarement ils ont le pied placé dans la position normale. On constate chez eux quantité de pieds bots, et surtout du genre varus. Quelques-uns, comme le nôtre, ont les extrémités tournées l'une en dedans, l'autre en dehors, comme si ces parties avaient subi un mouvement de torsion dirigé dans le même sens de rotation. Nous avons lu une observation où, comme ici, les doigts étaient réunis par une membrane analogue à celle des animaux aquatiques.

Nous pourrions maintenant suivre en détail et en général les divers organes de la vie végétative et de la vie de relation chez les acéphales, en faisant ressortir les analogies ou les différences avec le monstre qui nous occupe. Mais nous préférons renvoyer aux traités spéciaux sur la matière, tout en faisant cependant remarquer que par le peu d'organes qu'il possède, l'acéphalien que nous décrivons occupe un des derniers échelons de cette série, et que rarement, dans les péracéphaliens, on trouve un produit aussi incomplet.

Un point mérite cependant de fixer notre attention. Abstraction faite des causes de l'acéphalie, on peut se demander s'il n'y a pas une relation intime, nous dirons presque obligée, entre l'absence de certains organes et le défaut d'autres organes, qui ne paraissent pas être sous leur dépendance immédiate; nous pensons que si : chez notre monstre, nous trouvons une moelle épinière ayant environ 7 centimètres de longueur, occupant tout le canal rachidien (portion dorso-lombaire), avec absence complète des centres nerveux supérieurs; aussi n'avons-nous ni nerfs pneumo-gastrique, diaphragmatique, etc., ni plexus brachial. Nous pensons que c'est à cause de cela qu'il y a absence de cœur, de poumons, de diaphragme, de membres supérieurs, etc.; nous savons que cette proposition,

ainsi annoncée *à priori,* est fausse; mais nous l'acceptons quand même, parce qu'elle rend exactement notre pensée.

Béclard a été, pendant longtemps, partisan de cette théorie; il admettait que le système nerveux était la base de l'organisation, la base de la vie, et il en cherchait la preuve dans l'acéphalie. Cette monstruosité fournit, en effet, des faits nombreux qui, s'ils étaient bien observés, bien étudiés, pourraient jeter un grand jour sur cette question si épineuse et si difficile; mais il faut, pour cela, considérer les acéphales non comme un simple sujet de curiosité, mais comme un important sujet d'études. Béclard déduisait de ses nombreuses observations et de ses expériences les propositions suivantes, que nous retrouvons dans le *Dictionnaire des Sciences médicales :* « Toujours » on a vu, dans les acéphales, manquer les parties tant externes » qu'internes, qui reçoivent leurs nerfs des centres nerveux qui » siégent dans la partie du corps qui manque. Cette loi même » est si générale qu'elle se retrouve dans les deux autres mons» truosités qui vont nous occuper ci-après : l'anencéphalie et » les cyclopes ou monopses. On y verra de même l'absence » d'une partie externe ou interne suivre *irrésistiblement* le » manque du centre nerveux qui la vivifie, etc., etc. »

Serres s'est élevé contre cette théorie. Il refuse au système nerveux cette influence sur la production des organes, et l'attribue aux artères. Pour lui, l'absence de l'encéphale et des centres nerveux n'entraîne pas nécessairement l'absence des artères ou des veines, non plus que celle des nerfs des appareils des sens ou des organes locomoteurs. A l'appui de sa manière de voir, il cite les faits suivants : il a vu chez un fœtus un cerveau double avec un appareil pulmonaire simple; et un autre qui, avec un appareil respiratoire double et quatre nerfs pneumo-gastriques, n'avait qu'un cerveau. Pour lui, au contraire, « chacune des parties de l'organisation est soumise à » l'évolution de ses artères. Plus l'artère paraît à une époque » voisine de la conception, plus la partie à laquelle elle appar» tient sera précoce dans son développement. Exagérez le » calibre de la branche artérielle, et la partie présentera un » volume correspondant; effacez, au contraire, par la pensée » le tube sanguin, et l'organe sera également supprimé. » —

« Cette théorie a déjà été attaquée avec succès; elle repose sur » une substitution, assez fréquente dans les sciences, de la » cause à l'effet : les artères suivent et ne précèdent pas les » organes. » (Devergie.) — « Ce n'est pas parce que le tube » artériel manque, que la partie tarde à paraître ou ne paraît » pas du tout; mais c'est, au contraire, parce que l'organe » reste sans évolution, qu'aucun vaisseau ne s'y développe, » qu'aucune artère ne s'en détache et ne converge vers le » cœur. »

Dans les derniers temps de sa vie, Béclard avait abandonné sa théorie et reconnu qu'elle reposait sur une erreur matérielle : la naissance des nerfs dans les centres nerveux. Nous voulons aujourd'hui la reprendre, non plus en admettant, comme lui, que telles ou telles parties sont soumises directement à d'autres parties et ne se formeront pas si celles-ci n'apparaissent, car nous savons très bien que, dans l'embryon, les organes se forment isolément et ne subissent l'influence d'aucune priorité, mais, en attribuant au système nerveux central une influence telle que, sans lui, les organes déjà formés isolément ne puissent subsister, c'est à dire que, lorsqu'un organe sera déjà formé, et que son nerf, né spontanément, ne rejoindra pas son centre nerveux naturel, à cause de son absence, ce nerf, privé de la circulation nerveuse, s'atrophiera, et avec lui s'atrophiera et se résorbera l'organe auquel il était destiné. A l'appui de cette hypothèse, nous citerons d'abord le résultat des observations et des recherches de Béclard, qui n'en conservent pas moins toute leur valeur. « Toujours on a vu, dans les acéphales, manquer les parties » tant externes qu'internes, qui reçoivent leurs nerfs des cen- » tres nerveux qui siégent dans les parties du corps qui man- » quent. » Ensuite de nombreuses observations pathologiques. Que se passe-t-il, en effet, dans le cas où un nerf, comprimé par une tumeur ou atteint de paralysie, ne laisse plus circuler le fluide nerveux? Ce nerf perd de son volume (exemple : l'atrophie de la papille du nerf optique dans l'amaurose par compression), il a ensuite de la tendance à se résorber et à disparaître. De leur côté, les organes auxquels il envoie ses cordons perdent aussi de leur volume et s'atrophient (exemple : les atrophies

musculaires après les paralysies). Eh bien! nous pensons que dans l'acéphalie, à part le cas où l'absence des organes est due à la cause qui produit cette monstruosité, les choses se passent de cette façon, et les organes formés, privés de l'élément nerveux central, diminuent et se résorbent.

Tous les cas d'acéphalie que nous avons examinés, et surtout celui que nous rapportons, viennent à l'appui de cette hypothèse; mais on peut la combattre; peut-être même est-elle fausse; aussi, n'ayant aucun parti pris, allons-nous donner le moyen d'éclairer la situation. Nous comprenons très bien qu'au point de vue de l'extérieur on ait fait des classifications qui permettent immédiatement de grouper les cas d'acéphalie qui se présentent. Mais au point de vue qui nous occupe, ces classifications ne suffisent plus; puisque nous faisons du système nerveux central le dispensateur de la vie, c'est lui qui doit faire la base des classifications; aussi, nous proposerions qu'après dissection, on divisât les acéphaliens en quatre catégories.

1° Les *Cérébro-nervés,* ayant au moins des rudiments du cerveau, les nerfs qui s'y rendent en totalité ou en partie et une moelle épinière complète avec membres supérieurs (cas assez rares, quelques acéphaliens proprement dits);

2° Les *Cervico-nervés,* ayant un système nerveux central complet, commençant dans la région cervicale, plexus brachial, nerf diaphragmatique, etc., un ou les deux membres supérieurs, suivant les cas (la majorité des acéphaliens);

3° Les *Dorso-nervés,* ayant un système nerveux occupant en totalité ou en partie la région dorsale de la colonne vertébrale (sans membres supérieurs, et thorax; péracéphaliens);

4° Enfin les *Amyélo-nervés* ou simplement *anervés,* n'offrant aucune trace de la moelle épinière. Dans cette dernière catégorie rentreraient un grand nombre de mylacéphaliens de Geoffroy Saint-Hilaire, et les faits rapportés par Clarcke et Desault, dans lesquels on n'a trouvé aucune trace de l'axe cérébro-spinal. Dans cette dernière variété, on ne devra trouver que des organes en voie d'atrophie ou de résorption, le système nerveux central qui a existé ayant été résorbé lui-même et remplacé par un liquide emplissant la cavité rachidienne. A l'aide de cette classification, on peut vérifier l'hypothèse que nous avons émise,

on peut aussi la combattre, et comme c'est tout profit pour la science, nous engageons à l'employer. Elle aurait aussi l'avantage, si elle était exacte, de permettre de dire approximativement, *à priori,* étant données la longueur et la situation des centres nerveux, quels sont les organes qui se trouveront à l'intérieur et quels sont ceux qui seront atrophiés ou résorbés. Quoi qu'il en soit, nous sommes prêt à déclarer nous-même cette théorie nulle et non avenue, si on nous montre, par exemple, un individu appartenant au groupe des dorso-nervés, muni de membres supérieurs, de nerfs pneumo-gastriques, de poumons etc.; mais d'un autre côté, nous la maintiendrons jusqu'à preuve authentique du contraire.

Les causes de l'acéphalie sont encore un point intéressant de l'histoire de cette monstruosité. Les anciens, qui considéraient la naissance d'un monstre de cette espèce comme une calamité publique et comme annonçant une immense catastrophe pour l'année courante, n'y voyaient qu'une punition des dieux; plus tard on s'est contenté de dire que c'étaient des jeux du hasard, des écarts de la nature, puis enfin sont venus les partisans de l'influence maternelle qui n'ont vu là que le résultat des impressions de la grossesse. Cette théorie a régné longtemps; aujourd'hui elle a encore des racines profondes dans les classes ouvrières; elle explique facilement les faits, *à posteriori* par exemple, et s'applique à toutes les monstruosités. Qui ne se rappelle l'histoire rapportée par Malebranche, d'un enfant qui vint au monde avec de nombreuses fractures *parce que* sa mère avait été vivement impressionnée en voyant rompre un criminel; l'histoire de cette princesse, qui fut condamnée à mort pour avoir accouché d'un enfant noir, et qu'Hippocrate fit gracier *en prétextant* qu'une image de nègre, qu'elle avait au pied de son lit, avait pu influer sur la couleur de son enfant; cette mère qui mit au monde un fils velu comme un ours blanc *pour avoir vu* une figure de saint Jean vêtu d'une peau, et enfin, le cas se rapportant spécialement à l'acéphalie, de Katzky, où le fœtus fut acéphale *parce que* sa mère avait assisté souvent aux exécutions judiciaires par décollation. Nous ne nous arrêterons pas à discuter et réfuter cette théorie, que la raison et les faits ont depuis longtemps réduite à sa juste valeur.

Mais on a donné des causes plus sérieuses de cette monstruosité; deux théories méritent notre attention : celle qui l'attribue à un arrêt de développement dû à des accidents survenus au germe pendant la grossesse, et qui prend le nom de *théorie des causes accidentelles,* et celle des germes primitivement défectueux. Celle-ci a été vivement attaquée par Béclard, qui dit que ce serait une singulière rencontre que cette fécondation simultanée chez la femme, de deux germes, l'un bien et l'autre mal conformé; que d'ailleurs on rencontre souvent des parties qui ont existé et dont une portion a été résorbée. La première théorie, au contraire, qui est celle de Geoffroy Saint-Hilaire, rallie aujourd'hui toutes les opinions. L'affection peut être due ou à une maladie de l'embryon ou à des adhérences qui peuvent se former entre les membranes qui le constituent pendant la période de son accroissement. C'est après de nombreuses recherches et des expériences répétées que Geoffroy Saint-Hilaire est arrivé à trouver cette théorie, qu'il développe dans les termes suivants : « Or, voici comment, dans mon ouvrage sur les monstruosités humaines, j'ai expliqué la formation » des lames qui attachent le fœtus à ses enveloppes ambiantes. » Qu'une mère, dans les premiers temps de sa gestation, soit » très vivement affectée de sursauts, que cet événement lui » fasse ressentir une vive et subite contraction de tout le système musculaire, et que, durant cet effort général, l'utérus » agisse consécutivement sur les membranes fœtales et les » resserre violemment, celles-ci éprouveront de légères dilacérations, et ayant en conséquence perdu leurs eaux de l'amnios, » arriveront en contact sur le fœtus. Un effet subséquent à » tout ceci sera encore que les plaies des membranes ambiantes, » ainsi que celles des parties dans une position correspondante » chez le fœtus, se réuniront par une soudure mutuelle; voilà » un commencement des lames d'adhérence que des développements ultérieurs affirmeront et accroîtront, etc. » Après avoir insisté sur la brièveté du cordon chez les acéphaliens, et les tiraillements en sens inverses qui existent entre celui-ci et ces adhérences, Geoffroy Saint-Hilaire ajoute :

« Il faut donc reconnaître que les organes atteints par la » monstruosité, c'est à dire par de mutuelles adhérences et par

» les tirages qui s'en suivent, voient leur déformation expliquée
» par une égale participation de deux ordonnées qui sont d'une
» part le *nisus formativus,* ou la tendance à la formation nor-
» male, et d'autre part, l'action modificatrice d'une membrane
» qui agit comme une toile, laquelle aurait soulevé, dérangé, et
» maniéré tous les appareils. De là, nous n'avons ni l'effet plein
» et tout puissant du *nisus formativus,* ni ce tirage net et direct
» d'une membrane, mais nous obtenons un résultat mixte, c'est
» à dire le fruit de plusieurs efforts combinés, enfin une mons-
» truosité qui tient de ces diverses causes d'action. »

Telle est la théorie des causes accidentelles, qui attribue les monstruosités aux adhérences contractées par les fœtus avec leurs enveloppes sous des influences indirectes, adhérences arrêtant le développement des organes. En adoptant la théorie que nous avons émise au sujet du développement et de l'existence de ces derniers, nous devons ajouter que plus ces adhérences nuiront au développement du système nerveux central, plus la monstruosité sera considérable.

On a encore donné d'autres théories de l'acéphalie. Certains auteurs, s'appuyant sur d'autres faits extraordinaires, par exemple, sur ceux où deux ou plusieurs individus sont unis et collés ensemble, tels qu'Hélène et Judith, Rita et Cristina, les frères Siamois, etc., et sur la grossesse gémellaire dans l'acéphalie, ne voient dans cette affection que le résultat de la compression du fœtus par son congénère. Nous ne sommes pas disposé à adopter cette théorie : 1° parce que si cette compression peut en effet quelquefois avoir lieu dans les premiers temps de la fécondation, nous trouvons étrange qu'elle se fasse presque toujours sur la partie supérieure du fœtus, et qu'elle nuise presque uniquement au développement de cette partie; 2° parce que le produit compresseur devrait également, ce nous semble, subir la même compression, et présenter également des anomalies; or, les faits prouvent le contraire, le jumeau de l'acéphalien a toujours paru bien conformé; nous n'avons lu aucune observation dans laquelle il en fût autrement; 3° parce que la compression, il ne faut pas l'oublier, se ferait entre deux corps flottant tous les deux dans le liquide amniotique où les déplacements sont faciles; 4° parce que

souvent, comme dans le cas que nous avons observé, il y a deux œufs parfaitement distincts, et que cette compression devrait se faire à travers la double membrane qui sépare les fœtus; 5° enfin parce qu'on a vu un cas, parfaitement authentique, rapporté par Vallesnieri, dans lequel un acéphalien est venu seul au monde. Comment dans ce cas la compression eût-elle pu exister? On le voit, cette dernière théorie est facilement attaquable, mais le mystère de la génération est encore aujourd'hui si impénétrable que nous ne serions pas étonné que, dans certains cas, elle n'eût quelque valeur; mais, nous le répétons, nous ne saurions l'admettre en thèse générale. D'ailleurs, examinée de près, elle rentre dans la théorie des causes accidentelles, et pour nous, si dans certains cas elle est la cause de l'acéphalie, nous pensons qu'il est indispensable pour que la compression agisse que le liquide amniotique ait disparu, ou par déchirure, ainsi que le veut Geoffroy Saint-Hilaire, ou par simple résorption due à d'autres maladies ou accidents existant concurremment avec la grossesse.

Enfin, nous toucherons une dernière question, celle de la vitalité des acéphales. Ces monstres jouissent évidemment de la vie, puisque, au moment de la naissance, ils ne sont pas en état de putréfaction, ainsi que les enfants morts dans le sein de leur mère. D'ailleurs, on a vu des monstres de cette espèce faire quelques mouvements en dehors de l'utérus avant la section du cordon ombilical. Cette question de leur vitalité est encore soumise à plusieurs hypothèses. Afin de ne pas donner à ce travail une extension par trop considérable, nous renverrons les lecteurs que cette question intéresse au *Dictionnaire de Médecine* en 15 volumes, t. I, p. 187. Nous nous bornerons à dire ici que les auteurs sont divisés. Monro, Tiedmann, Breschet veulent que ces fœtus vivent complètement aux dépens du sang et du placenta maternel. Chez eux, puisqu'ils sont privés de cœur, la circulation se fait sous l'influence de l'impulsion de la circulation maternelle, comme, du reste, cela a lieu pour l'embryon pendant les premiers temps de la vie intra-utérine; l'élasticité des vaisseaux facilite chez eux la circulation de retour. D'un autre côté, Cazeaux, Spliedt, Claudius, Forster, se fondant sur ce que presque toujours il n'y a qu'un placenta,

et parfois des communications vasculaires directes entre les deux cordons, veulent qu'ils vivent uniquement sous l'influence de la circulation de leur jumeau. Mais nous ferons remarquer que, dans ce cas, ils recevraient toujours un sang qui aurait déjà servi et qui serait impropre à la vie; que les placenta sont quelquefois simplement adossés l'un à l'autre, sans communication; et qu'enfin cette théorie est évidemment inacceptable pour le cas, déjà cité, d'acéphalie, où il n'y avait qu'un seul fœtus. Pour nous, nous pensons, sans rejeter entièrement cette dernière hypothèse pour certains cas, que les produits acéphales vivent après l'arrêt de développement dont ils sont atteints, comme vivent les embryons pendant les premiers mois de la grossesse. Leur circulation se fait mal, il est vrai, ainsi que le prouve l'œdème quelquefois considérable du tissu cellulaire; mais elle se fait quand même, quoique très restreinte. Du reste, les monstres acéphales ne prenant presque aucun accroissement (abstraction faite de l'œdème), dépensent moins que les autres et peuvent exister dans des conditions qui seraient certainement fatales à des individus bien constitués.

Avions-nous donc raison de dire au commencement combien était importante l'étude de ces rares anomalies. Nous n'avons certainement qu'ébauché le sujet, et, cependant, une foule de questions capitales ont surgi du fait que nous avons observé et se sont offertes à nos méditations. Nous les avons discutées, mais non résolues; d'autres, plus instruits, seront peut-être plus heureux; aussi, pour faciliter ces études, qu'on nous permette, en terminant, de renouveler le vœu de Geoffroy Saint-Hilaire, vœu relatif à la conservation et à l'étude de tous les cas qui pourront se présenter. L'administration devrait, selon nous, défendre d'ensevelir ces monstres, et les conserver, car, qu'elle le sache bien, leur étude est des plus utiles, et seuls ils peuvent éclairer certains points encore très obscurs de la science.

GEOMETRICAL MISCELLANIES,

BY MATTHEW COLLINS, B. A.

Senior Moderator in Mathematics and Physics, and Bishop Law's Mathematical Prizeman, Trin. Coll. Dublin.

---

§ I.

Theorem. — *Given the angle* ABC *and the point* P *within it, to prove that the straight line* APC *drawn through the point* P *will be a minimum when* AP = CP′, BP′ *being perpendicular to* AC.

Proof by the 1st Book of Euclid. — Complete the parallelogram ABCO (*fig.* 1); draw any other line A′PC′ through P; then we have BC = OA, CP′ = AP, and (I, 27) ∧BCP′ = ∧OAP. ∴ (I, 4) BP′ = OP and ∧APO = ∧P′, which is a right ∧. ∴ OP is perpendicular to AC, and ∴ it exceeds OP″, perpendicular to A′PC′. Now △AA′C′ is > △AA′*c*, which is = △AA′O (I, 37). Take each from OAA′C′; ∴ △OA′C′ > △AOC′, which (by I, 37) is = △AOC. Thus △A′OC′ has a greater area and a less altitude than △AOC, and ∴ *a fortiori* A′C′ > AC.

§ II.

Theorem. — *The middle points of the three diagonals of a complete quadrilateral* ABCD *lie in directum.*

The three diagonals are AC, BD and EF (*fig.* 2); draw lines through B, C, D, E, F, parallel to the sides of ∧A; then (I, 43) the parallelogram AC = GC, and also = CH; ∴ A″K = A″L, ∴ (by

I, 43, *ex absurdo*) A′A″ passes through C. Now the middle of BD is also the middle of AA″, and the middle of EF is also the middle of AA′. But the middle points of AC, AA″ and AA′ are plainly in one straight line parallel to CA″A′, ∴ etc. Q. E. D.

§ III.

THEOREM. — *The greater angle of a plane triangle has the less bisector.*

Bisect the angles B and C of △ABC (*fig.* 3), by BB′ and CC′; et ∧ABC be > ACB. ∴ ABO (= ½ABC) exceeds ACO (= ½ACB); make ∴ DBO = ACO, and as OBC > OCB, ∴ DBC > DCB. ∴ (Eucl. I, 19) DC > DB. Now as DBB′ = DCC′ by construction, and BDC common, ∴ △△ DBB′, DCC″ are equiangular, and as DC > DB, ∴ CC″ > BB′, ∴ *a fortiori* CC′ > BB′.

— This property is also true for a spherical △.

THEOREM.— *If the two polygons* ABCDE, A′B′C′D′E′ (fig. 4) *have their corresponding sides parallel, then the polygon* 1 3 5 7 9 1 *is* = 2 4 6 8 10 2.

For

$$2(\triangle 13B' - \triangle 24A') = AA' - BB',$$
$$2(\triangle 35C' - \triangle 46B') = BB' - CC',$$
etc.

Then add the whole five such equations, ∴ etc.

§ IV.

PROBLEM. — *To find the locus of the foci of conics inscribed in a given parallelogram.*

Solution. — As no two tangents of a parabola are ever parallel, and no two of a central conic are parallel, except when the line joining the points of contact is a diameter; the conic must be central, and its centre must be the centre O of the parallelogram (*fig.* 5), one angle of which is GAH. Let F be the focus, GK and HL the projections of OF upon AG, AH. Then as OK = OL =

semi-transverse axis, $GK^2 - HL^2$ is given ($= OH^2 - OG^2$). Bisect $\wedge$GOH by OZ, and through F draw G′ZFH′ perpendicular to OZ and meeting OG, OH in G′, H′; then since $\wedge$A is given, ∴ FG′ : GK = FH′ : HL is given, and ∴ $FG'^2 - FH'^2 = 2G'H' . FZ$ is given; and as G′H′ : OZ is given, ∴ ZO . ZF is given. Hence the required locus of F is an equilateral hyperbola whose centre is O, and asymptotes parallel to the bisectors of the angles of the parallelogram.

§ V.

PROBLEM.— *To find the trilinear equation of the circumscribed and inscribed circles of a* △ABC (fig. 6).

Let α, β, γ, be the distances of *any* point P on the circumference from the sides $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; by Ptolomey's theorem, $PB.b = PA.a + PC.c$. Divide off by PA.PB.PC, and remembering that $PA.PB = D.\gamma$, $PB.PC = D.\alpha$, and $PC.PA = D.\beta$, where D = the diameter of circumscribed ○, we obtain

$$\frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\gamma}, \quad \text{or} \quad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0,$$

the required equation of circumscribed ○.

For the inscribed ○, let α, β, γ, be the distances of any point P on the circumference from the sides a, b, c, of the △ABC (*fig.* 7), and let α', β', γ', be the distances of P from the sides of the △A′B′C′, formed by the three points of contact A′, B′, C′, whose sides are $a' = B'C' = 2r\cos\frac{A}{2}$, $b' = 2r\cos\frac{B}{2}$, $c' = 2r\cos\frac{C}{2}$. Now, from the former case,

$$\frac{a'}{\alpha'} = \frac{b'}{\beta'} + \frac{c'}{\gamma'},$$

and as $\alpha'^2 = \beta\gamma$, $\beta'^2 = \gamma\alpha$, $\gamma'^2 = \alpha\beta$, by substitution we have

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{(\gamma\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}},$$

or

$$\therefore \cos\frac{A}{2} . \alpha^{\frac{1}{2}} + \cos\frac{B}{2} . \beta^{\frac{1}{2}} + \cos\frac{C}{2} . \gamma^{\frac{1}{2}} = 0.$$

For the exscribed ○ touching BC ($=a$) (*fig.* 8) externally $\frac{B'C'}{\alpha'}$ is $=\frac{A'B'}{\gamma'}+\frac{A'C'}{\beta'}$. But B'C' is plainly $=2r\cos\frac{A}{2}$, $A'C'=2r\sin\frac{B}{2}$, and $A'B'=2r\sin\frac{C}{2}$; ∴ we have

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{(\gamma\alpha)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}},$$

or

$$\therefore \cos\frac{A}{2}.\alpha^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{B}{2}.\beta^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{C}{2}.\gamma^{\frac{1}{2}}=0,$$

the greatest of the three terms having a sign contrary to the other two terms.

§ VI.

THEOREM.

Since $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ is $< a\times a$, and as $(a+x)+(a-x)=2x=a+a$, the product of *any* set of numbers, whose sum is given, is greatest when the factors are all equal to each other; hence

$$3a^3\times 3b^3\times 3c^3<(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3),$$

and $\sqrt[3]{}$ gives

$$a^3+b^3+c^3>3abc.$$

In like manner

$$4a^4\times 4b^4\times 4c^4\times 4d^4$$
$$<(a^4+b^4+c^4+d^4)(a^4+\ldots+d^4)(a^4+\ldots+d^4)(a^4+\ldots+d^4),$$

since the sum of the four factors at each side is $=4a^4+4b^4+4c^4+4d^4$. Taking $\sqrt[4]{}$, we get

$$a^4+b^4+c^4+d^4>4abcd.$$

And similarly in general

$$a^n+b^n+c^n+\ldots \text{ to } n \text{ terms} > n.\,abcd....$$

and if $a^n=A$, $b^n=B....$,

$$A+B+C+\ldots(n \text{ terms})>n.(ABC\ldots)^{\frac{1}{n}}.$$

Corollary. — Hence

$$a^2 + b^2 > 2ab,$$
$$a^2b + b^2c + c^2a > 3abc,$$
$$ab^2 + bc^2 + ca^2 > 3abc;$$

also

$$a^3b + b^3c + c^3d + d^3a > 4abcd,$$
$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab > 4abcd;$$

and in general, if the continued product of n real quantities A, B, C, D,... be $= 1$, the sum of these n quantities will exceed n. Ex. gr.:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{a} = 1,$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a} > 5,$$

and hence

$$a^2bcd + b^2cde + c^2dea + d^2eab + e^2abc > 5abcde.$$

§ VII.

Problem. — *Given the semicircle and* CF *perpendicular to its diameter* AOB (fig. 9), *to draw* ADE *so that* BCDE *may = maximum.*

Solution. — O being the centre, find G so that $AG.GO = \frac{1}{2}AC^2$; erect the perpendicular GE; join EA and EB, and it is done.

For then AE^2 is $= BE^2 + AD^2$,

$$\therefore AE.Ae < BE.Be + AD.Ad,$$

and as $\angle EBe = EAe = DAd$,

$$\therefore \triangle AEe < \triangle BEe + \triangle ADd, \quad \therefore \triangle BEe > dDEe.$$

Take them from BCdeE,

$$\therefore BCDE > BCde,$$

and is maximum.

§ VIII.

PROBLEM. — *To find the distance between the centre of gravity of a $\triangle$ and the centre of its inscribed circle.*

Let ABC (*fig.* 10) be a $\triangle$, A′A its altitude, D the middle point of BC, $DG = \frac{1}{3}AD$, and $\therefore$ the perpendicular $GG' = \frac{1}{3}AA'$, G being the centre of gravity; let Z be the centre, and ZZ′ the radius of its inscribed $\bigcirc = \frac{\Delta}{s}$, and $GG' = \frac{1}{3}AA' = \frac{2\Delta}{3a}$. Their difference $GG' - ZZ'$ is $\therefore = \frac{\Delta}{3as}(2s - 3a) = \frac{\Delta}{3as}(b + c - 2a)$, and the projection G′Z′ of GZ upon BC is $= DZ' - \frac{1}{3}DA' = \frac{c-b}{2} - \frac{c^2 - b^2}{6a} = \frac{c-b}{6a}(3a - b - c)$.

$$\therefore GZ^2 = G'Z'^2 + (GG' - ZZ')^2$$
$$= \frac{\Delta^2}{9a^2s^2}(b + c - 2a)^2 + \frac{(c-b)^2}{36a^2}(b + c - 3a)^2$$
$$= \frac{1}{36a^2s}[4(s-a)(s-b)(s-c)(b+c-2a)^2 + s(b-c)^2(b+c-3a)^2]$$
$$= \frac{1}{72a^2s}\left\{\begin{array}{l}(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)(b + c - 2a)^2 \\ +(a+b+c)(b-c)^2(b + c - 3a)^2\end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{72a^2s}(L + Ma + Na^2 + Pa^3 + Qa^4 + 4a^5),$$

where we easily find

$$L = 0 = M, \qquad N = 4(b-c)(3bc - b^2 - c^2),$$
$$P = 4(2b^2 - 9bc + 2c^2), \qquad Q = 8(b + c);$$

$$\therefore GZ^2 = \frac{1}{18s}[(b+c)(3bc-b^2-c^2) + a(2b^2-9bc+2c^2) + 2a^2(b+c) - a^3]$$
$$= \frac{1}{18s}(-a^3 - b^3 - c^3 + 2a^2b + 2b^2a + 2a^2c + 2c^2a + 2b^2c + 2c^2b - 9abc)$$
$$= \frac{1}{18s}[(a + b + c)(3ab + 3bc + 3ca - a^2 - b^2 - c^2) - 18abc]$$
$$= \frac{1}{9}(3ab + 3bc + 3ca - a^2 - b^2 - c^2) - \frac{2abc}{a + b + c}.$$

Corollary. — If a, b, c be the sides of a Δ,

$$2\Sigma(a^2b) > a^3 + b^3 + c^3 + 9abc.$$

To each add $2a^3 + 2b^3 + 2c^3$,

$$\therefore 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 3a^3+3b^3+3c^3+9abc,$$

or

$$\therefore \frac{2}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > a^3+b^3+c^3+3abc,$$

which is itself a very curious theorem.

§ IX.

THEOREM. — *If a quadrilateral* ABCD (fig. 11) *be described about a circle* O, AB + CD *is plainly* = AD + BC. *It is required to prove that* AB sin A sin B + CD sin C sin D *is also* = AD sin A sin D + BC sin B sin C.

For if AB meet CD in E, and if BC meet AD in F, then for ○O and *any* point in the line EF from which a pair of tangents are drawn, $\frac{\sin \text{FEA} + \sin \text{FED}}{\sin \text{AED}}$ remains constant and is $\therefore =$ $\frac{\sin \text{EFC} + \sin \text{EFD}}{\sin \text{CFD}}$. Clean this equation of fractions, then multiply each side by EF, observing that EF sin AEF = the perpendicular from F upon AB, and this perpendicular $\times$ sin AFB = AB sin A sin B, since in a plain Δ, if a' be the altitude on side a, $a' \sin A = a' \times \frac{a}{D}$ (where D = diameter of circumscribed ○),

$$\therefore = \frac{2\Delta}{D} = \frac{ab \sin C}{D} = a \sin B \sin C,$$

and thus the truth of the theorem appears evident.

§ X.

1. In a plane Δ, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

$$\therefore 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc},$$

$$\therefore\ 4bc\sin^2\frac{A}{2} = a^2 - (b-c)^2.$$

Hence if the ○Q (*fig.* 12) touch the ○s O and O′ both internally (or both externally) at the points A and B, we have

$$4QO.QO'.\frac{AB^2}{4R^2} = OO'^2 - (QO'-QO)^2 = OO'^2 - (OA - O'B)^2 = T^2,$$

or

$$\therefore\ R.T = AB.\sqrt{QO.QO'},$$

where T = the *direct* common tangent of the ○s O and O′, and R = QA = radius of ○Q. But if ○Q touch O externally and O′ internally *(vel contra)*, then

$$QO - QO' = OA + O'B,$$

and

$$OO'^2 - (QO - QO')^2 = OO'^2 - (OA + O'B)^2,\ \therefore = T'^2,$$

T′ being the *transverse* common tangent of the circles O and O′; hence in this case

$$T'.R = AB\sqrt{QO.QO'}.$$

2. Hence if four circles O, O′, O″, O‴, touch ○Q at A, B, C, D, since by Ptolomey's Theorem AB.CD — AC.BD + AD.BC = 0, in which substituting $\frac{R.T}{\sqrt{QO.QO'}}$ for AB and similar expressions for CD, AC, BD, etc., and then rejecting the common factor $R^2(QO.QO'.QO''.QO''')^{-\frac{1}{2}}$, we obtain

$$\text{tang}^t \text{ of } OO' \times \text{tang}^t \text{ of } O''O''' - \text{tang}^t \text{ of } OO'' \times \text{tang}^t \text{ of } O'O''' + \text{tang}^t \text{ of } OO''' \times \text{tang}^t\ O'O'' = 0,$$

where the common tangent of any two of these four circles is to be the direct or transverse one, according as their contacts with Q are similar or dissimilar. When two circles intersect, their transverse common tangent is of course imaginary; and when one circle lies within another, both their common tangents become imaginary.

3. If all these five small circles Q, O, O′, O″, O‴, were upon a spherical instead of a plane surface, their poles being Q, O, O′, O″, O‴; since in a spherical △ QOO′, $\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$,

$$\therefore\ 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

hence

$$2\sin QO \sin QO'\left(\frac{AB}{2R}\right)^2 = \cos(QO' - QO) - \cos OO'$$

$$\therefore = \cos(OA \mp O'B) - \cos OO',$$

according as the contacts at A and B are similar or dissimilar. Again if a *great* circle A′B′ touch O, O′ directly (or transversally) at A′ and B′ (*fig.* 13), it is plain OA′ and O′B′, being arcs of great circles perpendicular to A′B′, will intersect at its pole Q′, and in spherical $\triangle QOO'$, where $\wedge Q = \text{arc } A'B'$, we have, by the principle above mentioned,

$$2\sin Q'O \sin Q'O' \sin^2\frac{Q'}{2} = \cos(Q'O' - Q'O) - \cos OO',$$

i. e.

$$2\cos OA \cos O'B \sin^2\frac{A'B'}{2} = \cos(OA \mp O'B) - \cos OO'$$

$\therefore$ and above

$$= 2\sin QO \sin QO'\left(\frac{AB}{2R}\right)^2,$$

and

$$\therefore\ \frac{AB}{2R} = \sin\frac{A'B'}{2}\sqrt{\frac{\cos OA \cos O'B}{\sin OQ \sin O'Q}};$$

and now as before substituting this value for AB, and similar values for CD, AC, BD, etc., in Ptolomey's Theorem (art. 2), and then rejecting the common factor

$$4R^2\left(\frac{\cos OA \cos O'B \cos O''C \cos O'''D}{\sin QO \sin QO' \sin QO'' \sin QO'''}\right)^{\frac{1}{2}},$$

we obtain

$$\sin\frac{1}{2}(\text{tang } OO') \times \sin\frac{1}{2}(\text{tang } O''O''')$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\text{tang } OO'') \times \sin\frac{1}{2}(\text{tang } O'O''')$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\text{tang } OO''') \times \sin\frac{1}{2}(\text{tang } O'O'') = 0,$$

where the common tangent great circular arc to any pair of the

four small circles Q, O', O'', O''', as in plane, to be the direct or transverse one, according as their contacts with the small (or great) circle Q are like or unlike.

4. The general theorem of art. 2 supplies an easy proof of the well known theorem, that the four circles O, O', O'', O''', each of which touches the three sides of a plane $\triangle$ABC, will all touch another circle Q, the contact of the inscribed circle O with Q being unlike to that of the three exscribed circles O', O'', O''', touching the sides a, b, c, externally.

For supposing $a > b > c$, the common *transverse* tangent of O, O', is $= b - c$, and the common *direct* tangent of O'', O''', is $= 2s - a = b + c$;

$$\therefore \text{tang}\, OO' . \text{tang}\, O''O''' = b^2 - c^2;$$

similarly,

$$\text{tang}\, OO'' . \text{tang}\, O'O''' = a^2 - c^2,$$

and

$$\text{tang}\, OO''' . \text{tang}\, O'O'' = a^2 - b^2;$$

and as

$$a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2),$$

hence (by art. 2) the proposed theorem is true; and by means of art. 3, it appears that it is also true for the four small ○s touching the sides of a spherical $\triangle$. This extension of the theorem is due to the learned Doctor Hart, S.F.T.C.D.

For another demonstration of this theorem *in plano*, see *The Lady's and Gentleman's Diary* for 1855 (Prize Question), where we have shewn that the circle Q is what is commonly called the 9 point ○ of the $\triangle$ABC, passing viz. through the feet A', B', C' of its three altitudes APA', BPB', CPC', and bisecting the distances of every two of the four points A, B, C, P, any one of which, as well as P, is plainly the orthocentre of the $\triangle$ formed by the other three; and as each of these four triangles has obviously A', B', C' as the feet of its three altitudes, $\therefore$ the 9 point ○ Q must touch the whole 16 circles touching internally or externally the sides of the said four triangles.

§ XI.

1. If Δ be the distance of the centres of two circles whose radii are R and r, T = their direct common tangent, T′ = their transverse common tangent; then

$$T^2 = \Delta^2 - (R-r)^2, \quad \text{and} \quad T'^2 = \Delta^2 - (R+r)^2,$$
$$\therefore T^2 - T'^2 = 4R.r = 2R.2r = D.d,$$

the rectangle under their diameters.

If the circles touch each other externally, then

$$\Delta = R + r, \quad T' = 0, \quad T^2 = D.d;$$

and if the circles touch each other internally, then

$$\Delta = R - r, \quad T = 0, \quad T'^2 = -D.d.$$

When the circles cut orthogonally,

$$\Delta^2 = R^2 + r^2, \quad \text{and then} \quad T^2 = 2Rr = -T'^2,$$
$$\therefore T^2 + T'^2 = 0.$$

2. If every two of five circles A, B, C, D, E (*fig.* 14) touch each other, except D and E, then the common tangent of D and E is just double what it would be if D touched E.

Demonstration. — For as the other four circles touch C *all* externally, by putting A, B, C, D, E, to denote their diameters, and $\therefore$ by art. 1, the direct tangents to any two of them that touch each other, as A and B, $=\sqrt{A.B}$, we have, by art. 2 of the previous §, $\sqrt{A.D} \times \sqrt{B.E} + \sqrt{D.B} \times \sqrt{A.E} = \sqrt{A.B} \times$ direct common tangent of D and E, and $\therefore$ this commmon tangent of D and E $= \sqrt{D.E} + \sqrt{D.E} = 2\sqrt{D.E}$, i. e. = twice the common tangent of D and E, if they touched each other externally.

3. If A, B, C touch E externally and D internally (*fig.* 15), then when considering the four circles touching C, the diameter of D alone must be deemed *negative*, and $\therefore$ the common tangent to D and any one of A, B, E is to be the transverse one, whose square is negative; we have by the same theorem 2 of the last §, $\sqrt{A.(-D)} \times \sqrt{B.E} + \sqrt{B.(-D)} \times \sqrt{A.E} = \sqrt{A.B} \times$ transverse common tangent of D and E, $\therefore$ this transverse common tangent of D and E is $= 2\sqrt{E.(-D)}$, i. e. = twice the common

transverse tangent of D and E, if they touched each other *internally*.

Corollary I. — If Δ be the distance of the centre of D and E, whose radii are $d = \frac{D}{2}$ and $e = \frac{E}{2}$, then when they are touched by three circles A, B, C, that touch each other, their direct common tangent, when they are external to each other, is (by art. 2) $= 2\sqrt{D.E} = 4\sqrt{de}$, and so the square of this tangent or $16de$ must be $= \Delta^2 - (d-e)^2$;

$$\therefore \Delta^2 - d^2 = 14de + e^2.$$

Now if ○D degenerate into a straight line touching A, B, C; Δ and d become infinite, and the foregoing equation, divided by $\Delta + d$ or $2d(= D)$, then gives $\Delta - d = 7e =$ the distance of the center of ○E from a straight line touching the three circles A, B, C, which touch each other and E.

Corollary II. — Porism. If two circles D and E can be touched by one system of three circles A, B, C, touching each other, there must then exist an infinite number of such systems A, B, C, touching D and E and each other, and hence the following problem is either impossible or indeterminate.

Problem. — To describe three circles touching each other, each of which shall also touch two given circles.

4. If two circles A, B, and the straight line ab (*fig.* 16) touch each other, and also touch ○C and C′, then, A, B, C being the diameters as before, $ac = \sqrt{A.C}$, $bc = \sqrt{B.C}$, and $ab = \sqrt{A.B}$; and as $ab = ca + cb = c'a - c'b$,

$$\therefore \sqrt{A.B} = \sqrt{A.C} \pm \sqrt{B.C},$$

$$\therefore C^{-\frac{1}{2}} = B^{-\frac{1}{2}} \pm A^{-\frac{1}{2}}.$$

The sign + is for the little ○ C (between A and B), and — for the large ○ C′. Hence also $C + C' = 2(A + B)$, and $(C.C')^{-\frac{1}{2}} = B^{-1} - A^{-1}$.

It is easy to see that the line ab is cut harmonically at c and c', whether A touches B or not.

5. If a, b, c, r be the radii of four circles touching each other (say externally), we find by Carnot's *Géométrie de position*, art 334, or still more easily otherwise,

$$2\Sigma(a^2b^2cr + a^2r^2bc + \text{etc.}) = a^4b^4c^4 + a^4b^4r^4 + a^4c^4r^4 + b^4c^4r^4.$$

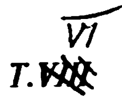


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

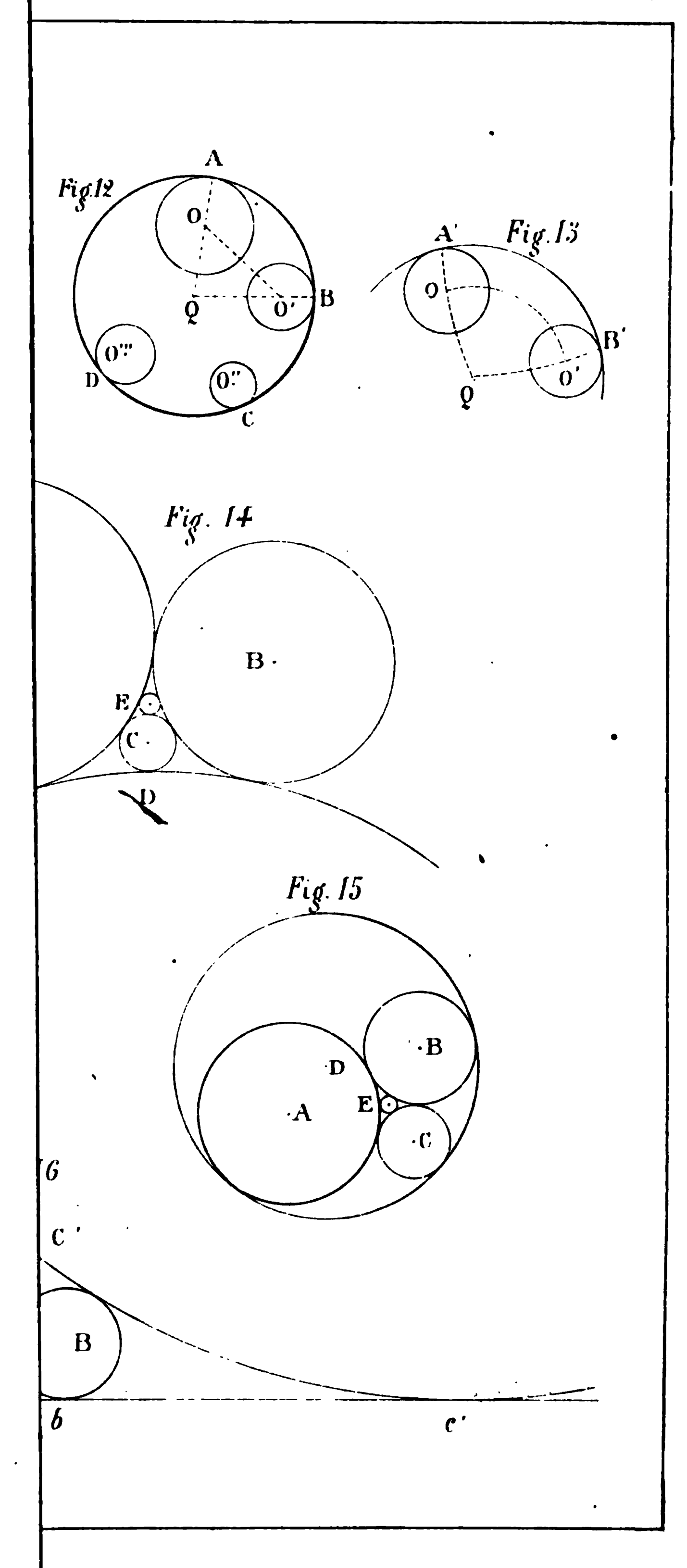
Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10


Fig. 12
A
O
Q
O'
B
O'''
D
O''
C
Fig. 13
A'
O
B'
Q
O'
Fig. 14
B
E
C
D
Fig. 15
D
B
A
E
C
16
C'
B
b
c'

This divided by $a^2b^2c^2r^2$, by putting A, B, C, R for $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{r}$, gives

$$R^2 - 2R(A+B+C) + 2BC + 2CA + 2AB - A^2 - B^2 - C^2 = 0.$$

One root of this quadratic would be $= 0$ [and $\therefore$ the other root $= 2(A+B+C)$], if we had $2AB + 2BC + 2CA - A^2 - B^2 - C^2 = 0$, giving $C^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} \pm A^{\frac{1}{2}}$, as already obtained in art. 4. In this case, one of the circles touching ABC would become a straight line, and if $r =$ radius of the other ○ E touching A, B, C, then

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

If one of the three given circles A, B, C become a straight line, we would have one of A, B, C, say $C = 0$, and the foregoing quadratic becomes

$$R^2 - 2R(A+B) + 2AB - A^2 - B^2 = 0,$$

and as the last term $2AB - B^2 - C^2 = -(A-B)^2$ is negative, $\therefore$ one root r is > 0, and the other root r' is < 0, and then $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, and $(rr')^{-\frac{1}{2}} = B - A = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, as found already in art. 4.

DU NOMBRE DES FREINS

QU'IL CONVIENT D'INTRODUIRE DANS LES TRAINS DE CHEMIN DE FER

PAR M. LINDER
Ingénieur des mines.

Une des questions qui, en matière de chemins de fer, préoccupe le plus le public, est celle qui se rapporte aux moyens d'arrêt des trains. Chaque année voit surgir de nouvelles inventions; mais comme la plupart du temps elles émanent de personnes qui ignorent les principes les plus élémentaires de la mécanique et les notions les plus simples de l'exploitation des voies ferrées, ces inventions vont rejoindre la multitude de celles antérieurement produites, repoussées par la pratique et depuis longtemps oubliées.

Le premier frein qu'on ait appliqué aux trains de chemin de fer est le frein à sabots de nos anciennes diligences, qui enraie les roues en exerçant une pression plus ou moins forte à la surface des bandages. C'est encore aujourd'hui, surtout à cause de sa simplicité, celui qu'utilisent presque toutes les Compagnies de chemins de fer; il présente de nombreuses variantes, mais qui n'intéressent que le mode de transmission du mouvement, et ne changent rien au principe essentiel de l'appareil.

Quel qu'il soit, un frein agit en proportion de la vitesse avec laquelle il fonctionne, du poids qu'il doit arrêter et de celui dont il détermine le glissement sur les rails. Il est facile de

comprendre, d'après cela, que la sécurité de la circulation sur les chemins de fer exige, non-seulement une excellente organisation du service des trains et la ponctuelle application du système des signaux, mais encore l'introduction dans les convois d'un nombre de freins tel, que, dans les circonstances même les plus défavorables, on soit assuré d'obtenir l'arrêt avant l'obstacle ou le point qu'il importe de ne pas atteindre.

C'est ce problème que je me propose de traiter. Il se réduit à la solution de cette question : Quel est le nombre minimum de véhicules à frein qu'il faut introduire dans un train dont le poids est connu? Ce nombre dépend de plusieurs éléments, mais surtout de la vitesse du train, de la nature et du système des freins, du profil de la voie et de l'état des rails. Il est évident, en effet, qu'un train dont les freins auront été serrés parcourra, avant de s'arrêter, un espace d'autant plus grand, que la vitesse du train sera plus considérable, l'enrayage des roues moins rapide, la voie en pente plus forte, et que les rails seront plus glissants.

§ I

Lorsqu'un train, lancé sur une voie rectiligne, cesse d'être soumis à la traction de la locomotive, il continue à se mouvoir en vertu de la vitesse acquise, mais en ralentissant graduellement sa marche sous l'influence des résistances passives normales et de celles que les agents du train y introduisent en serrant les freins.

On a alors, en vertu du principe des forces vives et en négligeant la variation de la force vive de giration des parties tournantes du train [1] :

$$\frac{P}{g} \cdot v\,dv = -F(v)\,de, \qquad (1)$$

P étant le poids du train;

---

[1] Pour tenir compte de la force vive de giration des parties tournantes, il faudrait augmenter la masse du train $\frac{P}{g}$ de $\frac{\varpi}{g} \cdot \frac{\rho^2}{r^2}$, où ϖ est le poids des parties tournantes, r leur rayon, ρ leur rayon de giration.

v, sa vitesse à un moment quelconque du mouvement après le serrage des freins;

de, l'espace parcouru pendant le temps dt, sous l'influence de la vitesse v et des résistances du train;

F(v), la somme des résistances qui agissent sur le train, et dont ci-dessous le détail :

$p\left(\frac{k-c}{1+av}+c\right)$.......... Résistance produite par le glissement des roues enrayées, p étant le poids des véhicules à frein, k et c des coefficients variables avec les circonstances, et a un coefficient sensiblement égal à 0,03 [1].

RAv^2..................... Résistance de l'air sur le train, déduite de la formule de Pambour et ramenée à la vitesse v, A étant la surface du train pressée par l'air en sens contraire de la marche et R un coefficient constant.

$(P-p)(0{,}0027+0{,}0003v)$. Résistance au roulement des roues tournantes, P étant le poids du train, p le poids des véhicules à frein. (D'après Harding et Bochet.)

$P.0{,}0002v$............... Résistance produite par le jeu du mécanisme de la locomotive, sans pression de vapeur, le régulateur étant fermé [2].

$\mp 0{,}001.PI$.............. Action de la gravité sur une voie en pente ou en rampe, I étant la hauteur, exprimée en mètres, dont la voie s'élève ou s'abaisse par kilomètre.

On a donc :

$$F(v)=p\left(\frac{k-c}{1+av}+c\right)+RAv^2+(P-p)(0{,}0027+0{,}0003v)$$
$$+\,0{,}0002v \pm 0{,}001.PI.$$

---

[1] Bochet : *Nouvelles recherches expérimentales sur le frottement de glissement.* (*Annales des Mines*, 5e série, t. XIX, p. 114.)

[2] Bochet : *Du frottement de glissement des wagons sur les rails.* (*Ann. des Mines*, 5e série, t. XIII, p. 289.)

Substituant cette valeur de F (v) dans l'équation (1), résolvant par rapport à *de* et intégrant entre les limites V et *o* de v, on obtient :

$$(2) \quad e = -\frac{P}{g}\int_V^0 \frac{v\,dv}{p\left(\frac{k-c}{1-av}+c\right)+RAv^2+(P-p)(0{,}0027+0{,}003v)+0{,}0002v \pm 0{,}001.Pi}$$

On ne peut résoudre cette intégrale; il est dès-lors nécessaire de modifier le dénominateur de la fonction différentielle, de façon à la rendre, non-seulement intégrable, mais encore assez simple pour que le résultat de l'intégration soit une expression de e d'un emploi commode pour les cas habituels de la pratique.

Bien que l'influence de la vitesse sur la résistance au glissement des roues enrayées sur les rails soit incontestable, elle n'est pas assez grande pour qu'on ne puisse y substituer, dans les circonstances où un calcul rigoureux n'est pas absolument nécessaire, une valeur moyenne, qu'on ne fera varier qu'avec l'état des surfaces frottantes. Je poserai donc :

$$p\left(\frac{k-c}{1+av}+c\right)=p.m$$

m étant un coefficient, dont je déterminerai expérimentalement la valeur moyenne pour chaque état particulier des rails.

La résistance de l'air, à vitesse égale du train, varie d'un lieu à un autre, suivant la direction du train et celle du vent. Mais elle est généralement faible, comparée à la somme des autres résistances qui agissent sur le train, et le terme RAv^2 est négligeable; sa suppression, d'ailleurs, peut, jusqu'à un certain point, servir de correctif à la valeur un peu trop forte que j'admets pour le frottement de glissement des véhicules à frein.

Avec ces modifications, l'équation (2) devient :

$$e = -\frac{P}{g}\int_V^0 \frac{v\,dv}{mp+(P-p)(0{,}0027+0{,}0003v)+0{,}0002\,Pv \pm 0{,}001\,Pi}$$

Cette expression est de la forme

$$e = -\frac{P}{g}\int_{V}^{0}\frac{v\,dv}{Mv+N}, \qquad (3)$$

M et N étant des constantes. Effectuant les calculs, on arrive à

$$e = \frac{P}{gM}\left(V + \frac{N}{M}\,Log.\frac{N}{MV+N}\right);$$

où

$$M = 0{,}0005\,P - 0{,}0003\,p,$$

$$N = 0{,}0027\,(P-p) + mp \pm 0{,}001.\,PI.$$

Cette formule est inadmissible dans la pratique; elle n'est pas assez simple pour être employée usuellement, et sa forme ne permet pas de la résoudre par rapport aux éléments, P, *p*, *m* et I, qui entrent dans la composition de M et N.

Mais on peut obtenir une valeur suffisamment approchée de *e*, en mettant à la place des résistances variables, dont la somme constitue le dénominateur $Mv + N$, les valeurs moyennes qu'elles prennent en faisant varier la vitesse depuis $v = V$ jusqu'à $v = 0$.

Posons $\frac{p}{P} = q$; $Mv + N$ devient

$$0{,}001.\,P\,[v\,(0{,}5 - 0{,}3.q) + 1000.mq + 2{,}7\,(1-q) \pm I],$$

dont la valeur moyenne entre les limites indiquées est

$$M.\frac{V}{2} + N = 0{,}001\,P\,[V\,(0{,}25 - 0{,}15\,q) + 1000.\,mq + 2{,}7\,(1-q) \pm I].$$

Substituant cette expression à $Mv + N$ dans l'équation (3), il vient :

$$e = -\frac{P}{g}\int_{V}^{0}\frac{v\,dv}{0{,}001.P\,[V\,(0{,}25-0{,}15q) + 1000.mq + 2{,}7\,(1-q) \pm I]},$$

ou en effectuant les calculs [1] :

$$(4) \qquad e = \frac{51\,V^2}{V\,(0{,}25 - 0{,}15.\,q) + 1000\,mq + 2{,}7\,(1-q) \pm I}.$$

---

[1] A Paris, $\frac{1}{2g} = 0{,}05097$; à la latitude de Bordeaux, cette valeur est

Cette formule se simplifie lorsqu'il s'agit de wagons en dérive, c'est-à-dire abandonnés par leur locomotive. Dans ce cas, la résistance produite par le jeu du mécanisme de la machine disparaît ; le premier terme du dénominateur s'annule, et

$$(4') \qquad e = \frac{51\,V^2}{1000\,mq + 2{,}7\,(1-q) \pm I}.$$

0,05099. On peut donc sans erreur sensible admettre $\frac{1}{2g} = 0{,}051$ pour toute la France.

M. Bochet (*Ann. des Mines*, 5e série, t. XIII. p. 90 et suivantes), en partant des mêmes bases, est arrivé aux formules suivantes :

$$1^\circ \; e = \frac{50\,V^2}{1000\,mq + 3\,(1-q) - I + V\,(0{,}25 - 0{,}15\,q) + V^2\left(\frac{110+n}{P}\right)}$$

(n étant le nombre des véhicules), formule qu'il repousse comme n'étant pas suffisamment exacte ;

$$2^\circ \; e = \frac{50\,V^2 + V^3}{1000\,mq + 3\,(1-q) - I + AV + BV^2 + CV^3},$$

A étant égal à $0{,}3 - 0{,}2.q - 0{,}015.I$;

B.........à $\frac{110 + 20n}{P} + 0{,}005 - 0{,}003\,q$;

C.........à $\frac{2{,}5 + 0{,}45n}{P}$.

Cette dernière représente les résultats de l'expérience avec une très grande approximation, mais elle est trop compliquée pour la pratique. La formule à laquelle j'arrive, diffère peu de la première de M. Bochet ; et néanmoins, quoique plus simple, elle donne des résultats qui s'éloignent très peu de ceux qu'on déduit directement de l'expérience, ainsi qu'on le verra plus loin.

On aurait pu arriver à la formule (4) par une méthode très élémentaire. Supposons en effet les résistances du train constantes pendant toute la durée du ralentissement ; ce ralentissement sera un mouvement uniformément retardé, dont les équations seront, en conservant les mêmes notations que ci-dessus, et en appelant φ l'accélération due aux résistances et à la pesanteur :

$$\varphi = g.\frac{F\,(v)}{P}, \qquad e = Vt - \frac{\varphi\,t^2}{2}, \qquad v = V - \varphi t.$$

Substituant la valeur de φ dans les deux dernières équations, puis éliminant t entre les équations résultantes, il vient

$$e = \frac{P}{2g.F\,(v)}\,(V^2 - v^2),$$

Si le train en dérive se réduit à un *véhicule à frein*, $q = 1$ et

$$(4') \qquad e = \frac{51 V^2}{1000m \pm I}.$$

Je vais déterminer maintenant les valeurs qu'il faut donner à m selon les circonstances. Je me servirai à cet effet d'expériences de diverses origines, les unes de MM. Bochet et Garella [1] ou de M. Roger [2]; les autres faites par mes soins sur le réseau du Midi.

MM. Garella et Bochet opéraient de la façon suivante dans leurs expériences : quand la vitesse à laquelle on voulait opérer était bien établie, le mécanicien sifflait aux freins et fermait le régulateur; aussitôt les conducteurs du train s'empressaient de serrer leur frein; c'étaient tantôt les uns, tantôt les autres, suivant les conventions faites d'avance, de manière à varier les conditions des expériences. Le train perdait alors graduellement sa vitesse et finissait par s'arrêter tout à fait. — A partir du moment du départ, on notait avec soin l'instant précis du passage devant chaque poteau télégraphique, le moment où l'on sifflait aux freins et le point exact de la voie où l'arrêt se produisait. Le tracé de la voie étant connu, ainsi que la position des poteaux télégraphiques, on avait ainsi tous les éléments nécessaires pour établir la courbe

---

et en passant à la limite du mouvement, qui correspond à $v = o$,

$$e = \frac{P}{2g \cdot F(v)} V^2.$$

Donnant à $F(v)$ sa valeur moyenne

$$0{,}001\, P[V(0{,}25 - 0{,}15q) + 1000\, mq + 2{,}7\,(1 - q) \pm I],$$

on retombe sur l'équation (4).

On arrive encore au même résultat, en observant que lorsqu'une résistance constante agit sur une masse dans la direction de sa vitesse initiale, son travail est égal à la variation totale de force vive de cette masse, ou, en d'autres termes, que dans le cas actuel :

$$F(v) \cdot e = \frac{P}{2g}(V^2 - v^2);$$

d'où l'on déduit, comme ci-dessus, l'équation (4).

(1) Bochet, *ibid.*, t. XIII, p. 288.

(2) Roger, *Note sur le frein de M. Dietz* (*Annales des Mines*, 5e série, t. XIX, p. 124).

de la marche du train, en prenant le temps pour abscisse et le chemin parcouru pour ordonnée. — Cette courbe était tracée à une échelle un peu considérable, de façon qu'une tangente quelconque donnait le moyen d'obtenir, non seulement la valeur très approchée de la vitesse du train au moment qui correspondait à la position du point de contact, mais encore celle relative au moment de l'enrayage des roues, à partir duquel la vitesse, qui, depuis quelque temps, était sensiblement constante, décroissait brusquement et faisait succéder au tracé curviligne un tracé rectiligne de la courbe. Ce dernier tracé, prolongé jusqu'à l'axe des abscisses, était évidemment la tangente au point d'inflexion, et donnait, avec une très grande approximation, la vitesse du train d'essai au moment du serrage des freins.

Les expériences que j'ai fait faire sur le réseau du Midi ont été effectuées d'une manière analogue, mais en opérant tantôt sur des machines isolées, préalablement pesées [1], tantôt sur des trains de toute nature, dont le poids a été évalué, avant toute expérience, aussi approximativement que possible.

Dans ces diverses expériences, c'est la formule (4) que j'ai appliquée.

M. Roger n'opérait que sur un seul wagon, qui était armé d'un frein Dietz enrayant très rapidement les roues. Ce wagon était poussé par une locomotive avec une vitesse déterminée, puis abandonné à lui-même en un point noté à l'avance. Comme dans les expériences précédentes, on observait exactement le temps employé à dépasser successivement les poteaux télégraphiques; d'où l'on concluait la vitesse du wagon à chaque instant de sa marche. A un signal donné, le frein était serré; la machine se séparait du wagon, et l'on notait le temps nécessaire à l'arrêt de ce dernier, ainsi que l'espace parcouru par lui à partir du signal du mécanicien.

La formule applicable à cette dernière série d'expériences est la formule (4''):

[1] La locomotive et le tender ont été pesés isolément. — Les expériences dont je parle ici ont été faites, sous ma direction, avec un soin minutieux, par M. Cazenave, garde-mines, attaché au contrôle des Chemins de fer du Midi.

$$e = \frac{51\,V^2}{1000\,m \pm I}.$$

On tire des équations (4) et (4'):

$$(5)\qquad m = \frac{51\,V^2 - e\,[V\,(0{,}25' - 0{,}15\,q) + 2{,}7\,(1 - q) \pm I]}{1000\,q\,e}.$$

$$(5')\qquad m = \frac{51\,V^2 \mp e\,I}{1000\,e}.$$

Le tableau suivant contient les valeurs de *m* que donnent ces formules par la substitution, à la place de *e*, V, *q* et I, de leurs valeurs déduites des expériences dont je viens de parler. Les données, selon leur origine, portent les indications B. G. (Bochet-Garella), R. (Roger), L. (Linder).

TABLEAU N° 1.

N°s d'ordre.	AUTEURS des expériences.	V	*e*	*q*	I	ÉTAT DES RAILS.	VALEURS de *m* déduites de l'expérience.	VALEURS moyennes de *m*.	*Observations.*
		mètres.	mètres.		mètres.				
1	L.	13,90	225	0,407	0	Rails très mouillés.	0,096	0,099	Pluie assez forte pendant tout le temps de ces expériences.
2	—	17,80	424	0,320	0		0,102		
3	—	18,00	490	0,320	— 8		0,098		
4	L.	9,00	92	0,307	0	Rails humides.	0,134	0,129	Expériences faites peu de temps après la pluie.
5	—	9,10	103	0,307	— 2		0,127		
6	—	10,00	138	0,307	— 6		0,127		
7	—	11,10	167	0,307	— 6		0,129		
8	B. G.	8,50	246	0,141	— 9	Rails encore assez humides de la rosée du matin.	0,140	0,143	
9	—	9,30	149	0,236	— 8		0,142		
10	—	9,30	211	0,180	— 8		0,137		
11	—	9,90	172	0,236	— 9		0,152		
12	B. G.	10,00	112	0,331	— 9	Rails assez secs.	0,153	0,149	
13	—	10,40	95	0,428	— 8		0,146		
14	—	10,70	138	0,331	— 9		0,143		
15	—	10,80	135	0,331	— 8		0,145		
16	—	11,25	214	0,235	— 9		0,148		
17	—	11,70	149	0,331	— 9		0,156		
18	R.	5,50	9	1,000	0	Rails secs.	0,171	0,167	Les expériences de M. Roger donnent une valeur de *m* très notablement supér• à celle que donnent les expériences de MM. Bochet et Garella.
19	—	8,50	20	1,000	0		0,184		
20	B. G.	13,50	146	0,424	— 8		0,159		
21	—	13,75	118	0,541	— 9		0,161		
22	—	16,00	190	0,459	— 9		0,160		
23	R.	12,00	35	1,000	+ 5	Rails très secs.	0,205	0,217	
24	—	15,60	49	1,000	+ 5		0,229		

Les valeurs moyennes de *m* sont, comme on voit, à quelques millièmes près et selon les circonstances :

Dans le cas de rails		très mouillés	0,10
—	—	humides	0,13
—	—	légèrement humides	0,14
—	—	assez secs	0,15
—	—	secs	0,17
—	—	très secs	0,22

valeurs qui ne diffèrent pas ou qui diffèrent très peu des coefficients de frottement de fer sur fer généralement admis. En les appliquant aux expériences qui ont servi à les déterminer, on obtient pour l'espace parcouru, à partir de l'enrayage des roues jusqu'à l'arrêt des wagons, des nombres *e'* qui s'écartent rarement des nombres *e* déduits de l'observation de plus des 0,05 de la valeur de *e*. L'écart est, en valeur absolue, de 4^m50 en moyenne. (Voir le tableau suivant.)

TABLEAU N° 2.

N°s d'ordre.	ESPACE théorique parcouru à partir du moment de l'enrayage des roues jusqu'à l'arrêt. e' (mètres.)	ESPACE réel parcouru à partir du moment de l'enrayage des roues jusqu'à l'arrêt. e (mètres.)	ÉCART absolu $e' - e$ (mètres.)	ÉCART proportionnel $\frac{e' - e}{e}$
	1° Coefficient $m = 0,10$.			
1	219,4	225	− 5,6	0,025
2	431,7	424	+ 7,7	0,018
3	479,4	490	− 10,6	0,022
	2° Coefficient $m = 0,18$.			
4	94,7	92	+ 2,7	0,029
5	101,4	103	− 1,6	0,015
6	134,8	138	− 3,2	0,023
7	165,2	167	− 1,8	0,011
	3° Coefficient $m = 0,14$.			
8	246,0	246	0,0	0,000
9	151,6	149	+ 2,6	0,017
10	205,3	211	− 5,7	0,027
11	177,1	172	+ 5,1	0,029
	4° Coefficient $m = 0,15$.			
12	114,70	112	+ 2,70	0,024
13	92,50	95	− 2,50	0,026
14	130,90	138	− 7,10	0,051
15	130,40	135	− 4,60	0,034
16	210,00	214	− 4.00	0,019
17	155,80	149	+ 6,80	0,045
	5° Coefficient $m = 0,17$.			
18	9,07	9	+ 0,07	0,007
19	21,67	20	+ 1,67	0,083
20	136,40	146	− 9,60	0,066
21	111,40	118	− 6,60	0,056
22	177,90	190	− 12,10	0,063
	6° Coefficient $m = 0,22$			
23	32,62	35	− 2,38	0,068
24	51,00	49	+ 2,00	0,041

L'approximation que la formule (4) donne pour e est, comme on voit, bien suffisante pour les différents cas de la pratique.

L'espace e ne devient nul que lorsque $V=0$, c'est-à-dire quand le train est au repos, ce qui conduit à cette conclusion connue que l'arrêt instantané d'un train en marche par l'action des freins n'est qu'un de ces rêves absurdes dont un ignorant seul peut poursuivre la réalisation.

Cherchons le temps minimum qu'il faut pour arrêter un train et la moindre distance à laquelle ce train peut être arrêté.

La plus faible valeur de e correspond au cas où toutes les voitures sont enrayées à la fois, où le train franchit la plus forte rampe, où les rails sont neufs et très secs; alors

$$q=1, \quad I=+35\ \text{[1]}, \quad m=0{,}30,$$

et

$$e=\frac{51\,V^2}{0{,}10\,V+335}. \tag{6}$$

Le temps que ce train mettra à s'arrêter par l'action des freins se déduit de l'équation

$$de=-\frac{P}{g}\cdot\frac{v\,dv}{F(v)};$$

de étant égal à $v\,dt$, on a, par substitution :

$$dt=-\frac{P}{g}\,\frac{dv}{F(v)}.$$

Je supposerai, comme précédemment, la résistance $F(v)$ constante entre les valeurs-limites de la variable indépendante v et égale par conséquent à la valeur moyenne $\frac{V-v}{2}$, V étant la vitesse du train au moment où les freins commencent à agir, et v sa vitesse à un moment quelconque du ralentissement. En intégrant les deux équations précédentes, on aura :

$$e=\frac{P}{2g}\cdot\frac{V^2-v^2}{F\left(\frac{V-v}{2}\right)}, \qquad t=\frac{P}{g}\cdot\frac{V-v}{F\left(\frac{V-v}{2}\right)}.$$

---

[1] C'est la plus forte rampe du chemin de fer que je connaisse.

Éliminant $\dfrac{V-v}{F\left(\dfrac{V-v}{2}\right)}$ entre ces deux équations, il vient :

$$t=\frac{2e}{V+v},$$

qui, pour $v=0$, c'est-à-dire pour la durée totale du ralentissement, devient [1] :

$$(6') \qquad t=\frac{2e}{V}.$$

Introduisant dans les formules (6) et (6′) les données auxquelles correspond l'arrêt le plus prompt, on trouve que :

Pour une vitesse	de 18	kilomèt.	par heure,	$e=$ 3^m,80,	$t=$ 1^{sec},52;
—	de 36	—	—	$e=$ 15, 16,	$t=$ 3, 04;
—	de 48	—	—	$e=$ 26, 95,	$t=$ 4, 04;
—	de 60	—	—	$e=$ 42, 04,	$t=$ 5, 04.

La formule (6′) étant indépendante de l'accélération, est générale et s'applique à tous les trains. Pour en apprécier le degré d'exactitude au point de vue de la pratique, je vais l'appliquer à celles des expériences marquées B G, dont j'ai fait usage précédemment, et dans lesquelles la durée du ralentissement dû à l'enrayage des roues a pu être déterminée avec exactitude, grâce à la précision des moyens employés. (Voir le tableau n° 3.)

---

(1) On arrive facilement au même résultat, en considérant le ralentissement du train comme un mouvement uniformément retardé par une résistance constante $F\left(\frac{V}{2}\right)$. On a, en effet, en appelant φ l'accélération due à cette force,

$$\varphi=g.\frac{F\left(\frac{V}{2}\right)}{P}, \qquad e=Vt-\frac{\varphi t^2}{2}, \qquad v=V-\varphi t.$$

Éliminant φ et résolvant par rapport à t, on arrive aux mêmes résultats que ci-dessus.

TABLEAU N° 3.

Nos d'ordre des expériences.	Vitesse initiale du train en mètres par seconde. V	RAPPORT du poids glissant au poids du train. q	Pente de la voie en mètres par kilomètre. I	ÉTAT DES RAILS. m		PARCOURS effectué par le train en glissant. théorique e'	réel e	TEMPS mis par le train à effectuer les parcours théorique t'	réel t	RAPPORT $\frac{t'-t}{t}$
	mètres.		mètres.			mètres.	mètres.	secondes	secondes	
8	8,5	0,141	9		Rails encore	246	246	55,3	55,5	—0,003
9	9,3	0,236	8	0,14	assez humides	151,6	149	32,6	31,0	+0,050
10	9,3	0,180	8		de la rosée	205,3	211	44,1	43,0	+0,025
11	9,9	0,236	9		du matin.	177,1	172	35,7	33,5	+0,065
12	10,0	0,331	9			114,7	112	22,9	21,5	+0,065
13	10,4	0,428	8			92,5	95	17,7	16,0	+0,100
14	10,7	0,331	9	0,15	Rails	130,9	138	24,4	23,0	+0,060
15	10,8	0,331	8		assez secs.	130,4	135	24,1	22,0	+0,095
16	11,25	0,235	9			210,0	214	37,3	36,5	+0,022
17	11,7	0,331	9			155,8	149	26,6	24,5	+0,086
20	13,5	0,424	8			136,4	146	20,2	20,5	—0,014
21	13,75	0,541	9	0,17	Rails secs.	111,4	118	16,1	16,0	+0,006
22	16,0	0,459	9			177,9	180	22,2	22,5	—0,013

Ces résultats sont assurément bien assez approchés pour les cas ordinaires de la pratique, surtout si l'on tient compte de l'indétermination qui règne, quoi que l'on fasse, sur la valeur à donner au coefficient m, et dont le tableau n°1 donne une idée.

Jusqu'à présent, je n'ai considéré la question de l'arrêt des trains, pour ainsi dire, qu'au point de vue idéal, c'est-à-dire en supposant que le serrage des freins a lieu au moment même où le mécanicien arrête l'introduction de la vapeur dans les cylindres; mais il est loin d'en être ainsi dans la pratique. Quelle que soit la rapidité avec laquelle s'effectue la manœuvre du serrage, il s'écoule toujours un temps plus ou moins long entre le moment où le mécanicien siffle aux freins et celui où l'enrayage des roues est complet. Telle qu'elle est, la formule (4), et même toute autre plus exacte, n'a donc, si elle n'est convenablement modifiée, qu'un intérêt purement théorique.

Les circonstances qui influent sur la durée de l'intervalle de temps dont il vient d'être question sont très nombreuses, et dépendent les unes de la nature et de l'état des freins, les autres de la manière dont le service s'effectue et de la place que les véhicules à frein occupent dans les convois (1) : quelque prompte qu'elle soit, l'action des freins à sabots n'est, en effet,

(1) Autant que possible, l'enrayage doit commencer par la queue du train, afin d'éviter l'impulsion que l'arrière du convoi imprime sur l'avant, lorsque le ralentissement commence par la tête.

jamais instantanée; selon le plus ou moins de soin apporté à leur construction ou à leur entretien, l'enrayage est plus ou moins complet et s'effectue plus ou moins vite; les conducteurs de train, au moment où le signal d'arrêt se fait entendre, ne sont pas toujours à portée du levier ou de la manivelle de commande; les véhicules à frein n'occupent pas, dans tous les cas, l'emplacement le plus favorable (1), etc. Il est donc essentiel d'évaluer expérimentalement les pertes de temps résultant de ces diverses causes, afin d'introduire dans la formule précédemment établie une correction qui permette de fixer quelle est, dans les conditions ordinaires de service courant, le parcours moyen effectué par un train, à partir du moment où le signal d'arrêt du mécanicien s'est fait entendre jusqu'à celui où le train s'est arrêté.

Les expériences, au moyen desquelles j'ai déterminé l'expression destinée à compléter la formule (4), ont été faites sur les lignes du Midi, en opérant exclusivement sur des trains réguliers. Elles ont été réparties en trois catégories, selon la vitesse des trains et leur composition :

1° Trains express et directs, dont la vitesse de pleine marche est supérieure à 50 kilomètres;
2° Trains omnibus et omnibus-mixtes, dont la vitesse de pleine marche varie de 31 à 50 kilomètres;
3° Trains de marchandises, ayant une vitesse inférieure à 30 kilomètres.

En général, le temps qui s'écoule entre le signal du mécanicien et le serrage complet des freins provient d'abord de ce

(1) Si l'action des freins avait lieu de façon à arrêter instantanément le mouvement des roues, elle pourrait souvent être une source de dangers sérieux pour les voyageurs et quelquefois une cause d'avaries graves pour le matériel, surtout dans les trains de grande vitesse, pour lesquels q serait un peu fort. Ce fait a été mis en pleine évidence par M. O. de Lacolonge, dans une note qu'il a publiée, il y a quelques années, dans le *Génie industriel* de MM. Armengaud frères (*Considérations sur l'enrayage instantané des roues de wagons*, tome XIII, mars 1857). L'expérience s'est chargée de confirmer les conclusions du savant ingénieur : témoin le frein Constant, frein dit *instantané*, dont l'effet a eu pour résultat la torsion des essieux et la rupture de diverses pièces du wagon qui portait l'appareil.

que le serre-frein est à une certaine distance de l'appareil de manœuvre quand le mécanicien lui fait le signal d'arrêt, et ensuite de la lenteur avec laquelle agit l'appareil de commande des freins. Or, tant que les sabots ne sont pas au contact des roues, aucune résistance importante n'agit sur le train, qui continue son mouvement en vertu de la vitesse acquise; l'espace parcouru entre le signal du mécanicien et l'arrêt du train peut donc être représenté très approximativement par un terme de la forme $\alpha = Vt$, t étant égal à $\frac{e-e'}{V}$, où e exprime l'espace réellement parcouru depuis le signal du mécanicien jusqu'à l'arrêt complet du train;

e', l'espace parcouru, d'après la formule (4), à partir de l'enrayage complet des roues des véhicules à frein jusqu'à l'arrêt du train;

V, la vitesse du train, au moment où le signal d'arrêt est donné aux serre-freins.

TABLEAU N° 4. — *Détermination de l'expression* $\frac{e-e'}{V}$ *pour les trains marchant à une vitesse supérieure à 50 kilomètres.*

N°s d'ordre.	V	q	I (pente)	ÉTAT DES RAILS. Degré d'humidité ou de sécheresse.	ÉTAT DES RAILS. m	ESPACE e réellement parcouru	PARCOURS théorique e'.	$e-e'$.	$T = \frac{e-e'}{V}$	Observations.
	mèt.		mèt.			mèt.	mèt.	mèt.	secondes	(¹) Les expériences 1, 4 et 6, ont été faites par une pluie faible. Les rails *très mouillés* correspondant au coefficient $m = 0,10$, et les rails *humides* à $m = 0,13$; j'ai pris $m = 0.11$ pour les rails *mouillés* ou *très humides*.
1	18,05	0,315	4	Très humides (¹). (Mouillés.)	0,11	550	460	90	5,0	
2	18,00	0,320	8	Très mouillés.	0,10	580	479	101	5,6	
3	17,80	0,320	0	Id.	0,10	460	432	28	1,6(²)	(²) Les serre-freins se tenaient à portée du levier, prêts à le manœuvrer. (Frein Tabuteau.)
4	16,66	0,372	4	Très humides.	0,11	375	338	37	2,2(²)	
5	16,66	0,300	5	Assez secs.	0,15	400	312	88	5,3	
6	13,90	0,376	5	Très humides.	0,11	300	242	58	4,2	

Tous les trains ayant servi aux expériences, dont les résultats sont consignés dans ce tableau, étaient munis de freins du système Tabuteau (¹).

(¹) La théorie de ce frein, qui repose sur l'application du genou de Poinsot, a été développée par M. de Lacolonge dans le *Génie industriel* de MM. Armen-

Si l'on fait abstraction des expériences 3 et 4, où les serre-freins se tenaient à portée du levier de manœuvre prêts à l'abaisser, il reste quatre expériences, dont la moyenne des valeurs de T est exactement 5 secondes. Cette moyenne ne diffère de la valeur la plus grande que de $0^s,6$, c'est-à-dire que l'erreur en moins qui résulterait de l'emploi de $T=5$ secondes

---

gaud frères. L'auteur est arrivé aux conclusions suivantes relativement à l'emploi de cet appareil :

Facilité d'exercer très rapidement, par la simple action de l'homme sur un levier, une forte pression sur les sabots, pression qui peut atteindre même un enrayage complet, de façon que le frein est à la fois un frein ordinaire et un frein de détresse.

Une expérience de plusieurs années a confirmé l'exactitude de ces conclusions; mais elle a fait disparaître en même temps la plupart des objections que l'emploi du genou, comme commande le frein, avait fait naître chez quelques personnes, particulièrement au point de vue de la conservation du matériel et de l'usure des bandages.

Essayé d'abord avec méfiance sur les chemins de fer du Midi, le frein Tabuteau, après une modification heureuse introduite dans la construction de son levier de commande, a fini par être préféré à tout autre par les agents des trains, et, non-seulement, il est aujourd'hui employé dans tous les trains express, mais encore dans quelques trains omnibus-mixtes circulant sur de fortes pentes.

M. Goschler (*Traité pratique de l'entretien et de l'exploitation des chemins de fer*, t. III, p. 439) reproche au frein Tabuteau la complication de la transmission et la longueur de la course à faire parcourir à l'extrémité du levier de manœuvre. La complication de la transmission est plus apparente que réelle, et la pratique a prouvé qu'elle ne donne pas lieu à plus d'entretien que celle du frein ordinaire; mais elle est difficile à régler, et nécessite de la part des agents une surveillance très minutieuse. — Quant à la longueur de la course à l'extrémité du levier, les ingénieurs de la Compagnie des chemins de fer du Midi y ont remédié, en raccourcissant et courbant le levier, et en fixant à son extrémité un contre-poids suffisamment lourd pour amener, par sa chute, les sabots presque au contact des bandages; le serre-frein n'a plus alors qu'un faible effort à produire pour arrêter la rotation des roues. Lorsque celles-ci tournent librement, le levier est soutenu par un crochet placé à hauteur d'homme, de façon que son déclanchement s'effectue vite et sans trop de fatigue.

Un autre système de frein est essayé en ce moment (juin 1869) sur les chemins de fer du Midi : c'est le système *Stilmant*, en usage déjà aux chemins de fer de l'Est. Le serrage des sabots contre les bandages des roues est obtenu au moyen d'un coin en fer mobile, perpendiculairement à l'assiette de la voie et pressant, par ses deux faces obliques, les faces exté-

n'atteindrait pas 11 mètres dans le cas le plus défavorable, celui d'un train marchant à une vitesse de 65 kilomètres à l'heure.

On peut donc admettre que, généralement, la valeur de e pour les express ne dépassera pas

$$e = 5\,\mathrm{V} + \frac{51\,\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}(0{,}25 - 0{,}15q) + 1000\,mq + 2.7(1-q) \pm \mathrm{I}}.$$

Tableau n° 5. — *Détermination de $\frac{e-e'}{\mathrm{V}}$ pour les trains de voyageurs ayant une vitesse variant de 31 à 50 kilomètres à l'heure, et circulant sur des déclivités de 0^{m} à $0^{m}020$ par mètre.*

N°s d'ordre.	V	q	I (pente)	ÉTAT DES RAILS. DEGRÉ d'humidité ou de sécheresse.	ÉTAT DES RAILS. m	PARCOURS réel e.	PARCOURS théoriq. e'	$e-e'$.	$\mathrm{T} = \frac{e-e'}{\mathrm{V}}$	*Observations.*
	mèt.		mèt.			mèt.	mèt.	mèt.	second.	
1	13,5	0,275	16	Humides.	0,18	600	379	221	16,3	Les trains dont les nombres de la dernière colonne sont marqués d'un astérisque (*) contenaient au moins un véhicule muni du frein à levier (système Tabuteau). On voit que généralement pour eux la différence $e-e'$ donne une valeur de T très inférieure à celle qu'ont fournie les trains ne contenant que des freins à vis.
2	13,4	0,380	10	Très humides.	0,11	480	254	226	16,8	
3	—	0,224	5	Id.	0,11	575	372	203	15,1	
4	—	0,311	12	Assez secs.	0,15	300	233	67	5,0*	
5	—	0,275	16	Id.	0,15	500	305	195	14,5	
6	—	0,340	10	Id.	0,15	300	201	99	7,4*	
7	—	0,340	6,5	Id.	0,15	200	187	13	1,0*	
8	—	0,260	0	Très humides.	0,11	350	274	76	5,6*	
9	11,3	0,311	17	Assez secs.	0,15	300	193	107	9,5	
10	—	0,278	18	Très humides.	0,11	500	386	114	10,7	
11	—	0,278	16	Id.	0,11	425	345	80	7,1*	
12	9,7	0,182	3	Très mouillés.	0,10	275	213	62	6,4*	
13	8,9	0,182	0	Id.	0,10	320	208	112	12,6*	

La moyenne de toutes les valeurs de T est ici d'environ 10 secondes; mais celle de ces valeurs qui correspondent aux trains ne contenant pas de frein à levier dans leur composition, est de 14 secondes; la valeur maxima est 16ˢ,8. D'autres essais, que je n'ai pas cru devoir consigner au tableau précé-

rieures des supports des sabots. Le mouvement du coin est obtenu par l'action d'une vis et détermine un serrage très énergique.

Un avantage des deux systèmes dont il vient d'être question, c'est qu'ils permettent de substituer la fonte ou le fer au bois pour la construction des sabots, et de réaliser ainsi une notable économie dans les frais d'entretien.

(Note ajoutée pendant l'impression).

dent [1], me portent à penser que la moyenne de 14 secondes est trop faible pour les trains ordinaires, et qu'il convient de la porter à 15 secondes au moins; de telle sorte que, pour les trains de voyageurs-omnibus et omnibus-mixtes, supposés ***régulièrement*** desservis,

$$e = 15\,V + \frac{51\,V^2}{V(0,25 - 0,15\,q) + 1000\,mq + 2,7(1 - q) \pm I}$$

exprimerait la valeur moyenne du parcours effectué par ces trains à partir du signal donné par le mécanicien jusqu'à l'arrêt, et

$$e = 17\,V + \frac{51\,V^2}{V(0,25 - 0,15\,q) + 1000\,mq + 2,7(1 - q) \pm I}$$

sa valeur maxima, qui est rarement atteinte, et dans le cas de négligence volontaire des agents seulement, élément moral dont on ne peut tenir compte dans une pareille formule.

TABLEAU N° 6. — *Détermination de* T *pour les trains de marchandises transportant ou non des voyageurs.*

Nos d'ordre.	V	q	I	ÉTAT DES RAILS. DEGRÉ d'humidité ou de sécheresse.	ÉTAT DES RAILS. m	e	e'	$e - e'$	$T = \frac{e - e'}{V}$	*Observations.*
	mèt.		mèt.			mèt.	mèt.	mèt.		
1	9,85	0,076	3	Très humides.	0,11	750	485	275	27,9	Ces trains étaient exclusivement munis de freins à vis. Les nos 2 et 3 renfermaient des voitures à voyageurs.
2	8,35	0,300	8	Id.	0,11	300	124	176	21,1	
3	8,30	0,261	0	Id.	0,11	275	108	167	20,1	
4	8,30	0,078	0	Assez secs.	0,15	375	217	158	19,0	
5	8,30	0,077	10	Id.	0,15	840	584	256	30,8	
6	5,50	0,071	0	Très humides.	0,11	200	132	68	12,4	

Ce dernier tableau donne lieu à des observations analogues à celles faites à l'occasion du précédent. La moyenne de T n'est

[1] Les trains sur lesquels j'ai opéré ayant été des trains réguliers de l'exploitation, on comprend qu'il m'ait été souvent difficile de déterminer, avec une approximation suffisante, ceux de leurs éléments qui étaient nécessaires à l'établissement de mes formules. J'ai considéré comme nulles toutes celles de mes expériences dont les résultats ne me paraissaient pas avoir un cachet d'exactitude indubitable.

que 22 secondes; mais ce nombre, en réalité, est trop faible, et il me paraît prudent de l'élever à 30 secondes environ, le service des trains de marchandises étant, en général, infiniment moins bien surveillé que celui des trains de voyageurs, tant au point de vue du personnel, que de l'entretien des freins. En admettant cette base, on a, pour déterminer *e*, l'expression suivante :

$$e = 30\mathrm{V} + \frac{51\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}(0{,}25 - 0{,}15q) + 1000mq + 2{,}7(1-q) \pm \mathrm{I}}.$$

Les expériences dont il est question aux tableaux précedents ne s'appliquent qu'à des pentes égales ou inférieures à 20 millimètres par mètre, sur lesquelles, sauf de rares exceptions, la traction a lieu avec des machines ordinaires. Sur les rampes supérieures à 20 millimètres par mètre, on fait maintenant souvent usage, *à la descente,* de la contre-vapeur, qui agit comme frein et empêche les trains de prendre une vitesse exagérée. Lorsque, dans ces circonstances, on fait fonctionner les freins, la valeur de *e* ne dépend plus seulement des résistances dont il a été tenu compte dans la formule (4), mais encore de celle de la contre-vapeur. Alors, comme dans le cas où le ralentissement est déterminé par la simple action des freins, le mouvement du train à partir du signal d'arrêt donné par le mécanicien se compose de deux mouvements; mais ceux-ci, au lieu d'être de nature distincte, l'un sensiblement régulier, l'autre retardé, sont retardés tous deux : le premier sous l'influence de la contre-vapeur et des résistances normales du train, le second sous l'influence des mêmes forces, auxquelles le serrage des freins est venu ajouter la résistance au glissement des roues enrayées.

Apppelant F_{cv}, la résistance opposée à la marche du train par l'action de la contre-vapeur;

F_f, celle qui résulte de l'action des freins;

F_N, les résistances normales du train en marche supposées constantes et égales à la moyenne résistance du train pendant la première période du ralentissement;

$F_{N'}$, les mêmes résistances pendant la seconde période du ralentissement jusqu'à l'arrêt;

V, la vitesse initiale du train, c'est-à-dire la vitesse qu'on observe quand le mécanicien siffle aux freins;

V', la vitesse, au moment de l'enrayage des roues par les freins;

ε, le parcours effectué par le train pendant la période de ralentissement, durant laquelle les freins n'interviennent pas;

ε', le parcours effectué pendant la seconde période de ralentissement;

et négligeant, comme précédemment, la force vive de giration des parties tournantes, ainsi que l'action de l'air sur le train, on a :

$$e = \varepsilon + \varepsilon',$$
$$(F_{cv} + F_N \pm 0{,}001.\,PI)\,\varepsilon = \frac{P}{2g}(V^2 - V'^2)$$
$$(F_{cv} + F_f + F_{N'} \pm 0{,}001.\,PI)\,\varepsilon' = \frac{P}{2g}\cdot V'^2,$$
$$F_N = 0{,}001.\,P\,[2{,}7 + 0{,}15\,(V + V')],$$
$$F_{N'} = 0{,}001.\,P\,(2{,}7 + 0{,}15\,V'),$$
$$F_f = mq,$$
$$V' = V - \frac{g}{P}(F_{cv} + F_N \pm 0{,}001.\,PI)\,T,$$

T étant la durée, exprimée en secondes, de la première période de ralentissement, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre le signal d'arrêt donné par le mécanicien et l'enrayage des roues des véhicules à frein.

En effectuant les calculs, la première et la dernière de ces équations deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} e = \begin{cases} \dfrac{51\,(V^2 - V'^2)}{\dfrac{1000\,F_{cv}}{P} \pm I + 2{,}7 + 0{,}15\,(V + V')} \\ + \dfrac{51\,V'^2}{1000\left(\dfrac{F_{cv}}{P} + mq\right) \pm I + 2{,}7 + 0{,}15\,V'}, \end{cases} \\ V' = \dfrac{V - 0{,}0098\left(\dfrac{1000\,F_{cv}}{P} \pm I + 2{,}7 + 0{,}15\,V\right)T}{1 - 0{,}15\,T}, \end{cases}$$

formules, dans lesquelles la valeur moyenne de T, comme on l'a vu précédemment, est de 5 secondes environ pour les trains munis de freins à levier, de 15 pour les trains-omnibus et omnibus-mixtes n'ayant que des freins à vis, et de 30 secondes pour les trains de marchandises.

Lorsque l'arrêt du train a lieu par l'action continue de la contre-vapeur, sans l'intervention d'aucun frein, e s'obtient en faisant $T = 0$ et $q = 0$ dans ces formules, ce qui donne

$$e = \frac{51\,V^2}{\frac{1000\,F_{cv}}{P} \pm I + 2{,}7 + 0{,}15\,V},$$

c'est-à-dire que lorsqu'un train est soumis à l'action de la contre-vapeur, avec ou sans l'intervention de freins, le parcours effectué par le train avant de s'arrêter est d'autant plus grand que le poids du train est plus considérable, sa vitesse initiale plus grande, et que l'inclinaison de la voie est plus forte on plus faible, selon que le train descend une pente ou franchit une rampe (1).

En général, lorsque, sur les pentes, on se sert de la contre-vapeur comme moyen régulier d'exploitation, son action a pour but de régulariser la marche des trains, de manière à arriver à un mouvement sensiblement uniforme. Quand ce résultat est atteint, il est évident que la contre-vapeur, augmentée des résistances passives du train, fait équilibre à la pesanteur et aux forces de même sens développées par le mouvement du

(1) Ces conséquences, d'ailleurs évidentes *a priori*, ont été vérifiées par d'assez nombreuses expériences, dont toutefois je ne donnerai pas ici le détail, les données y relatives n'ayant pu être déterminées avec une suffisante précision. Il me suffira de dire que, sur la rampe du Capvern (32 mètres par kilom.), les trains de voyageurs ont toujours été, à valeurs de q à peu près égales, arrêtées à des distances notablement inférieures à celles qu'on obtenait pour les trains de marchandises, toujours plus lourds. Dans mes expériences, l'action des freins et celle de la contre-vapeur étaient tantôt employées simultanément, tantôt séparément, de façon à faire ressortir l'influence, sur l'arrêt des trains, de chacun des éléments entrant dans la constitution des formules. Ces expériences seront reprises, mais de façon à obtenir des données plus précises du problème à résoudre.

convoi; et, par conséquent, qu'à partir du moment où le serrage des freins est ordonné jusqu'à celui où les roues des véhicules à frein sont enrayées, le mouvement reste uniforme; l'espace ε devient alors égal à VT et les formules (7) se réduisent à l'équation unique

$$(7') \qquad e = \mathrm{VT} + \frac{51\,\mathrm{V}^2}{1000\left(\frac{\mathrm{F}_{cv}}{\mathrm{P}} + mq\right) \pm \mathrm{I} + 2{,}7 + 0{,}15\,\mathrm{V}},$$

qui n'est plus qu'un cas particulier de la formule (4). Je ne puis indiquer, quant à présent, ni le degré d'approximation de cette formule, faute d'expériences convenables, ni, par conséquent, les corrections qu'il faudrait peut-être y introduire pour la rendre pratique.

En résumé, lorsque l'arrêt d'un train est obtenu par la seule action des freins, la distance moyenne à laquelle cet arrêt a lieu peut être représentée d'une manière très approximative par l'expression

$$(8) \qquad e = \mathrm{VT} + \frac{51\,\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}(0{,}25 - 0{,}15q) + 1000\,mq + 2{,}7(1 - q) \pm \mathrm{I}},$$

dans laquelle T est égal à 5, pour les trains qui sont munis de freins à levier;

— — à 15, pour les trains de voyageurs, omnibus ou mixtes, munis de freins à vis bien entretenus et manœuvrés par des agents spéciaux;

— — à 30, pour les trains de marchandises, munis de freins à vis, moins bien surveillés que ceux des trains de voyageurs, et manœuvrés par des hommes d'équipe.

Lorsqu'on emploie simultanément la contre-vapeur et les freins pour arrêter le train, cette formule n'est plus applicable, et il faut recourir, suivant le cas, aux formules (7) ou à la formule (7') établie en dernier lieu, après y avoir introduit les corrections que l'expérience indiquera pour chaque ligne ferrée.

§ II

La distance à laquelle les signaux doivent être faits des points à couvrir n'est pas la même sur tous les chemins de fer; elle dépend de diverses circonstances, et plus particulièrement du profil de la voie. En général, elle varie de 800 à 1000 mètres, mais souvent on a dépassé ces limites, adoptant, par exemple,

1000 mètres, sur les pentes de 0^m à 0^m006 par mètre;
1200 — , sur les pentes supérieures à 0^m006 jusqu'à 0^m011 au plus;
1500 — , sur les pentes de plus de 0^m011 par mètre.

Le nombre de freins à introduire dans un train dépend, comme on l'a vu, de la vitesse du train, de son poids, du profil du chemin et de l'état des rails. Il doit être réglé de telle façon, que le train, supposé placé dans les conditions les plus défavorables, puisse s'arrêter avant d'avoir parcouru la distance protectrice, et sans que le mécanicien soit obligé de se servir des moyens de résistance que la machine met à sa disposition, moyens dont, autant que possible, cet agent ne doit faire usage que dans le cas de danger pressant. Cette condition satisfaite, on peut dire qu'on a paré en même temps à presque toutes les éventualités fâcheuses accessoires, telles que rupture d'attelage, etc.

Or, la vitesse et le poids d'un train étant donnés, ainsi que la pente maxima de la voie dans le trajet que le train doit effectuer, le cas le plus défavorable à l'arrêt correspond à des rails très mouillés, c'est-à-dire à une valeur de $m = 0{,}10$. Appelant E la distance couverte par les signaux, il faut alors, pour que le train s'arrête avant d'avoir parcouru l'espace E, que le rapport $q = \frac{p}{P}$ satisfasse à la condition

$$E \geqq VT + \frac{51V^2}{V(0{,}25 - 0{,}15q) + 100q + 2{,}7(1-q) - I},$$

ou

$$q \geqq \frac{51V^2 - (E - VT)(2{,}7 + 0{,}25V - I)}{(E - VT)(97{,}3 - 0{,}15V)}.$$

Si l'on applique cette condition aux principales espèces de trains qui circulent sur les voies ferrées, on obtient les valeurs de q, qui figurent au tableau suivant :

TABLEAU N° 7. — *Calcul des valeurs minima de* $q = \frac{p}{P}$, *pour diverses vitesses et diverses pentes.*

NATURE DES TRAINS.	VITESSE DES TRAINS en kilomèt. par heure.	VITESSE DES TRAINS en mètres par seconde.	PENTE maxima de la voie par kilom.	MINIMUM de q	*Observations.*
			mètres.		
Trains rapides.	60	16,7	6	0,154	J'ai pris
			11	0,201	$E = 1000^m$ pour les pentes comprises entre 0^m et 6^m par kilomètre;
Trains de voyageurs omnibus et omnibus-mixtes.	50	13,9	6	0,130	$= 1200^m$ pour les pentes supérieures à 6^m jusqu'à 11^m;
			11	0,155	
			20	0,225	$= 1500^m$ pour les pentes supérieures à 11^m.
	40	11,1	6	0,084	
			11	0,121	Au point de vue de la vitesse, j'ai pris pour T les valeurs qui résultent de mes expériences, savoir :
			20	0,201	
			32	0,327	
Trains de marchandises transportant ou non des voyageurs.	25	7	6	0,049	T = 5, pour les trains rapides;
			11	0,094	= 15, pour les trains omnibus et omnibus-mixtes.
			20	0,161	= 30, pour les trains de marchandises.
			32	0,286	

La question que je me suis posée se réduit maintenant à la solution de ce problème très simple :

Combien peut-on, par frein, mettre au plus de voitures ou wagons dans un train, dont la vitesse est connue, selon la pente maxima de la voie qu'il doit parcourir, toutes autres conditions restant celles qui ont servi à l'établissement du tableau précédent ?

Pour fixer les idées, je considérerai le matériel roulant des chemins de fer du Midi.

Ce matériel présente les poids suivants, selon qu'il est vide ou *à pleine charge* :

		Vides.	A charge complète (1).
AL.	Coupés-lits	6720 kil...	8280 kil.
A.	Voitures de 1re classe	6020 » ...	7580 »
AB.	Voitures mixtes (1re et 2e cl.), sans frein.	6280 » ...	8620 »
ABF.	— — à frein	7600 » ...	9480 »
B.	Voitures de 2e classe, sans frein	5660 » ...	8260 »
BF.	— — à frein	6940 » ...	9540 »
C.	Voitures de 3e classe, sans frein	6020 » ...	9270 »
CF.	— — à frein	7020 » ...	10140 »
P.	Wagon-poste	8340 » ...	8600 »
			A charge moyenne forte.
DF.	Fourgon à frein	5000 » ...	9500 »
W.	Wagons de marchandises	4500 » ...	9000 »

On peut évaluer, en moyenne, à 9500 kilog. le poids d'une voiture à frein à charge complète ou à peu près.

En 1867, la proportion des voyageurs de chaque classe transportés par les trains du réseau du Midi a été la suivante :

Voyageurs de 1re classe	0,106
— de 2e —	0,124
— de 3e —	0,770

Si toutes les voitures renfermaient le même nombre de places, on pourrait donc représenter, par exemple, la composition moyenne d'un train-omnibus de n voitures à voyageurs, qui ne contiendrait qu'*un seul frein*, par une expression de la forme

$$1\,DF + (n-1)(0{,}106\,A, + 0{,}124\,B + 0{,}770\,C);$$

mais les nombres de places des trois principaux types de voitures A, B, C, étant entre eux :: 24 : 40 : 50, les coefficients précédents sont à modifier, afin d'exprimer, non plus les nombres proportionnels des voyageurs transportés, mais ceux des voitures qui composent les trains. Or, ces derniers nombres étant respectivement (2) :

Voitures de 1re classe	0,193
— de 2e —	0,135
— de 3e —	0,672

(1) A raison de 65 kilog. par personne.

(2) Ces coefficients ne sont pas exactement ceux qu'il faudrait appliquer; le premier, qui est relatif aux voitures de 1re classe, comprenant, non-seulement les voitures de cette classe qui font partie des trains omnibus et

la composition des principales espèces de train peuvent s'exprimer de la manière suivante, n étant le nombre de voitures correspondant à un frein :

Trains express.......... $1\,AL + (1\,P \text{ ou } 1\,AB) + (n-3)\,A + 1\,DF$;
— omnibus......... $(n-1)(0{,}193\,A+0{,}135\,B+0{,}672\,C)+1\,DF$;
— omnibus-mixtes [1]. $0{,}45\,nW + (0{,}55\,n-1)\,(0{,}193\,A + 0{,}135\,B + 0{,}672\,C) + DF$;
— de marchandises.. $(n-1)\,W + DF$.

Substituant aux indications des véhicules leurs poids à charge complète, on a pour poids maximum P des fractions de train qui ne renferment qu'un frein :

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Trains express.......... } P = 7580n + 3640 \\ \text{— omnibus......... } P = 8807n + 693 \\ \text{— omnibus-mixtes... } P = 8894n + 693 \\ \text{— de marchandises.. } P = 9000n + 500 \end{cases}$$

On a vu que $q = \frac{p}{P}$, p étant le poids des véhicules à frein qui entrent dans la composition du train et P le poids de ce train. Mettant dans cette équation, à la place de P, successivement ses valeurs tirées des équations (9), et faisant $p = 9500$ kilog., poids moyen fort d'un véhicule à frein *chargé*, il vient :

$$(10)\quad \begin{cases} \text{Trains express........... } q = \dfrac{9500}{7580\,n + 3640} \\ \text{— omnibus........... } q = \dfrac{9500}{8807\,n + 693} \\ \text{— omnibus-mixtes.... } q = \dfrac{9500}{8894\,n + 693} \\ \text{— de marchandises... } q = \dfrac{9500}{9000\,n + 500}, \end{cases}$$

---

mixtes, mais encore celles qui composent les trains express. Pour être exact, il eût fallu faire la part de ces dernières ; n'ayant pas à ma disposition les éléments de défalcation nécessaires, j'ai dû me contenter des coefficients qui résultent des documents officiels, quoiqu'ils donnent pour P des valeurs un peu différentes.

[1] La comparaison d'un grand nombre de trains de cette catégorie a donné pour la composition moyenne :

Wagons de marchandises........................	0,45
Voitures à voyageurs et fourgons à frein........	0,55

ou résolvant par rapport à n :

$$
(11) \left\{
\begin{array}{lll}
\text{Trains express} \ldots\ldots\ldots\ldots & n = \dfrac{9500 - 3640\,q}{7580\,q} \\
\text{— omnibus} \ldots\ldots\ldots\ldots & n = \dfrac{9500 - 693\,q}{8807\,q} \\
\text{— omnibus-mixtes} \ldots\ldots & n = \dfrac{9500 - 693\,q}{8894\,q} \\
\text{— de marchandises} \ldots & n = \dfrac{9500 - 500\,q}{9000\,q} \cdot
\end{array}
\right.
$$

Si, dans ces équations (11), l'on substitue à la place de q ses valeurs-limites calculées précédemment (Tab. n° 7), les valeurs de n qui résulteront de cette substitution donneront les nombres maximum de voitures selon les trains et les pentes, qu'un frein peut arrêter, dans les circonstances les plus défavorables, sans que le train dépasse l'espace protecteur à réserver en arrière des points qui doivent être couverts par les signaux.

Le tableau suivant renferme les valeurs de n dont il s'agit pour chaque nature de train et pour divers profils de voie ferrée.

TABLEAU N° 8. — *Détermination des valeurs maxima de n, par nature de train et pour diverses pentes.*

NATURE DES TRAINS.	VITESSE des trains par heure.	PENTE maxima de la voie par kilom.	LIMITE de protection des signaux	VALEUR minima du rapport q	VALEUR maxima du nombre des véhicules par frein.
	kilomètres.	mètres.	mètres.		
Trains express	60	6	1000	0,154	7,66
		11	1200	0,201	5,76
Trains de voyageurs omnibus	50	6	1000	0,130	8,22
		11	1200	0,155	6,88
		20	1500	0,225	4,71
et	40	6	1000	0,084	12,60
omnibus-mixtes.		11	1200	0,121	8,75
		20	1500	0,201	5,23
		32		0,327	3,19
Trains de marchandises transportant ou non des voyageurs.	25	6	1000	0,049	21,49
		11	1200	0,094	11,17
		20	1500	0,161	6,50
		32		0,286	3,63

Une légère correction peut être apportée à quelques-uns des nombres de la dernière colonne, car, s'il ne faut pas faire entrer en ligne de compte, dans la détermination de *n*, l'action des freins appliqués à l'essieu moteur de la machine (1) et celle de la contre-vapeur, comme moyens réguliers d'obtenir l'arrêt des trains, il n'en est pas tout à fait de même de l'action du frein du tender, qui est fréquemment utilisée par le mécanicien, aussi bien pour les arrêts réguliers que pour les arrêts imprévus des trains. Sur les sections de chemin de fer à pente peu considérable, le frein du tender crée une résistance qui, non-seulement suffit à l'arrêt de la locomotive et de son tender à la distance réglementaire, mais fournit encore au train un supplément de résistance assez considérable pour que l'on puisse sans inconvénient en distraire une partie pour l'arrêt régulier de ce convoi.

Considérons, par exemple, le cas d'un train express marchant à raison de $16^{m}7$ par seconde (60 kilom. à l'heure), sur une ligne ferrée dont les rampes et les pentes ne dépassent pas $0^{m}006$ par mètre. D'après les résultats du tableau précédent, un pareil train devrait contenir :

1 frein par 7 voitures ou moins;
2 freins par 8 à 15 voitures;
3 freins par 16 à 23 voitures;
4 freins par 24 voitures (2);

tandis que si le maximum du nombre des véhicules par frein était élevé de 7,66 voitures à 8, il contiendrait :

1 frein par 8 voitures ou moins;
2 freins par 9 à 16 voitures;
3 freins par 17 à 24 voitures.

Or, il résulte de la pratique des chemins de fer du Midi que les machines à roues indépendantes qui remorquent les trains

(1) Cette disposition est aujourd'hui assez fréquemment employée.

(2) En France, un train de voyageurs ne peut être composé de plus de 24 voitures à quatre roues. (Art. 18 de l'Ordonnance royale du 15 novembre 1846.)

express ne peuvent conserver une marche régulière sur les lignes dont les pentes et les rampes ne dépassent pas 6 millimètres par mètre, qu'autant que ces trains ne contiennent pas plus de 14 voitures chargées; au-delà de ce nombre, on fait partir le train en double traction, ou bien on fait deux trains qui se succèdent à dix minutes d'intervalle. Dans l'un comme dans l'autre cas, les choses se passent évidemment, comme si les express n'étaient jamais composés de plus de 14 voitures.

Il est facile de voir que si la règle d'un frein par huit voitures était admise, tous les express, *sauf un, celui qu'on aurait formé de huit voitures*, satisferaient à la condition indiquée dans le tableau n° 8 (un frein par 7,66 voitures). Or, dans ce cas exceptionnel,

le poids de la locomotive du train express étant de	28000 kilog.
— de son tender, moyennement chargé......	10000 —
— du train, locomotive et tender déduits (équation 9)........................	60640 —
le poids total P du train serait................	98640 kilog.
Le poids des véhicules à frein, tender compris, étant de..................................	19500 —
tandis que le poids *glissant* nécessaire à l'arrêt du train à la distance réglementaire ([1]) ne serait que (voir tableau n° 7) de 98640 × 0,154 ou de........	15190 —
on pourrait encore disposer pour l'arrêt du train d'un poids de..........................	4310 kilog.

dont le glissement sur les rails engendrerait une résistance capable d'arrêter à la distance protectrice de 1000 mètres un poids

$$P' = \frac{4310}{0,154} \text{ kilog.} = 27987 \text{ kilog.}$$

ou 3,68 voitures à charge complète.

Il en résulte évidemment que l'on peut, sans aucun inconvénient, élever de 7,66 à 8 le maximum de voitures par frein, dans les trains express circulant sur une voie ferrée dont le profil ne présente pas d'inclinaisons supérieures à 0^m006 par

---

([1]) Le coefficient de glissement étant supposé égal à 0,10, comme précédemment.

mètre. Il est d'autant mieux permis de faire cette substitution que tous les calculs qui précèdent sont basés sur une situation exceptionnellement défavorable, et que, en général, sur le réseau du Midi, les locomotives des trains express sont elles-mêmes munies d'un frein capable d'enrayer les roues motrices, et, en cas de danger pressant, peuvent ainsi ajouter aux résistances engendrées par les freins du train et du tender celle qui résulte du frottement sur les rails d'un poids de 10 à 11 tonnes (charge que supporte l'essieu moteur).

En appliquant le même raisonnement aux autres nombres de la sixième colonne du tableau n° 8, on trouve qu'on peut forcer d'une unité la partie entière de quelques-uns. Cette correction conduit aux résultats suivants :

NATURE DES TRAINS.	VITESSES MOYENNES par heure.	INCLINAISONS par kilomètre.	RAPPORT *minimum* du nombre des freins d'un train au nombre total de ses véhicules.
	kil.	mètres.	
Trains express.	60	0 à 6	1 frein par 8 [1] véhic.
		7 à 11	1 — 6 —
Trains de voyageurs directs et omnibus.	50	0 à 6	1 frein par 8 [2] véhic.
		7 à 11	1 — 7 —
		12 à 20	1 — 5 —
Trains de voyageurs omnibus et omnib.-mixtes	40	0 à 6	1 frein par 12 véhic.
		7 à 11	1 — 9 —
		12 à 20	1 — 5 —
		21 à 32	1 — 3 [3] —
Trains de marchandises transportant ou non des voyageurs.	25	0 à 6	2 freins par 43 [4] véh.
		7 à 11	1 — 11 —
		12 à 20	2 — 13 —
		21 à 32	2 — 7 [5] —

Observations.

(1) Ce nombre de 8 véhicules est celui qui est en usage sur les chemins de fer du Midi depuis 1856. — A cette époque, il n'existait pas encore, sur ces lignes, de pentes supérieures à 0m006 par mètre.

(2) Même observation que ci-dessus.

(3) Sur le réseau du Midi, ce rapport, qui ne trouve son application qu'à la rampe de Capvern, est celui que la pratique de la Compagnie a consacré. « Dans les trains de voyageurs, le nombre de freins gardés est, *au moins*, égal *au tiers* des véhicules attelés. » (*Ordre du jour* du Mouvement, qui règle la composition des trains sur la rampe de Capvern.)

(4) Le rapport en usage sur le réseau du Midi est de $\frac{1}{20}$; mais on pourrait le réduire sans inconvénient à $\frac{1}{21,5}$.

(5) Ce rapport n'a son application qu'à la rampe de Capvern; dans la pratique, on a tenu compte de l'action de la contre-vapeur, et « le nombre des freins gardés est, *au moins*, égal *au quart* du nombre des véhicules attelés. » (*Ordre du jour* précité.)

L'exemple que j'ai discuté ne s'applique pas à toutes les voies ferrées. Sur les unes, la limite de protection des signaux est constante et égale à 800 mètres (réseau d'Orléans); sur d'autres, elle est de 800 mètres sur les pentes faibles ou d'inclinaison moyenne, mais est portée à 1000 mètres à la descente des fortes rampes et dans les courbes (réseau de l'Est); sur

d'autres, enfin, elle varie, selon les pentes, de 1000 à 1500 mètres (réseau du Midi). Mais quelle que soit la valeur donnée à l'espace protégé par les signaux, qu'elle soit constante ou variable, le mode de détermination du nombre minimum de freins à introduire dans les trains reste toujours le même. Il y a toutefois lieu d'observer que les coefficients qui figurent dans mes formules peuvent varier d'un réseau à l'autre, selon la nature des freins qu'on emploie et l'organisation du service d'une part, le climat et la latitude de l'autre; mais ces variations ne peuvent avoir qu'une faible importance, et sont, d'ailleurs, faciles à fixer par quelques expériences préalables.

Des trois méthodes suivies pour la protection des points à couvrir, la moins bonne, dans les conditions actuelles du matériel moteur des chemins de fer, est, *au point de vue de la sécurité,* celle qu'on applique sur le réseau du Midi. Elle est, il est vrai, plus économique, puisqu'elle exige l'emploi d'un plus petit nombre de freins dans les trains, et par conséquent d'un moindre nombre d'agents; elle sauvegarde aussi la sécurité d'une manière certaine, lorsqu'on a le temps de porter le signal de protection à la distance réglementaire (1); mais elle peut devenir insuffisante dans les cas de danger pressant, où il importe d'arrêter le train à la moindre distance possible du point où apparaît le signal d'alarme. Souvent, en effet, des obstacles surgissent à l'improviste en avant des trains, à des distances bien inférieures à celle en prévision de laquelle le nombre des freins a été déterminé. Le mécanicien a recours alors aux moyens extrêmes : il fait serrer les freins du train, enraie les roues du tender et celles de l'essieu moteur de la machine, si celle-ci est pourvue d'un frein; et si, malgré les résistances énergiques qu'il introduit ainsi dans la marche, il ne parvient pas à maîtriser suffisamment la vitesse, il bat contre-vapeur. Souvent même, lorsque le train est pesamment chargé et sa vitesse considérable, il n'hésite pas à user immédiatement de ce dernier moyen. Mais il est évident que, en tout

(1) Celle-ci variant de 1000 à 1500 mètres, il faut dix à quinze minutes pour couvrir un train, tandis qu'il n'en faut que huit pour parcourir 800 mètres. Or, les trains peuvent se suivre à dix minutes d'intervalle.

état de cause, un train évite d'autant plus sûrement une collision qu'il renferme un plus grand nombre de freins.

Il importe, d'ailleurs, quand la locomotive n'est pas munie de l'appareil *ad hoc* qui en annule les fâcheux effets, de n'user de la contre-vapeur qu'avec la plus grande réserve, et seulement en cas de nécessité absolue, son action donnant lieu généralement à une élévation dangereuse de la pression dans la chaudière, à un échauffement considérable des cylindres et des tiroirs, et, par suite, au grippement des surfaces frottantes. Lorsque, au contraire, comme sur certaines lignes du réseau du Midi, la machine est disposée de façon à pouvoir l'utiliser sans inconvénient, la contre-vapeur peut s'employer avec très grand avantage, tantôt comme moyen normal de ralentissement, tantôt comme frein de détresse. On comprend facilement l'importance que cet emploi de la vapeur comme frein peut avoir pour l'avenir des chemins de fer à forte pente. Je suivrai avec attention l'application qui s'en fait en ce moment d'une manière sérieuse et très intelligente sur nos chemins de fer méridionaux, et j'en ferai plus tard, s'il y a lieu, l'objet d'une note qui complétera le présent travail.

DE LA NOTATION ATOMIQUE

ET DE SA

COMPARAISON AVEC LA NOTATION EN ÉQUIVALENTS

PAR LE D[r] L. MICÉ.

ABRÉVIATIONS.

B., Bulletin de la Société chimique de Paris.
Mon. sc., Moniteur scientifique du D[r] Quesneville.
R. 68, mon Rapport méthodique sur les Progrès de la Chimie organique pure en 1868.
69, année 1869.
p., page.
ex., exemple.
ac., acide.
Ω, poids atomique d'un Oxoïde quelconque.
$X\lambda$, poids atomique d'un Chloroïde quelconque.
R', radical monatomique quelconque, positif ou négatif.

Nous nous proposons, dans cet article, d'examiner ce qu'est la notation atomique et quels sont les avantages qu'elle présente, au point de vue de l'enseignement, sur la notation en équivalents.

Ne nous adressant qu'à des lecteurs au courant de la science, nous n'examinerons point par quelle suite de travaux on en est venu à reprendre une écriture chimique qui avait existé autrefois et qu'on avait délaissée pour la remplacer par une autre que l'on croyait plus conforme au résultat direct de l'expérience.

Nous diviserons notre article en quatre chapitres, traitant

De la notation atomique;

Des principales théories qui ne peuvent être exposées qu'avec cette notation;

Des avantages qu'elle présente;

Des objections qu'on lui a adressées ou qu'on pourrait lui adresser.

Nous conclurons ensuite.

CHAPITRE I.

DE LA NOTATION ATOMIQUE.

§ I. — On sait quelle est l'opinion désignée sous le nom de *théorie moléculaire :* c'est celle qui consiste à admettre que *tous les gaz contiennent, sous le même volume, le même nombre de molécules;* et on sait que cette manière de voir repose sur un trépied constitué par (*a*) la loi de Mariotte, (*b*) l'unité du coefficient de dilatation des gaz, (*c*) la loi chimique de Gay-Lussac ou loi des volumes.

Les densités des gaz expriment donc les rapports de leurs *poids moléculaires.* — Voici ces densités pour quelques gaz ou vapeurs de première importance :

Hydrogène......	0,06926	Oxygène........	1,10563
Ammoniaque.....	0,596	Ac. chlorhydrique..	1,247
Vapeur d'eau.....	0,6235	Chlore.........	2,470
Azote..........	0,97137		

On appelle *atome,* en chimie, la plus petite quantité d'un corps simple qui puisse entrer en combinaison.

La molécule d'hydrogène contient deux atomes. Il y a, en effet,

dans le poids 0,6235 d'une molécule d'eau, $\frac{1}{9}$ de ce poids ou

0,0693 d'hydrogène, ce qui correspond à une molécule;

dans le poids 1,247 d'une molécule d'acide chlorhydrique,

$\frac{1}{36,5}$ ou $\frac{10}{365}$ de ce poids $=$ 0,03416 d'hydrogène, ce qui correspond à une demi-molécule;

dans le poids 0,596 d'une molécule d'ammoniaque, $\frac{3}{17}$ de ce

poids ou 0,10518 d'hydrogène, ce qui correspond à trois demi-molécules;

et, par ces exemples qui suffisent (car d'autres ne feraient que

les confirmer), nous voyons que l'atome d'hydrogène est la moitié de sa molécule.

Le poids atomique de l'hydrogène est pris pour unité dans l'expression numérique de tous les poids moléculaires. Le poids moléculaire de l'hydrogène devient alors 2 au lieu d'être 0,06926, c'est à dire qu'il est multiplié par $\frac{2}{0,06926} = 28,88$. Il faut donc multiplier par 28,88 les densités de gaz ou de vapeur de tous les corps simples ou composés connus pour avoir leurs poids moléculaires en fonction de l'unité actuellement adoptée. Les sept nombres du petit tableau ci-dessus deviennent alors :

Hydrogène......	2,0000,	en nombre rond	2;
Ammoniaque.....	17,2125,	en nombre rond	17;
Vapeur d'eau.....	18,0067,	en nombre rond	18;
Azote..........	28,0532,	en nombre rond	28;
Oxygène........	31,9306,	en nombre rond	32;
Ac. chlorhydrique.	36,0134,	en nombre corrigé	36,5;
Chlore.........	71,3336,	en nombre rond	71.

Nous ajouterons à cette liste, et en nombres ronds, les poids moléculaires des gazolytes dont on connaît la densité de vapeur :

Brôme..............................	160;
Iode..............................	252;
Soufre (densité de vapeur déterminée vers 1000°).	64;
Phosphore 127,6496; corrigé...............	124;
Arsenic 306,128; corrigé..................	300.

§ II. — On passe du poids moléculaire d'un élément chimique à son *poids atomique* en déterminant le rapport (toujours simple) qui existe entre l'un et l'autre; — et on détermine ce rapport en opérant comme nous avons déjà fait pour l'hydrogène, c'est à dire en cherchant les quantités de l'élément qui existent dans les poids moléculaires de ses principaux composés

et voyant quelle est la plus grande fraction de molécule dont ces quantités sont multiples ([1]). Prenons comme exemples le soufre et le phosphore ordinaire.

1° Il y a

dans le poids moléculaire 64 de l'anhydride sulfureux, 32 de soufre ou 1 demi-molécule;

dans le poids moléculaire 80 de l'anhydride sulfurique, 32 de soufre ou 1 demi-molécule;

dans le poids moléculaire 34 de l'hydrogène sulfuré, 32 de soufre ou 1 demi-molécule;

bref, la demi-molécule du soufre normal en est l'atome; le poids atomique du soufre est 32.

2° Il y a

dans le poids moléculaire 137,5 du protochlorure de phosphore, 31 de phosphore ou 1 quart de molécule;

dans le poids moléculaire 153,5 de l'oxychlorure de phosphore, 31 de phosphore ou 1 quart de molécule;

dans le poids moléculaire 34 de l'hydrogène phosphoré, 31 de phosphore ou 1 quart de molécule;

bref, le quart de molécule du phosphore en est l'atome; le poids atomique du phosphore est 31.

Voici les *poids atomiques trouvés,* par des raisonnements analogues, *pour les gazolytes dont on connaît la densité de gaz ou de vapeur :*

Nous avons déjà vu	Hydrogène	1
	Soufre	32
	Phosphore ordinaire	31;
Ajoutons	Chlore	35,5
	Brôme	80
	Iode	126
	Oxygène	16
	Azote	14
	Arsenic	75.

([1]) A. Naquet, *Principes de Chimie,* 2e édition, I. 27.

§ III. — Si nous prenons à l'état amorphe les poids atomiques des cinq corps solides ou solidifiables de ce tableau (Soufre récemment fondu, Phosphore, Brôme solidifié, Iode, Arsenic), nous trouvons qu'ils satisfont à la *loi de Dulong et Petit,* fournissant un *coefficient moyen* qui varie entre 5,87 et 6,82 et qui est 6,41.

Les poids atomiques du phosphore, du brôme, de l'iode, de l'arsenic, ont la même valeur que leurs équivalents; mais cette identité n'existe pas pour le soufre, et on voudra bien noter que *ce sont les poids atomiques des corps simples, et non leurs équivalents, qui ont la même chaleur spécifique.*

Cette loi est vraie aussi pour les corps simples gazeux, sauf la valeur du coefficient moyen qui est autre : Si on multiplie la chaleur spécifique (à pression constante, et rapportée à l'eau) de l'hydrogène, du chlore, de la vapeur de brôme, de l'oxygène et de l'azote, par les poids atomiques respectifs de ces corps, on a un produit qui oscille entre 3,41 et 4,41 et qui est, en moyenne, de 3,8. Or les poids atomiques de l'hydrogène, du chlore, du brôme et de l'azote, se confondent avec les équivalents correspondants; mais cette confusion n'existe pas pour l'oxygène, et on voit que c'est le poids atomique, et non l'équivalent, qui est en relation immédiate avec la chaleur spécifique.

Les données thermiques nous fournissent donc un moyen simple de déterminer les poids atomiques des éléments, en prenant pour dividende 6,41 si l'élément est solide, 3,8 s'il est gazeux.

— Le carbone, essentiellement allotropique, a diverses chaleurs spécifiques faisant hésiter pour le choix, de sorte qu'on ne peut pas avoir sûrement par elles le poids atomique de cet élément. Mais on l'obtient par les données chimiques : l'anhydride carbonique est deux fois plus oxygéné que le carbonyle, et celui-ci, premier oxyde du carbone, doit être formé, d'après notre définition de l'atome chimique, d'un atome d'oxygène et d'un atome de carbone; or le poids de ce dernier élément qui s'unit à 16 d'oxygène est 12; c'est donc là le poids atomique du carbone. — Ce que l'on ne connaît pas, par ex.,

pour cet élément, faute d'avoir sa densité de vapeur, c'est le poids de sa molécule.

— Par l'emploi des 2 procédés ci-dessus indiqués, on a dressé la table suivante des *poids atomiques des corps simples,* en faisant intervenir, au besoin, pour le choix des formules, des considérations de parenté entre ces corps :

Al — 27,5.	Co — 59.	Ni — 58,5.	Sr — 87,5.
Sb — 121.	Cu — 63,5.	Au — 197.	Ta — 37,6
Ag — 108.	Di — 96.	Os — 200.	Te — 128.
As — 75.	Sn — 117.	O — 16.	Tl — 204.
A — 14.	Fe — 56.	Pd — 106.	Th — 119.
Ba — 137.	Fl — 19.	P — 31.	Ti — 50.
Bi — 210.	Gl — 14.	Pt — 198.	W — 184.
B — 11.	H — 1.	Pb — 207.	U — 120.
Br — 80.	I — 127.	K — 39.	V — 51,3.
Cd — 112.	Ir — 197.	Rh — 104.	Zn — 65.
Ca — 40.	La — 92.	Rb — 85,36.	Zr { 67, si zircone est Zr_2O_3; 89, 5, si elle est ZrO_2.
C — 12.	Li — 7.	Ru — 104.	
Ce — 92.	Ma — 24.	Se — 79.	
Cs — 133.	Mn — 55.	Si — 28.	
Cl — 35,5.	Hg — 200.	Na — 23.	
Cr — 52,4.	Mo — 94.	S — 32.	

— *Les* formules représentatives des éléments des molécules composées ou *formules atomiques, quand elles sont exprimées par les nombres entiers les plus simples possibles, représentent, en général, 2 volumes.* On sait, en effet, qu'en dehors du carbone, si l'on exprime les volumes des composants par les plus petits nombres entiers, le produit formé occupe toujours 2 volumes, de sorte que

1 et 1 font 2,

1 et 2 font 2,

1 et 3 font 2. — Et, d'autre part, 1 volume de grisou contenant 2 volumes d'hydrogène, il est facile de voir que la formule CH_4 correspond à 2 volumes, de sorte qu'on a aussi 1 et 4 font 2.

Aussi adopte-t-on, dans toute la chimie, les formules atomiques correspondant à 2 volumes.

CHAPITRE II.

DES PRINCIPALES THÉORIES QUI NE PEUVENT ÊTRE EXPOSÉES QU'AVEC LA NOTATION ATOMIQUE.

§ I. — La notation atomique n'a pas tardé à conduire à la notion de l'*Atomicité,* notion que faisait pressentir le travail de Graham sur les acides phosphoriques et celui de M. Berthelot sur les dérivés acides de la glycérine, notiôn que nous appellerions un fait et non une théorie pour les corps simples, si cette atomicité était absolument constante pour eux et si la notation qui la met en lumière ne reposait elle-même sur l'adoption d'une théorie.

L'Atomicité d'un atome est la *capacité de fixation* (autour de lui) ou la *puissance de combinaison* (au point de vue du nombre des relations qu'il va contracter) de cet atome. L'unité de valence servant à exprimer l'atomicité est l'atome d'H, le plus léger de tous. On appelle *monatomiques, univalents* ou *monaffines* les corps dont l'atome ne se combine qu'avec un H; *di-, tri-, tétr-, pent-, hexatomiques, di-, tri-, tétra-, penta-, hexavalents, di-, tri-, tétr-, pent-, hexaffines*, les corps dont l'atome fixe 2, 3, 4, 5, 6 atomes d'H. Ainsi, le plus souvent,
les Chloroïdes sont monaffines,
les Oxoïdes diatomiques,
les Azotoïdes tri- ou pentavalents,
les Anthracoïdes (C et Si) di- et plus souvent tétratomiques, comme le prouvent les formules ClH, OH_2, AH_3, CH_4 des uniques composés hydrogénés formés par un atome des corps-types de ces groupes.

Xλ pondérant H aussi bien que H pondère Xλ dans la formule XλH, il est évident qu'à défaut de composés hydrogénés, on pourrait prendre les composés chloroïdés d'un élément pour en déterminer l'atomicité. On constate par ce moyen la monatomicité des Natroïdes (K, Na, Li, Ag). — On ne pourrait pas

prendre dans le même but les composés oxygénés, azotés, parce que les éléments ajoutés à celui qu'on étudie, quand ils sont polyatomiques et qu'il y en a 2 ou plusieurs de fixés, peuvent échanger directement entre eux des affinités. Ex. :

S
sulfuryle / \ . — En d'autres termes, si nous distinguons
O — O

l'*atomicité de substitution* de l'*atomicité de pondération* (et ces deux termes nous paraissent se définir d'eux-mêmes), nous les voyons se confondre l'une avec l'autre chez les éléments univalents, alors qu'elles peuvent différer l'une de l'autre (par le mécanisme expliqué) chez les éléments à affinités multiples.

On sait qu'en chimie les corps réagissent par substitution, par dédoublement ou par addition. — Les composés dans lesquels les atomicités de tous les éléments sont satisfaites sont dits *complets* ou *saturés* et ne réagissent que par substitution ou dédoublement; les composés dans lesquels il reste des atomicités à satisfaire sont dits *incomplets* et réagissent, au contraire, surtout par addition.

Les atomicités d'un même élément diffèrent toujours de 2 ou d'un multiple de 2, de sorte que ces atomicités sont toujours soit paires, soit impaires. Ainsi nous avons dit que les Chloroïdes sont monaffines; il en est pourtant un, l'iode, qui, parfois (dans $I\,Cl_3$ par ex.), possède une atomicité plus grande; mais on voit que cette atomicité reste impaire. Nous avons vu de même que les Azotoïdes sont tri- ou pentavalents (atomicités impaires), que C et Si sont di- ou tétravalents (atomicités paires). Ajoutons que l'omnium est di- ($Os\,Cl_2$), tétra- ($Os\,Cl_4$) ou hexavalent ($Os\,Cl_6$) : trois atomicités différentes, mais toujours paires.

L'illustre professeur de Berlin, M. Hofmann, dans une leçon faite à Londres en 1866, a représenté les atomes des corps simples par des boules munies de bras creux (tubes) ou pleins (bâtons cylindriques); il avait sur la table, pour figurer le même atome simple, des boules à tubes et des boules à bras pleins, afin de pouvoir bâtir les corps composés par l'introduc-

tion du bras (ou d'un des bras) plein d'un atome dans le tube (ou dans un des tubes) d'un autre atome. Les corps univalents n'avaient qu'un de ces bras; les divalents en avaient deux, les trivalents trois, les tétravalents quatre. Les corps de même valence étaient distingués par une coloration différente des boules. H était blanc, Cl vert, le brûlant O rouge, C noir, A (élément du bleu de Prusse et des couleurs d'aniline) bleu. Avec ces moyens matériels, le savant chimiste a construit devant les auditeurs de sa conférence l'édifice moléculaire de quelques composés minéraux et d'un grand nombre de composés organiques.

On appelle *formules développées* celles dans lesquelles chaque atome est marqué à part et mis en relation avec les autres à l'aide des données fournies par les notions d'atomicité et par le caractère complet ou incomplet du composé (caractère démontré par ses réactions chimiques). Les figures de M. Hofmann représentaient des formules qu'on peut appeler *développées dans l'espace,* car si, ne s'occupant que d'atomes dont l'atomicité ne dépasse pas quatre, il a pu ne bâtir que dans un plan, il eût été conduit à bâtir dans tous les sens pour représenter, par ex., $Os\,Cl_6$. Pour faire des formules *développées sur le papier,* on indique par un trait le double-bras de M. Hofmann, de sorte que ce trait relie deux atomes échangeant entre eux une affinité. — Ces formules, n'ayant nullement la prétention de représenter des états d'équilibre stables, n'ayant d'autre but que d'indiquer les rapports des atomes entre eux, peuvent être développées sur papier, même alors qu'une atomicité dépasse quatre : ainsi $Os\,Cl_6$ peut être figuré

```
 Cl   Cl
   \ /
Cl—Os—Cl.
   / \
 Cl   Cl
```

Il est quelquefois utile d'indiquer dans une formule écrite l'atomicité d'un ou de plusieurs atomes. On le fait par un

prime (′) pour les atomes univalents, par deux (″) pour les divalents, par trois (‴) pour les trivalents, et ensuite par des chiffres romains ($^{IV, V, VI}$). On ne connaît pas d'atomicité qui dépasse six. Ces signes sont placés au-dessus du corps auquel ils se rapportent si les *exposants* sont notés én haut, – en haut et à droite (à la place des exposants) si ceux-ci sont notés en bas, comme des indices.

Nous avons dit plus haut que, la statique moléculaire étant étrangère aux notions d'atomicité, les bras d'un atome polyvalent pouvaient avoir n'importe quelle direction. Deux atomes polyvalents peuvent échanger entre eux deux ou plusieurs affinités, et ce fait s'exprime par des bras parallèles : ainsi le carbonyle est $C = O$, l'anhydride carbonique $O = C = O$, l'azote libre $A \equiv A$, le cyanogène $\begin{matrix} C \equiv A \\ | \\ C \equiv A \end{matrix}$.

Quand les composés à représenter ont une molécule peu compliquée et sont formés d'éléments dont l'atomicité est bien connue (tels que les quatre principaux de la chimie organique), on n'indique pas les relations des atomes dans la formule. Mais, s'il s'agit d'un composé condensé et pouvant se prêter à plusieurs combinaisons d'atomicités, il est alors indispensable de développer celle que l'on a en vue, et on arrive ainsi souvent à représenter de façons différentes les corps métamères, même alors que ceux-ci appartiennent au même type. — En chimie organique, on emploie, le plus souvent, pour ces corps condensés, des formules-développées un peu abrégées, dans lesquelles les éléments de forte atomicité qu'on considère comme formant chaîne sont reliés par des traits (doubles-bras), tandis que les éléments, généralement moins valents qu'on considère comme satellites, sont simplement placés à côté des atomes auxquels ils sont rivés.

On sait que les radicaux, comme les corps simples, peuvent être uni ou polyvalents; c'est ainsi qu'il y a monaffinité chez les radicaux alcooliques, diaffinité chez les radicaux de glycols, triaffinité chez le glycéryle $C_3 H_5$, etc. Quand on veut indiquer

la valence de ces corps composés, on les met entre parenthèses et on emploie les mêmes signes de mono- ou polyatomicité que nous avons indiqués plus haut.

Les éléments ou radicaux polyatomiques opèrent généralement des soudures moléculaires, ce que l'on représente, en notation typique, par des molécules voisines dont deux, trois, quatre satellites monatomiques juxtaposés, pris chacun dans une de ces molécules, sont remplacés par le corps polyvalent, corps auquel aboutit une des deux extrémités de chaque accolade. C'est ainsi que l'amidure de mercure est noté $\begin{matrix} A \\ \\ A \end{matrix}\left\{\begin{matrix} H_2 \\ Hg'' \\ H_2 \end{matrix}\right.$, que la chlorhydrine du glycol est figurée $\begin{matrix} O \\ \\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix} H \\ (C_2\,H_4)'' \\ Cl \end{matrix}\right.$. — Mais les radicaux polyatomiques peuvent cependant exister dans une molécule simple, lui donnant toutefois alors une grande tendance à se doubler, — comme le prouve notamment la facilité avec laquelle les carbimides (dont la plus simple est l'acide cyanique $A\left\{\begin{matrix} (CO)'' \\ H \end{matrix}\right.$) deviennent carbamides (dont la plus simple est l'urée $\begin{matrix} A \\ \\ A \end{matrix}\left\{\begin{matrix} H_2 \\ (CO)'' \\ H_2 \end{matrix}\right.$) sous l'influence des amines (dont la plus simple est l'ammoniaque $A\left\{\begin{matrix} H \\ H \\ H \end{matrix}\right.$.

Tels sont les points les plus importants de la notion de l'atomicité, et tels sont aussi les petits surcroîts que la notation de cette atomicité apporte à la notation atomique brute.

§ II. — La deuxième des théories qui ne peuvent être exposées qu'à l'aide de la notation atomique (combinée avec la notation de l'atomicité), est la *Théorie de la Série grasse* de M. Kékulé, théorie qu'édifiait en même temps que lui M. Couper. — Le gaz des marais ou méthane, le plus simple des carbures $C_n\,H_{2n+2}$ ou carbures en *ane*, est un composé saturé,

CH_4, c'est à dire un composé qui est, par ex., incapable de chloruration, mais très susceptible de chloration ou chloro-substitution. Le chlorométhane $\overline{CH_3 Cl}$ n'est autre chose que l'éther chlorhydrique du méthol : aussi fournit-il ce méthol par saponification à l'aide de l'hydrate de potasse KOH ou oxhydrylure de potassium $\overline{K(OH)'}$. Le méthol est donc de l'oxhydrylo-méthane $\overline{CH_3 (OH)'}$, ce qu'on représente de préférence par CH_3. OH, en mettant un point entre le radical-méthyle et le radical-oxhydryle. On voit par là que l'oxhydrylation a eu pour résultat d'introduire dans la molécule primitive un O, corps électro-négatif qui est venu s'interposer entre un des H et le carbone-noyau, donnant par contraste à cet H, détaché ainsi des autres comme en sentinelle perdue, un certain cachet électro-positif qui le rend substituable par des métaux ainsi qu'il advient dans le méthol sodé CH_3. ONa. Cet H est dit *typique.*

Par oxydation du méthol on oxygéno-substitue le méthyle qui devient formyle et on a l'ac. formique CHO''. OH; ici, pour accentuer positivement l'H détaché, nous avons non seulement l'O de l'oxhydryle, mais encore celui qui s'est substitué à deux H voisins. Aussi l'H est-il plus facilement et d'une manière plus durable, substituable par un métal, et cette substitution donne-t-elle un véritable sel. Cet H, primitivement typique (état dans lequel il est encore un peu mieux substituable par un corps électro-négatif que par un corps électro-positif, comme le prouve la facile formation des éthers salins), cet H est devenu *basique,* c'est à dire à peu près exclusivement substituable par un métal. Pour constituer un acide, il faut donc que le C ait pour satellites un O et un OH, c'est à dire qu'il forme un groupe carbonyle $(CO)''$ mi-saturé par l'oxhydryle $(OH)'$, un groupe carbonyle-oxhydryle ou (par contraction) *carboxyle* $(CO.OH)'$.

L'acide formique est de l'hydrure de carboxyle $\begin{matrix} H \\ | \\ CO.OH \end{matrix}$.

Si l'H primitif auquel on n'a pas encore touché est, à son tour, remplacé par de l'oxhydryle, on devra avoir deux H

basiques au lieu d'un, car l'O du carbonyle agira par contraste sur les deux OH voisins : c'est, en effet, ce qui arrive, car on a ainsi le véritable acide carbonique $CO \left\{ \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix} \right.$, que l'on ne connaît pas, mais dont on connaît les dérivés métalliques $CO_3 \overline{HNa}$, $CO_3 Na_2$.

Si, au lieu d'oxhydryler le méthane, on parvient à le monoxygéno-substituer, on double à l'instant même la condensation par suite de la diatomicité de l'atome d'O substitué; cette monoxygéno-substitution se fait, par exemple, par la formation d'une molécule d'eau aux dépens de 2 méthanes oxhydrylés :

$$\underbrace{\begin{matrix} CH_3.OH \\ CH_3.OH \end{matrix}}_{\text{2 méthols encore indépendants.}} = \underbrace{\begin{matrix} OH \\ | \\ H \end{matrix}}_{\text{Eau.}} + \underbrace{\left. \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \right\} O'' \text{ ou } \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ O \\ | \\ CH_3 \end{matrix}}_{\text{Éther méthylique.}} .$$

— Si on traite l'iodométhane par le zinc, ce métal, qui est diatomique, prend l'iode de 2 molécules de l'éther, et les 2 restes se soudent pour se compléter l'un l'autre : on a ainsi le méthyle libre ou éthane $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$.

Celui-ci, chloroïdé, donne l'éther salin à hydracide correspondant; déchloroïdé ensuite par saponification, il fournit l'oxhydryléthane ou (par contraction) oxéthane, qui est l'alcool ordinaire. L'éther chloroïdhydrique est $\begin{matrix} CH_2 X\lambda \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_2 X\lambda \end{matrix}$, et l'alcool $\left\{ \begin{matrix} CH_2.OH \\ | \\ CH_3 \end{matrix} \right.$ ou $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_2.OH \end{matrix}$.

L'alcool, soumis à l'action de l'air et de la *mère de vinaigre,* se change en ac. acétique $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO.OH \end{matrix}$, qui est du méthylure de carboxyle.

La déshydratation de l'alcool fournit l'éthylène $\begin{matrix}CH_2\\ \Vert\\ CH_2\end{matrix}$, corps qui rompt sa double chaîne sous l'influence d'un chloroïde, donnant un dichloroïdure $\begin{matrix}CH_2\,X\lambda\\ \vert\\ CH_2\,X\lambda\end{matrix}$. Celui-ci, en 2 temps, devient dioxhydrylure d'éthylène ou glycol $\begin{matrix}CH_2.OH\\ \vert\\ CH_2.OH\end{matrix}$.

A ce glycol correspondent 2 acides : l'un, l'acide glycolique $\begin{matrix}CH_2.OH\\ \vert\\ CO.OH\end{matrix}$, résultant d'une monoxygéno-substitution, qui est diatomique (il a 2 H typiques), monobasique (il n'a qu'un H basique); l'autre, l'acide oxalique $\begin{matrix}CO.OH\\ \vert\\ CO.OH\end{matrix}$, résultant d'une dioxygéno-substitution, qui est diatomique bibasique. Les radicaux de ces 2 acides sont les parties qui sont à gauche des points dans les formules développées ci-dessus, savoir : le *glycolyle* $\begin{matrix}CH_2\\ \vert\\ CO\end{matrix}$, principe (ὕλη) de l'ac. glycolique $(C_2\,O_2\,O)''\begin{cases}OH\\ OH\end{cases}$, et l'*oxalyle* $\begin{matrix}CO\\ \vert\\ CO\end{matrix}$, principe de l'ac. oxalique $(C_2\,O_2)''\begin{cases}OH\\ OH\end{cases}$.

— Plusieurs alcools étant congénères, le propylol est un des produits de la distillation des vinasses. On peut, en chauffant ce propylol avec de l'eau IH en tubes scellés, obtenir avec lui le propylane $\begin{matrix}CH_3\\ \vert\\ CH_2\\ \vert\\ CH_3\end{matrix}$. Mais ici, à la condensation C_3, nous aurons deux alcools monatomiques, car l'oxhydryle alcoolique peut être satellite de l'un des deux C terminaux ou du C médian de la chaîne. Ils sont, en effet, connus : l'un est l'orthopropylol $\begin{matrix}CH_3\\ \vert\\ CH_2\\ \vert\\ CH_2.OH\end{matrix}$, qui donne de l'aldéhyde propionique ou propylal

$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ C\,OH \end{array}$, puis de l'ac. propionique $\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO.OH \end{array}$, par oxydation; l'autre est l'isopropylol $\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH_3 \end{array}$, qui donne de l'acétone, et pas d'acide de la condensation, par oxydation. Il ne donne pas d'acide de la condensation, car, avec la place qu'occupe l'oxhydryle chez lui, place qui ne permet pas l'oxygéno-substitution dans le voisinage, il ne peut pas arriver à constituer un groupe carboxyle. Il donne de l'acétone, et cette réaction est l'opposé de celle qui lui a donné naissance, car M. Friedel l'a préparé par hydrogénation de l'acétone, — l'hydrogénation du propylal fournissant, au contraire, de l'orthopropylol.

Les relations de l'isalcool avec l'acétone portent à faire considérer celle-ci comme $\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array}$. Or, cette constitution, qui différencie en outre l'acétone du propylal $\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO.H \end{array}$, est justifiée par la genèse de cet *isopropylal :*

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO.O \\ CO.O \\ | \\ CH_3 \end{array}\Big\}\, Ca''}_{\text{Acétate de chaux.}} = \underbrace{(CO)''\Big\{\begin{array}{l} O \\ O \end{array}\Big\rangle Ca}_{CO_3\,Ca.} + \underbrace{\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array}}_{\text{Acétone.}}.$$

La condensation C_3 offre théoriquement 2 glycols, dont un seul est connu; mais on possède plusieurs dérivés de l'autre. Laissons ce détail de côté.

Mais cette condensation est la première qui nous offre une glycérine; les 2 autres ne le pouvaient guère, n'ayant pas trois C

à satelliter d'oxhydryles, et 2 OH ne se fixant que bien rarement ([1]) sur le même C. A la glycérine

$$\begin{array}{c} CH_2.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH_2.OH \end{array}$$

correspond, par oxydation azotique, l'acide glycérique

$$\begin{array}{c} CO.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH_2.OH \end{array}$$

, et on voit pourquoi celui-ci est triatomique monobasique. Il est probable que, poussée plus loin, l'oxydation de la glycérine engendrerait de l'acide tartronique

$$\begin{array}{c} CO.OH \\ | \\ CH.OH. \\ | \\ CO.OH \end{array}$$

— Le carbure saturé de la condensation C_4 peut avoir deux constitutions différentes :

Chaîne unique,	Chaîne et chaînon,
$\begin{array}{c} CH_3 \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_2 \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$;	$\begin{array}{l} CH_3 \\ \mid \\ HC—CH_3. \\ \mid \\ CH_3 \end{array}$

D'où 3 isomères possibles chez les alcools monatomiques, par le fait de

(a) oxhydrylation dans un groupe méthyle,
(b) oxhydrylation dans un groupe méthylène,
(c) oxhydrylation par substitution à l'H satellite du C tririvé de la seconde constitution.

L'oxhydrylation d'un méthyle produit un orthalcool, celle d'un méthylène un isalcool; celle du C tririvé produit un *carbinol*.

([1]) Ma mémoire ne me rappelle guère que l'acide glyoxylique $\begin{array}{l} CH \left\} \begin{array}{l} OH \\ OH \end{array} \right. \\ \mid \\ CO.OH \end{array}$ en fait de corps dans la molécule desquels la chose ait lieu.

Le carbinol butylique a donc pour formule $HO\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{C}}—CH_3$; et on remarquera combien sa genèse

$$\underbrace{\begin{matrix}CH_3\\ |\\ CO.\ Cl\end{matrix}}_{\text{Chlorure d'acétyle.}} + \underbrace{\begin{matrix}CH_3\\ CH_3\end{matrix}\Big\}Zn''}_{\text{Zinc-méthyle.}} = \underbrace{ZnO}_{\text{Oxyde de zinc.}} + \underbrace{Cl\,\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{C}}—CH_3}_{\text{Chlorure carbinolique.}}$$

et

$$\underbrace{Cl\,\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{C}}—CH_3}_{\text{Éther chlorhydrique du carbinol.}} + \underbrace{\begin{matrix}H\\ |\\ HO\end{matrix}}_{\text{Eau pour saponification.}} = \underbrace{HO\,\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{C}}—CH_3}_{\text{Carbinol.}} + \underbrace{\begin{matrix}H\\ |\\ Cl\end{matrix}}_{\text{Acide chlorhydrique.}}$$

est d'accord avec cette constitution.

Les trois séries d'alcools observées et observables pour la première fois ici, se maintiendront dans les condensations suivantes.

— Nous ne donnons là qu'un bien faible aperçu de ce qu'il est possible d'expliquer, dans la Série grasse, avec la théorie des chaînes de carbone, théorie qui éclaire d'une bien vive lueur toutes les questions de la Chimie organique et qui est applicable sans modifications à cette Chimie organique nouvelle qu'ont commencé à édifier MM. Friedel, Crafts, Ladenburg : la *Chimie organique du silicium*.

§ III. — La 3e des théories qui ne peuvent être exposées qu'avec les idées d'atome et d'atomicité est la *Théorie des Séries aromatiques*.

— M. Kékulé donne à la benzine, pivot de l'orthosérie aro-

matique, la formule développée suivante

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ & C & \\ HC & & CH \\ \| & & | \\ HC & & CH \\ & C & \\ & H & \end{array}$$

, qui est d'accord avec sa nature (démontrée par M. Berthelot) de triacétylène. — Chaque C est uni à ses voisins par une atomicité d'un côté, par deux de l'autre, de telle sorte que, ne disposant plus que d'une unité d'affinité, il se contente d'un seul H satellite. Il n'y a qu'un chlorobenzol, car les six H de $C_6 H_6$ sont identiques. Par la même raison, il n'y a qu'un nitrobenzol. Celui-ci, réduit dans son radical nitryle, devient amidobenzol, et cet amidobenzol, par le procédé général de remplacement de l'amidogène par l'oxhydryle

$$C_6 H_5 . AH_2 + AO . OH = A_2 + A_2 O + C_6 H_5 . OH$$

devient phénol. Ce phénol est plus acide que les alcools (il opère la double décomposition avec les bases); l'oxhydryle est, en effet, chez lui, seul satellite d'un des C et reçoit de la part de ce C (C est plus électro-négatif que H) une tendance-de-contraste électro-positive plus marquée que celle que lui donnerait le même C s'il était, en outre, satellité d'hydrogène. De plus, ce phénol se nitre, mais ne s'acidifie pas, par $AO_3 H$, ce qui s'explique par l'impossibilité de la formation chez lui d'un groupe carboxyle.

S'il n'y a qu'un phénol monatomique, il y en a trois qui sont diatomiques, l'hydroquinone, le pyrocatéchol et la résorcine, car, dès qu'il y a un OH fixé en remplacement d'un H dans la benzine, le second OH devra, la symétrie moléculaire étant maintenant détruite, donner des produits différents selon qu'il se fixera au 1er, au 2e ou au 3e rang à partir de l'OH du phénol. Les trois dioxybenzines s'expliquent donc par les trois formules que voici :

```
                          H
     H                    O                    H
     C                    C                    C
 HC//  \COH          HC//  \CH          HOC//  \CH
  |     ||             |     ||            |     ||
 HC\\  /COH          HC\\  /COH          HC\\  /COH
     C                    C                    C
     H                    H                    H
```

On doit même penser que la première de ces formules est celle de l'hydroquinone, car M. Graëbe a établi par diverses expériences que la quinone est

```
     H
     C
 HC//  \C – O
  |     |   |
 HC\\  /C – O
     C
     H
```

et l'hydruration de cette quinone n'a dû avoir pour résultat que de rompre le chaînon unissant les deux O l'un à l'autre, en fournissant à chacun de ces O un H terminal.

— Le toluol est du méthylbenzol

```
     H
     C
 HC//  \CH
  |     ||
 HC\\  /C – CH3
     C
     H
```

ou (en abrégé) $C_6 H_5 — CH_3$. Dès le début de la chloroïdation on pourra avoir, avec lui, des métamères, car Cl donnera des corps différents selon qu'il se substituera dans le noyau phénylique ou dans le chaînon méthylique. La théorie indique 2 dérivés monochlorés, 3 dichlorés, 4 tri, 4 tétra, 4 pentachlorés : tous ces composés sont connus. Les uns sont obtenus par Cl à chaud, les autres par Cl froid en présence de I. Si l'on n'use que de l'un ou de l'autre de ces procédés et si l'on ne dépasse pas la trichloration, on remarque que les dérivés obtenus par Cl à chaud sont déchlorés par l'oxydation et changés en acide

benzoïque, d'où la conséquence que le chlore était chez eux fixé dans le chaînon (seul capable de fournir un groupe carboxyle), — tandis que les dérivés obtenus par Cl froid en présence de I sont changés en acides chlorodracyliques par l'oxydation.

Le toluol possède deux dérivés monoxhydrylés différents, dont l'un est un phénol et l'autre un véritable alcool. On n'a pas de peine à comprendre que le premier (crésol) est

$$\begin{array}{lcl} & H & \\ & C & \\ HC & \diagup\!\!\diagup \quad \diagdown & C-OH \\ | & & \| \\ HC & \diagdown\!\!\diagdown \quad \diagup & C-CH_3 \\ & C & \\ & H & \end{array}$$

, tandis que le second (benzylol), qui a un acide dérivé (l'acide benzoïque)

$$\begin{array}{lcl} & H & \\ & C & \\ HC & \diagup\!\!\diagup \quad \diagdown & CH \\ | & & \| \\ HC & \diagdown\!\!\diagdown \quad \diagup & C-CO.OH \\ & C & \\ & H & \end{array}$$

, est

$$\begin{array}{lcl} & H & \\ & C & \\ HC & \diagup\!\!\diagup \quad \diagdown & CH \\ | & & \| \\ HC & \diagdown\!\!\diagdown \quad \diagup & C-CH_2.OH \\ & C & \\ & H & \end{array}$$

— La formule du carbure $C_n H_{2n-6}$ de la condensation suivante permet de prévoir l'existence de deux isomères principaux, dont l'un serait un diméthylbenzol $C_6 H_4 \left\{ \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array} \right.$ et l'autre un éthylbenzol $C_6 H_5 - C_2 H_5$. Le xylol du goudron de houille répond à la première constitution; l'éthylbenzine de MM. Fittig et König, préparé par débromation sodique d'une molécule de bromobenzol et d'une molécule de brométhane, répond, bien évidemment, à la seconde.

Le xylol, par oxydation extrême, donne un acide diatomique bibasique (l'ac. téréphtalique), ce qui se comprend, car il a de quoi former deux groupes CO.OH. L'éthylbenzol, par oxydation extrême, ne donne que de l'ac. benzoïque C_6H_5–CO.OH, ce qui prouve que le premier C du chaînon-éthyle reste seul attaché au noyau phénylique.

L'oxydation ayant donc pour résultat de raccourcir les chaînons en en détachant tous les C moins un, nous aurons en elle un excellent moyen de distinguer les métamères des condensations suivantes en appréciant le nombre de chaînons implantés, chez chacun d'eux, sur la chaîne fermée. — Nous distinguerons par ex. ainsi, à l'aide des acides dérivés, les trois carbures C_9H_{12}, savoir, le triméthylbenzol, le méthyléthylbenzol et le propylbenzol.

— La théorie-Kékulé de la constitution des carbures C_nH_{2n-6} a été étendue (car ce n'est qu'une extension) par M. Erlenmeyer à la naphtaline (carbure C_nH_{2n-12}), par MM. Graëbe et Liebermann à l'anthracène (carbure C_nH_{2n-18}), naphtaline et anthracène qui font aussi série.

La naphtaline résulterait de l'accolement de deux chaînes de benzine, accolement représenté ci-contre. On pourrait résumer cette formule en inscrivant simplement C_6H_4, C_4H_4, mais en se rappelant que les C_4H_4 complètent la deuxième chaîne benzine et ne représentent pas deux C_2H_2 flottants. M. Graëbe a confirmé la théorie-Erlenmeyer par les résultats comparés de l'oxydation de la dichloronaphtoquinone et de la quintichloronaphtaline, composés dans lesquels le chlore est fixé, exclusivement chez l'un, en majeure partie chez l'autre, dans le même des deux groupes-benzine, ainsi que le prouve la relation génésique suivante :

```
    H    H
    C    C
 HC    C    CH
 |     ||    |
 HC    C    CH
    C    C
    H    H
```

$$\underbrace{C_6H_4,\ C_4Cl_2O_2}_{\text{Dichloronaphtoquinone.}} + 2\,PCl_5 = 2\,POCl_3 + ClH + \underbrace{C_6H_3Cl,\ C_4Cl_4.}_{\text{Pentachloronaphtaline.}}$$

L'oxydation de la dichloronaphtoquinone donne de l'acide phtalique, par transformation en deux carboxyles de la moitié chloroxydée de la naphtaline : celle de la pentachloronaphtaline fournit de l'ac. tétrachlorophtalique, et cet état tétrachloré du dérivé prouve que, cette fois-ci, c'est l'autre moitié de la naphtaline qui s'est transformée en deux carboxyles. La molécule naphtalique est donc formée de deux moitiés identiques et non pas d'une seule chaîne benzine avec deux chaînons acétyléniques.

L'anthracène résulterait de l'accolement de 3 chaînes benzine.

```
      H     H     H
      C     C     C
 HC//  \C/  \\C/  \\CH
  |     ||    |     |
 HC     C     C     CH
   \\  / \  //  \  //
      C     C     C
      H     H     H
```

et l'on trouverait, au besoin, p. 358 et 359 de mon *R.* 68, les raisons qui militent en faveur de cette opinion-là.

— Les carbures $C_n H_{2n-6}$, $C_n H_{2n-12}$ et $C_n H_{2n-18}$, réagissent le plus souvent comme des composés saturés, et l'on voit combien les chaînes fermées rendent un compte satisfaisant de cette conduite. Mais pourtant ils offrent parfois les réactions des composés incomplets, et nous allons voir quelle théorie M. Graëbe (*B.*, janvier 69, p. 65) a émise sur la nature des corps obtenus dans ces circonstances-là.

M. Graëbe explique les ***produits d'addition de l'orthosérie aromatique***, par ex. $C_6 H_6, Cl_2$, — $C_6 H_6, Cl_4$, — $C_6 H_6, Cl_6$, par le relâchement successif des doubles liens de C. Mais le caractère aromatique se maintiendrait tant que la chaîne resterait fermée, de sorte que $C_6 \overline{H_6, Cl_8}$ n'aurait plus ce caractère. Le caproane, un $C_n H_{2n+2}$, serait nécessairement gras. Mais, à partir de l'Oléfine de la condensation, on aurait deux séries parallèles : l'une grasse, chaîne ouverte, dérivée du caproène :

l'autre aromatique, chaîne fermée, provenant du théorique benzolène, benzolène dont $C_6 H_6 Cl_6$ ne serait que le dérivé hexachloré. De même, parmi les $C_n H_{2n-2}$ (carbures en *ine*) de la condensation C_6, il y en aurait un gras, le *caproine,* et il y en aurait un aromatique, celui-ci terminé en *ine* comme l'autre, mais possédant dans son nom la racine aromatique (ex. : *benzoline*) au lieu de la racine grasse. Même différence de constitution exprimée par les mots *caproone* ($C_6 H_8$ ouvert) et *benzolone* ($C_6 H_8$ fermé).

Cette théorie permet de faire rentrer dans la Série aromatique l'ac. quinique, qui est de l'ac. tétroxybenzolène-carboxylique (voir ci-dessous), et l'ac. benzolique, qui est de l'acide benzoline-carboxylique $C_6 \overline{H_9 (CO_2} H)$.

```
        HO  H
          \/
     H    C     H
      \  /  \  /
  HO - C      C - CO.OH
       |      | H
   H - C      C/
      /  \  /  \
     O     C    H
     H    / \
         H   O
              H
```

On peut appliquer la même manière de voir à la naphtaline : son tétrachlorure, par ex., serait

```
      Cl H
        \|     H
         C     C
   H   /   \ /   \\ H
    >C      C      C
   Cl  |    ||     |
   H \ C    C      C H
      /  \ /  \  //
    Cl    C     C
         / \     H
        H   Cl
```

; et il va sans dire qu'on peut aussi réduire à un seul lien chacun des doubles-liens de l'anthracène et expliquer peut-être par là la constitution de certains composés sur le compte desquels on n'est pas encore bien fixé.

CHAPITRE III.

DES AVANTAGES QUE PRÉSENTE LA NOTATION ATOMIQUE.

Nous ne voulons pas nous étendre complaisamment sur ce chapitre, préférant allonger, s'il y a lieu, celui des objections.

Nous réduirons à 5 principaux les avantages que nous paraît avoir la Notation atomique sur la Notation en équivalents. Ces avantages sont les suivants : simplicité; profondeur; services rendus à la mémoire; services rendus à la raison; services rendu sà la science pratique.

§ I. — La plus grande *simplicité* de la Notation atomique provient de ce qu'elle peut comparer les corps sous un moindre volume que l'autre (2 au lieu de 4); d'où les formules.

$H_2 O$, au lieu de $H_2 O_2$, pour l'eau,
CH_4, au lieu de $C_2 H_4$, pour le gaz des marais,
$C_2 H_6 O$, au lieu de $C_4 H_6 O_2$, pour l'alcool,
$AO_3 H$, au lieu de $AO_6 H$, pour l'ac. azotique,
SO_3, au lieu de $S_2 O_6$, pour l'anhydride sulfurique,
$SO_4 H_2$, au lieu de $S_2 O_8 H_2$, pour l'ac. sulfurique (acide bibasique), etc.

Passer de la notation en équivalents à la notation atomique, c'est, comme l'a dit M. Naquet et ainsi que nous le rappellerons dans le chapitre suivant, faire une opération analogue à celle qu'on exécute en arithmétique quand on réduit une fraction à sa plus simple expression. Il est donc sage de procéder ainsi, et cela en dehors même de toute idée théorique.

§ II. — Au point de vue de la *profondeur*, il nous semble que la notation atomique fait pénétrer plus intimement dans la constitution des corps, l'atome pouvant être une fraction de l'équivalent quand il ne lui est pas égal, mais ne pouvant jamais être un multiple de cet équivalent.

Elle nous fait pénétrer plus intimement dans la constitution

des corps simples, pour laquelle elle tient compte de ce fait qu'ils sont moléculaires et non pas atomiques.

Elle nous fait pénétrer plus intimement dans la constitution des corps composés, entre les éléments desquels elle indique des relations mutuelles que montrent particulièrement les formules exposant l'état plus ou moins satisfait de toutes les atomicités. — Si ces relations ne sont pas le dernier mot de la Statique corpusculaire, elles constituent certainement un élément dont cette science devra tenir compte.

§ III. — Les *services rendus à la mémoire* par la notation atomique sont relatifs à la formule des corps et au souvenir de leurs propriétés.

Je puis oublier que les carbures benzéniques sont les carbures $C_n H_{2n-6}$; mais, quand je me suis familiarisé avec les idées de M. Kékulé, je me rappelle ma chaîne hexagonale fermée de benzine à atomicités simples et doubles alternatives, et je retrouve de suite la formule particulière du plus simple des carbures de la Série, d'où je déduis bien vite la formule générale de celle-ci.

Je puis oublier que la formule de l'acide oxalique répondant à sa bibasicité est $C_2 H_2 O_4$; mais, me rappelant la Condensation à laquelle appartient cet acide, sa bibasicité et son état saturé, je ne puis faire autrement que de le considérer comme du dicarboxyle. Et, quand j'ai la formule de cet acide, le premier de sa Série, je passe facilement à celle de tous ses homologues.

En chimie minérale, les formules des hydracides expriment leur atomicité et leur basicité. Celles des oxacides expriment aussi leur atomicité, qui est la même que celle des hydracides correspondants, car O entre dans XλH, dans SH_2, en se bornant à séparer du métalloïde, dans la molécule, l'H ou l'un des H. Et, comme le caractère électro-négatif de l'oxygène fait comprendre l'égalité qui existe presque toujours, chez les oxacides, entre l'atomicité et la basicité, on voit que cette dernière est aussi presque constamment indiquée par la formule.

Voilà déjà bien des avantages mnémotechniques. Mais quel souvenir des propriétés ne procurent pas les formules lorsqu'on leur donne, en chimie organique, par ex., le développement que permet seule de leur faire subir la notion de l'atomicité!

Si je note le propylol et l'isopropylol $C_6H_8O_2$ (en équivalents), que me dira cette formule des propriétés différentielles des deux isomères? Rien. Quel renseignement de plus me fournira, à ce point de vue, la formule typique $\left.\begin{matrix}C_6H_7\\H\end{matrix}\right\}O_2$? Aucun. Tandis que, si je représente (en atomes) le propylol par $\begin{matrix}CH_3\\|\\CH_2\\|\\CH_2.OH\end{matrix}$ et l'isopropylol par $\begin{matrix}CH_3\\|\\CH.OH\\|\\CH_3\end{matrix}$, je vois de suite que le premier a un acide correspondant, tandis que le second n'en saurait avoir un.

§ IV. — Les *services rendus à la raison*, c'est à dire à l'interprétation des phénomènes dans la science chimique, sont extrêmement nombreux : la notation atomique permet l'explication d'une masse de faits pour l'intelligence desquels l'autre est absolument muette.

Elle a permis d'abord l'édification des si satisfaisantes théories de la constitution de la Série grasse et des Séries aromatiques, théories qu'il est impossible de comprendre et de développer quand on note en équivalents.

L'étude de l'Atomicité des éléments a justifié la plupart des groupes naturels déjà établis chez eux : c'est ainsi qu'ont été confirmées, comme nous l'avons vu, les familles des Chloroïdes, des Oxoïdes, des Azotoïdes, des Natroïdes; c'est ainsi qu'a été confirmée aussi la famille des Calcoïdes (Ca, Sr, Ba, Pb), métaux diatomiques. Cette même étude conduisait à séparer le bore, toujours trivalent, des Anthracoïdes, di- et plus souvent tétravalents, malgré l'ancien rapprochement que tout le monde

avait effectué entre lui et le silicium; or, en même temps, on obtenait plusieurs siliciures d'hydrogène sans pouvoir faire de borures correspondants; on faisait dériver de ces siliciures une *chimie organique du silicium*, et, d'autre part, MM. Sainte-Claire Deville et Wohler venaient loyalement avouer, à la suite de nouvelles expériences, que le corps qu'ils avaient pris pour du bore graphitoïde n'est que du borure d'aluminium.

Les théories basées sur la notation atomique font admirablement comprendre qu'il y ait des radicaux. Si $C_2 H_5$ n'est pas plus entamé qu'un corps simple dans la plupart des réactions de $C_2 H_5 Cl$, c'est parce que la plupart des réactifs agiront sur le Cl qui, en sus de ses énergiques affinités, *prête plus particulièrement le flanc* par le fait de sa position à un bout de la molécule, et parce que ces réactifs agiront par substitution puisque $C_2 H_5 Cl$ est un composé complet. Mais un radical se distinguera toujours d'un corps simple par la possibilité d'être attaqué dans des circonstances exceptionnelles : ce même $C_2 H_5$ qui, dans $C_2 H_5 Cl$, résiste à la saponification, qui résiste à l'action (qui n'est plus alors que déplaçante) des métaux, etc., est entamé par l'action du chlore au soleil, par l'action du *Mycoderma aceti* sur son dérivé déchlor-oxhydrylé.

Les théories modernes expliquent non seulement les radicaux, mais encore l'atomicité des radicaux : $C_n H_{2n+2}$ étant saturé, il est tout naturel que $C_n H_{2n+1}$ soit monatomique, que $C_n H_{2n}$ possède deux affinités à satisfaire, que $C_n H_{2n-1}$ soit trivalent dans la plupart des cas et puisse être parfois univalent, ce qui laisse impaire son atomicité, etc.

La notion de l'Atomicité rend un compte parfait de la possibilité qu'il y a de ramener tous les corps organiques à quatre types fondamentaux. Ce nombre de quatre pour les types a été trouvé par Gerhardt; mais on ne doit conserver que trois des modèles d'architecture signalés par ce savant, car on ne saurait distinguer le groupement hydrogène du groupement acide chlorhydrique. Mais Gerhardt avait omis un type important, et c'est la réparation de cet oubli qui, après lui, a fait revenir au

chiffre de quatre. Ce groupement resté quelque temps inaperçu est celui du gaz des marais, et j'ai maintes fois entendu dire à M. Baudrimont qu'il manquait au système de Gerhardt le modèle acide carbonique, qui est exactement le même que le modèle gaz des marais, car, comme lui, il représente du carbone à toutes affinités satisfaites. La raison des quatre types ClH, OH_2, AH_3, CH_4, se trouve dans les atomicités 1, 2, 3, 4 des éléments Cl, O, A et C.

Mais passons à l'interprétation de quelques faits moins généraux.

Pourquoi dans les séries organiques, — demanderont ceux qui notent en équivalents, — voit-on la condensation du carbone croître par nombres pairs? Il est impossible de résoudre ce problème, qui disparaît complétement quand on note en atomes.

Pourquoi faut-il *deux* Cl pour faire *une* substitution? — Pas de réponse à attendre des chimistes ne connaissant que les équivalents; tandis que les Atomistes diront qu'il est tout naturel que 2 Cl interviennent, puisque 2 Cl constituent la molécule de chlore libre.

Pourquoi les sels ammoniacaux, distillés, ne perdent-ils que des nombres pairs d'équivalents d'eau, savoir (si leur acide est monatomique) 2 pour former une amide, 2 de plus pour former un nitrile? Nul *équivalentophile* ne répondra; tandis que les *atomophiles* diront que 2 équivalents d'eau en représentent une molécule.

Pourquoi, — diront encore les partisans de l'ancienne notation, — n'existe-t-il pas de carbures plus hydrogénés que les $C_n H_{2n+2}$? Autre question sans solution pour eux et qui ne fait point difficulté pour nous, pour nous qui voyons dans ce fait une conséquence forcée de la constante tétratomicité-maxima du carbone.

Pourquoi, — dira-t-on encore en présence d'une notation en équivalents, — le composé $C_2 H_4 Cl_2$ n'est-il pas le même quand il est obtenu par dichloration de l'éthane que quand il

est fait par dichloruration de l'éthylène? Cet embarrassant *pourquoi* disparaît encore avec la notation atomique, quand on fait remarquer que l'éther chlorhydrique chloré est $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH\,Cl_2 \end{matrix}$, car le Cl du chloréthane, déjà fixé dans un groupe méthyle, attire à lui le Cl nouveau (comme l'O oxhydrylique de l'alcool attire l'O nouveau qu'apporte l'acétification), — tandis que la liqueur des Hollandais est $\begin{matrix} CH_2\,Cl \\ | \\ CH_2\,Cl \end{matrix}$ parce qu'elle résulte de l'addition de Cl_2 à l'éthylène qui, libre, ne pouvait être que $\begin{matrix} CH_2 \\ \| \\ CH_2 \end{matrix}$.

Nous avons vu, dans le chapitre II, que l'acide glycolique est diatomique monobasique : il en est de même de tous ses homologues supérieurs. Mais nous avons vu, dans ce même chapitre, que l'homologue inférieur, l'acide carbonique théorique, est diatomique bibasique. Qu'on explique cette exception sans le secours des théories modernes! Avec ce que nous avons dit, au contraire, de l'action de contraste exercée par l'O substitué sur l'H de l'oxhydryle voisin, la chose eût été prévue *à priori;* car la condensation C_1, à laquelle appartient l'acide carbonique, est la seule dans laquelle C soit entouré de 4 satellites, de sorte qu'il y ait encore, après une double oxhydrylation, 2 H permettant l'oxygéno-substitution et, comme conséquence d'icelle, l'accentuation électro-positive des deux H oxhydryliques à la fois.

Une singulière isomérie existe chez les produits cyaniques : tantôt le cyanogène se comporte comme un chloroïde, et tantôt il agit tout autrement qu'un radical. Le fait existe déjà en chimie minérale, et, quand il traite de la reconnaissance des bases, M. Baudrimont ne manque jamais, dans son cours, de mettre tout à fait à part le prétendu cyanure mercurique, dont les propriétés n'ont aucune analogie avec celles des chloroïdures correspondants. Mais c'est surtout en chimie organique qu'on a de multiples exemples de ces deux manières d'être : les Cya-

nates alcooliques ne ressemblent pas aux Carbimides composées, les Éthers sulfocyaniques diffèrent des Essences de moutarde, et, à partir de la condensation totale C_2, les Nitriles d'une famille (Cyanures alcooliques de la famille homologue inférieure) sont tout autre chose que les Carbylamines de M. Gautier. — Je ne vois pas comment on peut expliquer cela dans le système de notation qui ne s'inquiète pas des liens intrà-moléculaires; tandis que, si l'on représente
l'orthocyanure mercurique inconnu par $A \equiv C - Hg - C \equiv A$ et
le pseudocyanure [1] connu par $C = A - Hg - A = C$,
les Cyanates alcooliques par $R' - O - C \equiv A$ et les
Carbimides composées par $R' - A = C = O$,
les Éthers sulfocyaniques par $R' - S - C \equiv A$ et les
Essences de moutarde par $R' - A = C = S$,
les Nitriles par $R' - C \equiv A$ et les Carbylamines par $R' - A = C$.
on comprend très bien que les composés dans lesquels C et A sont tririvés offrent le plus souvent le caractère indivisible du radical Cy, tandis que ceux dans lesquels C et A ne sont unis que par deux affinités offrent une moindre solidité dans ce groupe.

Les formules de l'acide chlorhydrique et des acides (non des anhydrides) hypochloreux, chloreux, chlorique, perchlorique, celles de plusieurs autres composés minéraux et organiques, prouvent que l'oxygène s'introduit dans les molécules sans avoir besoin d'aucun aide-de-camp. L'azote et le carbone n'agissent pas de même : le premier de ces éléments, — comme le prouvent par ex. les formules du benzol, de l'aniline, de la phénylène-diamine et de la picryl-triamine, — ne pénètre qu'accompagné d'un H par équivalent ou atome fixé; le second, — comme le prouvent les formules des termes de toute série

(1) MM. Chapman et Smith ont cité (*B.*, déc. 69, p. 462) un fait qui vient à l'appui de l'isomérie que nous admettons entre le cyanure de mercure et les autres cyanures. Voici ce fait : Le brômure de propyle, traité par CyK et alcool, fournit le cyanure de propyle, tandis que, traité par le prétendu cyanure de mercure, il donne un cyanure isomérique.

homologue, — ne se fixe qu'en entraînant avec lui dans la molécule deux H par double-équivalent ou par atome de carbone. — Ces différences, dont je ne sache pas que la notation en équivalents fournisse l'explication, sont, dans les théories modernes, la conséquence nécessaire de l'atomicité différente des trois éléments. Un corps simple à deux bras comme l'oxygène s'insinue par ex. entre un C noyau et un H satellite en donnant une main à l'un et une main à l'autre. Mais un corps tri ou tétravalent, quand il se glisse de même entre l'élément central et l'élément périphérique, laisserait une ou deux atomicités vacantes s'il ne se faisait pas accompagner d'un atome univalent dans le premier cas, de deux dans le second. — Deux atomicités peuvent à la rigueur faire défaut : aussi C déroge-t-il parfois à la règle, s'introduisant seul et fournissant un corps incomplet. Mais un composé ne peut exister libre quand il n'a de vacante qu'une atomicité : aussi la condition du satellite monatomique est-elle absolue pour la fixation sans condensation moléculaire d'un atome d'azote.

§ V. — Les théories ont, entre autres avantages, celui de provoquer force travaux, entrepris dans le but d'en confirmer ou d'en infirmer l'ensemble ou les détails. A ce titre, celles qui reposent sur la notation atomique n'ont rien à envier à leurs devancières. Signalons quelques détails de leurs *États de services dans le domaine de la science pratique.*

Et d'abord, mettons sur le compte des nouvelles théories la plupart, sinon la totalité, des travaux qui concernent les isalcools, les carbinols, la chimie organique du silicium, les divers carbures aromatiques métamères. C'est certainement sous l'impulsion de l'école Kékulé-Wurtz que ces œuvres ont été entreprises et ardemment poursuivies.

On avait indiqué un isomère de l'acide acétique parmi les produits provenant de la réduction de l'ac. oxalique : l'impossibilité d'expliquer l'isomérie d'un acide $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO.OH \end{matrix}$ a déterminé

M. Claus à reprendre la question, et il a trouvé l'ac. acétique lui-même, et non un isomère de cet acide.

M. Sokoloff avait cru devoir admettre l'existence de deux chlorobenzines : cette opinion était en complet désaccord avec une conséquence logique de la théorie-Kékulé; mais M. Riche et M. Jungfleisch ont solennellement contredit l'assertion du savant chimiste russe, bien que le dernier surtout ait apporté d'autant plus de soin à l'étude de la question qu'il voulait soumettre à une épreuve solennelle l'hypothèse émise sur la constitution de la benzine par l'illustre professeur de Bonn.

Dès le début des expériences de M. Frankland sur l'isolement des radicaux des alcools monatomiques, on a considéré ces radicaux libres comme différant tous des hydrocarbures hydriques de même condensation. Mais l'impossibilité de concevoir deux constitutions atomiques différentes chez les trois premiers $C_n H_{2n+2}$ a fait penser à M. Schorlemmer que le diméthyle doit être identique avec l'éthane : il s'est mis à l'œuvre et, par une étude approfondie des deux carbures et de leurs dérivés, il a confirmé son induction théorique. L'identité démontrée par ce savant a même été tacitement invoquée par nous page 221 comme moyen de passer de la condensation C_1 à la condensation C_2.

Il y a dans la condensation C_3 neuf acides saturés théoriquement possibles; car, avec un groupe carboxyle à un bout, que tous possèderont, on peut avoir : ***avec méthyle à l'autre bout,*** méthylène, oxyméthylène, carbonyle, au milieu; ***avec oxyméthyle à l'autre bout,*** méthylène, oxyméthylène, carbonyle, au milieu; ***avec carboxyle à l'autre bout,*** méthylène, oxyméthylène, carbonyle, au milieu. Partant de là, M. Wichelhaus reprend tous les acides connus à trois atomes de carbone, en trouve huit, recherche leur atomicité et leur basicité, et voit ainsi que huit, des neuf constitutions théoriques, sont représentées.

Une ne l'est pas : c'est $\begin{array}{l} CH_2.OH \\ | \\ CO \\ | \\ CO.OH \end{array}$. Il soumet alors l'ac. β chloro-

propionique $\begin{array}{l} CH_2Cl \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO.OH \end{array}$ à l'action (déchlorante et oxhydrylante d'une part, déshydrogénante et oxydante de l'autre) de l'oxyde d'argent humide, et il obtient, en effet, un acide dont la formule, l'atomicité, la basicité, sont d'accord avec la constitution $\begin{array}{l} CH_2.OH \\ | \\ CO \\ | \\ CO.OH \end{array}$, constitution que justifie encore la transformation de cet acide en ac. pyruvique $\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CO.OH \end{array}$ sous l'influence de la *réaction hydrogénante* (réaction de eau III, à 275°, en tubes scellés). Ce corps nouveau, *acide carbacétoxylique,* est donc encore une des conquêtes des théories modernes.

La théorie ne permet pas de concevoir de différence entre l'aldéhyde et l'acétone formiques : les deux doivent être $\begin{array}{l} H \\ | \\ CO'' \\ | \\ H \end{array}$. Partant de là, M. Mulder a essayé (*B.,* avril 69, p. 320) d'obtenir, par l'antique procédé de préparation des acétones

$$\underbrace{\begin{array}{l} H \\ | \\ CO.O \\ CO.O \\ | \\ H \end{array}\Big\} Ca''}_{\text{Formiate de chaux.}} = CO_3Ca + \underbrace{\begin{array}{c} H \\ | \\ CO'' \\ | \\ H \end{array}}_{\text{Formione.}},$$

le méthylal obtenu par M. Hofmann (*R.*, 68, p. 161) à l'aide de l'antique procédé de préparation des aldéhydes

$$\underbrace{\begin{array}{c} H \\ | \\ H-C-OH \\ | \\ H \end{array}}_{\text{Méthol,}} + O = HOH + \underbrace{\begin{array}{c} H \\ | \\ CO'' \\ | \\ H \end{array}}_{\text{Méthylal.}},$$

et il a parfaitement réussi.

CHAPITRE IV.

DES OBJECTIONS QU'ON A FAITES OU QU'ON POURRAIT FAIRE A LA NOTATION ATOMIQUE.

L'exactitude et la beauté de l'édifice construit sur la notation atomique constituant notre principal argument en faveur d'une adoption générale de ce système d'écriture, — nous considérerons comme objection à la notation tout argument qui s'adresserait aux théories basées sur elle. Mais nous concilierons avec la clarté cette largesse en matière d'admission des armes hostiles, en divisant nos arguments en *directs* et *indirects*.

§ I. — ***Arguments directs, c'est à dire s'attaquant à la notation atomique elle-même.*** — J'ai entendu repousser la notation atomique par diverses raisons que je rangerai dans un ordre décroissant d'importance. On a dit :

1° Les poids atomiques ne sont pas donnés par l'expérience;

2° L'atome de la notation atomique n'est pas, ne peut pas être l'atome vrai, la partie matérielle ultime, insécable des corps;

3° Les formules correspondant à deux volumes ne suffisent pas pour tous les cas : il est des corps dont la plus petite quantité réagissante, même exprimée dans la nouvelle notation, correspond à quatre volumes;

4° Les poids moléculaires auxquels on arrive dans le système moderne conduisent parfois à l'anéantissement des familles les mieux justifiées;

5° Au point de vue des relations entre savants ou de l'enseignement, il n'y a pas urgence à s'imposer et à imposer à d'autres l'apprentissage, toujours quelque peu long et pénible, d'une nouvelle notation.

Développons quand il y aura lieu, et examinons tour à tour chacune de ces objections-là.

— 1° Les poids atomiques ne sont pas moins conformes que les équivalents aux résultats de l'expérience. Comme base médiate des premiers, nous avons une hypothèse, la *théorie moléculaire* d'Avogadro ; comme base immédiate de plusieurs *équivalents chimiques,* nous avons également une hypothèse, consistant à admettre que le protoxyde d'un corps simple donné est formé d'un équivalent de ce corps simple et d'un équivalent d'oxygène.

Je dirai même qu'au point de vue purement expérimental les poids atomiques me paraissent supérieurs aux équivalents chimiques. Ceux des corps simples, qui servent de base aux autres, sont, en effet, le résultat de l'examen minutieux de la molécule de chacun des composés que forment ces corps simples, d'où leur invariabilité ; tandis que les équivalents (chimiques) ne sont déterminés que par rapport à un terme précis de comparaison, d'où leur variabilité. Ne sait-on pas que les quantités 35,5 de Cl et 14 d'A qui s'équivalent vis à vis de 8 d'O, ne sont pas celles 35,5 de Cl et 4,66 d'A qui s'équivalent vis à vis de 1 d'H? — Les partisans de l'ancienne notation sont obligés d'admettre deux équivalents pour le fer ; l'hypothèse d'un *ferrosum* et d'un *ferricum* est, au contraire, tout à fait inutile, si on adopte les théories modernes et si on pense à la tétratomicité que démontre dans le fer le plus répandu de ses composés non condensés (le dimorphe bisulfure), car alors on voit clairement que le groupe $Fe_2 = \begin{array}{c} | \\ -Fe- \\ | \\ -Fe- \\ | \end{array}$ doit, de toute nécessité, fonctionner comme hexatomique.

Il y a plus : la partie théorique sur laquelle repose la détermination des équivalents n'est que le reflet, la preuve, d'une intuition native des atomes. Une seule chose peut, en effet, légitimer l'idée que le premier degré d'oxydation d'un élément soit formé d'un équivalent de chacun des deux composants :

c'est que cet équivalent représente *la plus petite quantité réagissante* de ces deux composants.

Les *équivalents cristallographiques* offrent un degré de certitude de plus que les équivalents chimiques proprement dits, et pourtant ils sont parfois délaissés au profit de ces derniers. Pour le cuivre, par ex., on adopte 31,75 comme équivalent; or c'est à 63,5 qu'on arriverait en donnant au chlorure cuivreux la formule que prescrit son isomorphisme avec le chlorure d'argent (isomorphisme que ne possède pas le chlorure cuivrique). Voilà donc un cas où l'équivalent cristallographique n'est pas d'accord avec l'équivalent tabulaire; il est, au contraire, conforme au poids atomique (déduit de la chaleur spécifique du métal).

Il y a des poids atomiques cristallographiques, c'est à dire déduits d'une formule atomique préalablement commandée par la loi de Mitscherlich. Ce poids, pour l'aluminium, est le double de l'équivalent cristallographique (le poids atomique de l'oxygène étant le double de son équivalent); mais il est égal au poids atomique déduit de la chaleur spécifique du métal.

Les *équivalents thermiques* ne sont autre chose que les poids atomiques.

Les *équivalents électriques* cadrent avec les équivalents chimiques proprement dits.

Ainsi donc, des quatre procédés qui servent à déterminer les nombres proportionnels,

L'un (Données chimiques) fournit des équivalents variables qui ne découlent pas toujours de l'expérience pure et des atomes fixes dont la conception repose sur une hypothèse générale, — de sorte que ces atomes rachètent par leur fixité la plus grande fréquence de l'intervention de l'hypothèse dans leur détermination;

Un second (Données chimiques et loi de l'isomorphisme) conduit le plus souvent et aux équivalents et aux atomes; mais parfois (cuivre, par ex.), il conduit à l'atome et non à l'équivalent adopté;

Un troisième (loi de Dulong et Petit) donne l'atome;

Un quatrième (loi de Faraday) fournit l'équivalent.

Et si, après ce résumé, nous rappelons que la partie théorique de la détermination de plusieurs équivalents est un reflet de l'intuition des atomes, ne trouvera-t-on pas que nous sommes modérés en ne concluant qu'à l'égalité d'importance des deux sortes de proportions chimiques au point de vue expérimental?

— 2° L'atome de la notation atomique ne peut pas être l'atome vrai, dira-t-on, car il est impossible de constituer un corps simple (comme un chloroïde, l'azote, l'hydrogène) avec deux atomes seulement, et il est également impossible de bâtir dans un plan un corps composé, tel que le gaz des marais, l'ammoniaque ou l'eau.

Nous répondrons qu'il importe peu, au point de vue de son adoption, que la notation moderne donne l'atome absolu; l'essentiel est qu'elle fournisse l'atome chimique. Et c'est de ceux qui voudraient aller plus loin qu'on pourrait dire, plutôt que de nous, qu'ils entrent en plein dans le domaine de la métaphysique.

Qu'est-ce qui prouve, du reste, qu'il soit impossible de constituer une molécule de corps simple avec deux atomes seulement? A l'état statique, oui. Mais savons-nous si les corps fluides, — et c'est très probablement à l'état fluide que sont les corps au moment où ils réagissent chimiquement, — sont en repos ou en mouvement intime? Le groupe céleste dont notre planète est le centre ne pourrait certes pas être simplement binaire s'il était en repos; mais, roulant dans l'espace, la Terre peut se contenter de son unique satellite, qui est roulant aussi.

Oui encore, il est impossible de bâtir dans un plan. Mais, en dehors de l'état solide, qu'est-ce qui prouve que les composés sont bâtis?

— 3° En faisant la troisième objection, on a évidemment en vue les prétendues densités de vapeur de l'acide sulfurique, du

sel ammoniac et de quelques autres composés, qui indiqueraient que les formules indivisibles SO_4H_2, AH_4Cl, etc., de ces composés, correspondraient à quatre volumes.

Ne voulant pas nous appesantir sur des points traités à fond dans des ouvrages, nous renverrons aux pages 22 à 26 de la 2[e] édition des *Principes de chimie* de M. Naquet ceux qui voudraient être complétement édifiés sur la valeur de l'objection. Nous dirons simplement, en deux mots, que c'est très vraisemblablement par une dissociation n'existant qu'au moment de la fermeture du ballon de M. Dumas, qu'on peut expliquer les prétendues exceptions que présenteraient les corps cités par nous.

— 4° On a reproché aux théories modernes de conduire à P_4 et As_4 pour les poids moléculaires du phosphore et de l'arsenic, alors que le poids moléculaire de l'azote, qui est de la même famille, est simplement A_2.

Mais le rapprochement de ces trois corps est surtout justifié par leur commune atomicité (3 ou 5), ce qui est un caractère de l'atome, — et, quant à leur molécule, il importe peu qu'elle soit $\begin{array}{c} A \\ ||| \\ A \end{array}$ ou $\begin{array}{ccc} P & - & P \\ || & & || \\ P & - & P \end{array}$. Ne voit-on pas en chimie organique des radicaux qui sont homologues, qui sont notamment équiatomiques, bien que de condensations moléculaires très différentes?

— 5° Il y a urgence, au point des relations entre savants, à adopter au plus tôt la nouvelle notation.

J'ai fait le relevé du système suivi par chacun des auteurs, même décédés aujourd'hui, qui figurent dans le *Bulletin de la Société chimique* de 1869, en y comprenant tout aussi bien ceux de chimie minérale que ceux de chimie organique et en mettant encore exclusivement au compte des Équivalents ceux qui ont changé leur notation dans le courant de l'année, dans quelque sens qu'ait eu lieu ce changement. L'absence de formules caractéristiques m'a parfois empêché de constater ce que j'avais en vue. Mais, toutes les fois que j'ai pu être fixé par ce

ouvrage, qui laisse à chacun son entière liberté, voici ce que j'ai constaté :

Notent ou ont noté en Équivalents (ne fût-ce qu'une fois) MM. :

H. van Aukum, Hollandais.
Benrath.
Berthelot, professeur au Collége de France et à l'École de Pharmacie de Paris.
Adolphe Bobierre, directeur de l'École des Sciences appliquées de Nantes.
Lecoq de Boisbaudran, de Cognac (Charente).
Alfred-Edme Bourgoin, de Paris, élève de M. Berthelot.
E. Brescius.
Brugère.
F. Curda.
10. Dubrunfaut, de Paris, grand industriel (Sucre) dans le Nord de la France.
G. Felsko, de Riga, mais travaillant à Iéna (Saxe-Weimar-Eisenach, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Reichardt.
Fouqué, de Paris.
H. Gal, de Paris.
E. Gauhe, de Marbourg (Hesse-Electorale, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Kolbe.
F.-W. Gintl, de Vienne.
Aimé Girard, de Paris, à l'École polytechnique.
L. Glutz, probablement à l'École polytechnique de Cassel (Hesse-Électorale, nouvelle acquisition de la Prusse).
P. Hautefeuille, de Paris.
Jules Joffre, de Paris.
20. Émile-Clément Jungfleisch, de Paris, élève de M. Berthelot.
Adolphe-Hermann Kolbe, professeur à Marbourg (Hesse-Électorale, nouvelle acquisition de la Prusse).
Jules Lefort, de Paris.
Henry Limpricht, professeur à Greifswalde (Prusse).
Victor de Luynes, de Paris, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.
G.-H. Mann, Américain.
L. Marquardt, de Greifswalde (Prusse), élève de M. Limpricht.
E.-J. Maumené, de Paris.

J. Nicklès, professeur à Nancy, décédé.
Nicklès, pharmacien, à Villé (Alsace).
30. J. Philipp, de Berlin, préparateur.
C. Rammelsberg, de Berlin.
E. Reichardt, professeur à Iéna (Saxe-Weimar-Eisenach, Confédération de l'Allemagne du Nord)
F. Reindel.
Adolphe Renard.
Richters, de Pétersbourg, Institut technologique.
Rochleder, de Vienne.
Alvin Ruempler.
Docteur F. Sacc, professeur à Neufchâtel (Suisse).
A. Souchay.
40. R. Theile.
Louis Troost, de Paris.
Fr. Ullik, de Vienne.
Ferd. Vigier, de Paris, pharmacien interne des hôpitaux.
Cur. H. Weigelt.
Edmond Wilm, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
Wischin, de Paris.
Ch. Wolff, de Vienne.
48. G. Wyrouboff, de Paris.

Notent en Atomes MM. :

Ador, de Berlin.
W. Ahrens, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
P. Alexeyeff, de Kiev (Russie, versant de la mer Noire).
Arndt.
L. Barth, de Vienne.
H. Basset.
A. Bäyer, de Berlin.
F. Beilstein, de Pétersbourg.
Bek.
10. C. Bender, de Tübingen (Würtemberg), élève de M. Strecker.
Max Bichele, d'Erlangen (Bavière), élève de M. Gorup-Besanez.
P. Bieber, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
B. Biedermann, de Göttingen (*idem*), élève de M. Hübner.

Birnbaum, de Carlsruhe (Grand-Duché de Bade), École polytechnique.

Blas, de Louvain (Belgique), professeur de Chimie analytique.

Böhler, de Halle (Prusse), élève de M. Heintz.

A. Boutlerow, professeur à Kazan (Russie, versant de la mer Caspienne).

C. Braun.

Von der Brueggen, de Moscou, travaillant à Zurich (Suisse) dans le laboratoire de M. Wislicenus.

20. L. Buff, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse).

Bunge, Russe.

R. Bunsen, professeur à Heidelberg (Grand-Duché de Bade).

E.-C. Burr.

L. Carius, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).

Eugène Caventou, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.

G. Chancel; professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier.

E.-T. Chapman, d'Édimbourg (Écosse).

Chevrier, de Paris.

Adolphe Claus, de Fribourg-en-Brisgau (Grand-Duché de Bade).

30 Philippe de Clermont, Paris, École pratique des hautes Études de la Sorbonne.

A. Collmann, de Tübingen (Würtemberg), élève de M. Strecker.

A. Cossa, de Berlin (?).

E. Czumpelik, de Berlin, laboratoire de M. Hofmann.

L. Darmstaedter, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).

J. Dembey, de Zurich (Suisse), élève de M. Wislicenus.

W.-P. Dexter, Américain.

E. Divers, Iles Britanniques.

E. Dreher, à Brunswick (Duché de Brunswick, Confédération de l'Allemagne du N.), élève de M. Otto.

C. Dresler, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade), laboratoire de M. W. Lossen.

40. J. Duvernoy, de Tübingen (Würtemberg), élève de M. Strecker.

J.-H. Eaton, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.

Eggertz.

A. Eghis, natif d'Odessa, travaillant à Paris (laboratoire de M. Wurtz).

Eller, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).

A. Engelhardt, de Pétersbourg.

C. Engler, de Halle (Prusse), *privat docent.*
A. Faust, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse).
E. Erlenmeyer, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).
N. Fedorow.
50. E. Felletar.
Ferrouillat, de Paris, laboratoire des hautes Études de la Sorbonne.
W. Filehne, docteur en médecine à Berlin.
F. Fischer, de Luxembourg (Grand-Duché de Luxembourg, Hollande).
Rodolphe Fittig, professeur à Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse).
Fraser, d'Édimbourg (Écosse).
Charles Friedel, de Paris, laboratoire de M. Wurtz, conservateur des collections à l'École des Mines.
Jules Fritzsche, de Pétersbourg.
O. Fröhlich.
Armand Gautier, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
60. A. Geuther, professeur à Iéna (Saxe-Weimar-Eisenach, Confédération de l'Allemagne du Nord).
Gladstone, de Londres.
C. Glaser, directeur d'une fabrique d'aniline à Mannheim (Grand-Duché de Bade), précédemment assistant de M. Kékulé à Gand, puis à Bonn.
Glinsky.
Gorup-Besanez, professeur à Erlangen (Bavière)
Ch. Graebe, de Berlin.
Émile Grange, de Paris, laboratoire de l'École pratique des hautes Études de la Sorbonne.
P. Griess, de Burton-on-Trent (Grande-Bretagne).
Louis-Édouard Grimaux, de Paris, élève de M. Wurtz.
De Gruber, à Brunswick (Duché de Brunswick, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Otto.
70. J.-W. Gunning, d'Amsterdam (Hollande).
F. Hallwachs.
W. Heintz, professeur à Halle (Prusse).
A. Henninger, de Paris, laboratoire de M. Wurtz
Louis Henry, professeur de Chimie générale à Louvain (Belgique), dont l'obligeance nous a grandement aidé à édifier la présente géographie des chimistes.

Th. Hermann, de Moscou.
O. Hesse.
A.-W. Hofmann, professeur, jadis à Londres, aujourd'hui à Berlin.
S. Hoogewerff, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
A. Horstmann, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade), *privat docent.*
80. H. Hübner, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), *privat docent.*
W. Irelan, de Leipzig (Royaume de Saxe, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Kolbe
Jilke, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
Jungkann.
J. Kachler.
Herm. Kämmerer.
A. Kékulé, professeur à Bonn (Prusse).
J. Kiesow, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
G. Klatzo.
C. Knapp.
90. Koch.
Köbrich, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
J. König, de Göttingen *(idem)*, élève de M. Fittig.
W. Körner, de Bruxelles.
Laurent de Koninck, professeur à Liége (Belgique).
H. Kopp, rect[r] de l'Univ[té] d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).
G. Krämer, de Berlin, laboratoire de M. Hofmann.
C. Kraut, professeur à l'École polytechnique de Hanovre (nouvelle acquisition de la Prusse).
A. Kuhlberg, de Pétersbourg, élève de M. Beilstein.
A. Ladenburg, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).
100. H. Landolt, de Bonn (Prusse). *An idem que M. L. Landolt?*
P. Latschinoff, de Pétersbourg.
Ed. Lefranc, pharmacien major (France).
Ad. Lieben, professeur à Turin (Piémont).
Liebermann, de Berlin.
Oscar Liebreich, de Berlin, *privat docent.*
Ed. Linnemann, prof[r] à Lemberg (Roy. de Galicie, Autriche).

E. Lippmann, de Vienne, laboratoire de M. Bauër.
O. Loew, de New-York, city college.
J. Lœwenthal, de Brunswick (Duché de ce nom, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Otto.
110. F. Lossen, d'Halle (Prusse), élève de M. Heintz.
W. Lossen, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade), *privat docent*.
H. Ludwig, de Vienne.
W. Lueddecke.
Const. Lukaschewicz.
R. Maly, d'Olmütz (Margraviat de Moravie, Autriche).
P. Marasse, de Berlin
Em. Masing.
A. Matthiessen, professeur à l'hôpital Saint-Bartholomew (Londres).
Mendelejeff.
120. N. Menschutkin, de Pétersbourg.
V. Merz.
A. Metzner, d'Halle (Prusse), élève de M. Heintz.
V. Meyer.
F. Michels, de Prusse (?).
H. Mielch, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse).
E. Mills.
W. Morkownikoff, de Kazan (Russie, versant de la mer Caspienne).
E. Mulder.
H. Mülhauser.
130. C. Müller, de Stockholm (Suède).
G. Muller, d'Halle (Prusse), élève de M. Heintz.
W. Muller.
Naudin, de Paris, élève de M. P. Schutzenberger.
Neuhof, de Pétersbourg, élève de M. Beilstein.
Nöldecke, de Zurich (Suisse), élève de M. Wislicenus.
Opl, de Vienne.
Robert Otto, de Brunswick (Duché de ce nom, Confédération de l'Allemagne du Nord).
E. Paterno, de Palerme (Sicile), élève de M. Cannizzaro.
W.-H. Perkin, professeur à Londres.
140. Petermann, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Hübner.

Philippona, d'Halle (Prusse), élève en pharmacie, chez M. Heintz.
Popoff, de Kazan (Russie, versant de la mer Caspienne).
M. Pott, de Bonn (Prusse), élève de M. Kékulé.
Poulain.
K. Preis.
Ad. Prinzhorn, de Hanovre (royaume de), élève de M. Kraut.
J. Prüssen, d'Halle (Prusse), élève de M. Heintz.
Th. de Purgold, de Pétersbourg.
Rad, d'Erlangen (Bavière), élève de M. Gorup-Besanez.
150. Bronislas Radziszewski, de Louvain (Belgique), élève de M. Louis Henry, préparateur du cours de Chimie générale.
A. Reinecke.
J. Remsen, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
Emerson Reynolds, de Dublin (Irlande).
H. Riemann, d'Iéna (Saxe-Weimar-Eisenach, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Geuther.
Joseph Romei.
A. Rosenstiehl, professeur à Mulhouse (Haut-Rhin).
A. Rossi, de Turin (Piémont), élève de M. Lieben.
J. Ruotte, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
Georges Salet, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
160. Al. Samosadsky.
Savigny, de Paris, laboratoire des hautes Études de la Sorbonne.
A. Schäuffelin, de Tübingen (Würtemberg), élève de M. Strecker.
L. Schäffer, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
L. Schaper.
C. Scheibler, de Berlin.
E. Scheitz, d'Iéna (Saxe-Weimar-Eisenach, Confédération de l'Allemagne du Nord), élève de M. Geuther.
Ugo Schiff, professeur à l'Institut supérieur de Florence.
M. Schmeltzer, de Carlsruhe (capitale du Grand-Duché de Bade).
R. Schmitt, probablement à l'Ecole polytechnique de Cassel (Hesse-Électorale, nouvelle acquisition de la Prusse).
170. R. Schneider, de Mulhouse (Haut-Rhin).
C. Schorlemmer, de Manchester (Angleterre), professeur à Owen's College.

A. Schröder, de Hanovre (royaume de), élève de M. Kraut.
O. Schultzen, de Berlin.
Paul Schutzenberger, de Paris, directeur-adjoint du laboratoire de recherches de la Sorbonne.
Schwartz, de Vienne.
Fausto Sestini, de Forli (Italie).
S.-P. Sharples, Américain (?).
A. Siersch, de Vienne.
Siewert.
180 R.-D. Silva, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
Maxwel Simpson, de Dublin (Irlande).
Miles Smith, de Manchester (Angleterre).
Nicolas Sokoloff, de Pétersbourg.
Th. Stacewicz, de Ploëk ou Plock, par Varsovie (ancien royaume de Pologne).
W. Städel.
R. Stein.
John Stenhouse, de Londres, hôpital Saint-Bartholomew.
J. Storer, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), élève de M. Fittig.
Nevil Story-Maskelyne, Anglais ou Américain.
190. Em. Strauss.
Adolphe Strecker, professeur à Tübingen (Würtemberg).
Henry Struve, de Pétersbourg.
Th. Swarts, professeur à l'Université de Gand (Belgique).
N. Tawildarow, de Pétersbourg, Institut technologique.
Thorpe, Anglais.
Tilberg.
B. Tollens, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
O. Veiel.
G. Vogt, de Paris, laboratoire de M. Wurtz.
200. J. Volhard, professeur à München (Bavière).
A. Wahlforss.
Otto Wallach, de Göttingen (Hanovre, nouvelle acquisition de la Prusse), laboratoire de M. Hübner.
James-Alfred Wanklyn, d'Édimbourg (Écosse).
W. Weith, de Zurich (Suisse), *privat docent.*
Werner.
H. Wichelhaus, d'Heidelberg (Grand-Duché de Bade).
P. de Wilde, professeur à l'École militaire de Bruxelles.
J. Wislicenus, professeur à Zurich (Suisse).

C.-R.-A. Wright, de Londres, hôpital Saint-Bartholomew.
210. E. Wroblewsky, de Pétersbourg, élève de M. Beilstein.
Adolphe Wurtz, de Paris, doyen de la Faculté de Médecine.
Th. Zincke, de Bonn, laboratoire de M. Kékulé.
213. N. Zinin, de Pétersbourg.

Ainsi, sur 261 auteurs, 213 notent en atomes à l'heure présente, ce qui constitue une proportion de 0,816 ou de plus des quatre cinquièmes.

§ II. — *Arguments indirects, c'est à dire s'attaquant aux théories basées sur la notation atomique.* — Nous examinerons successivement les objections faites à la théorie de l'Atomicité, à Celle de la constitution de la Série grasse, à Celle de la constitution des Séries aromatiques.

— 1° Deux objections ont été faites à la Théorie de l'Atomicité.

(*a*) On ne saurait, a-t-on dit, déduire l'atomicité de l'atome d'un élément, du nombre des H qu'il fixe autour de lui, car tous ces H ne sont pas semblables : il en est un, dans chacun des types hydrogène, eau, ammoniaque, gaz des marais, qui fonctionne autrement que l'autre ou que les autres. On ne saurait, par ex., déduire la triatomicité des Azotoïdes de l'existence du composé ΦH_3 : ce serait nier l'analogie qui existe entre les amidures et les chloroïdures. On ne saurait pas davantage déduire la pentatomicité fréquente de ces Azotoïdes de l'existence du composé $\Phi \bar{H_4} \bar{X\lambda}$: ce serait nier la profonde analogie qui existe entre les sels ammoniacaux et les sels de potasse.

Nous répondrons en disant que la parfaite isodynamie des trois H de l'ammoniaque est expérimentalement démontrée par l'existence et par la genèse-Hofmann des monamines primaires, secondaires et tertiaires. Si le procédé Wurtz ne donne que des monamines primaires, ce n'est point parce qu'il y aurait un H plus facilement substituable que les autres par des radicaux alcooliques, c'est parce que le composé du type ammoniaque qui sert de point de départ n'a jamais qu'un H remplacé par un

de ces radicaux, un corps diatomique occupant la place des deux autres :

$$A\left\{\begin{matrix}(CO)''\\R'\end{matrix}\right. + 2(H.OK) = A\left\{\begin{matrix}H_2\\R'\end{matrix}\right. + (CO)''\left\{\begin{matrix}OK\\OK\end{matrix}\right.,$$

Carbimide composée. Potasse. Monamine primaire. Carbonate de potasse.

réaction tout à fait comparable à celle offerte par la carbimide de la condensation C_0 :

$$A\left\{\begin{matrix}(CO)''\\H\end{matrix}\right. + 2(H.OK) = A\left\{\begin{matrix}H_2\\H\end{matrix}\right. + (CO)''\left\{\begin{matrix}OK\\OK\end{matrix}\right..$$

Ac. cyanique. Potasse. Ammoniaque. Carbonate de potasse.

Quant à la pentatomicité qu'ont les Azotoïdes lorsqu'ils ne sont pas trivalents, elle découle de l'existence du composé ΦCl_5, qui vient immédiatement après le composé ΦCl_3. Et si ΦH_5 n'existe pas, comme existe ΦCl_5, c'est parce que les Azotoïdes les plus réels (A, P, As) sont beaucoup plus près du chlore que de l'hydrogène dans la classification électro-chimique de Berzélius, de sorte qu'on comprend qu'un cinquième satellite monatomique ne puisse pas être retenu autour du centre Φ lorsqu'il est hydrogène, alors qu'il peut l'être encore lorsqu'il est chlore, ainsi qu'il advient dans le composé $\Phi H_4\overline{X\lambda}$.

Mais, dira-t-on, admettre que les 3 H de ΦH_3 sont identiques, c'est nier l'analogie qui existe entre les amidures et les chloroïdures; admettre que les 5 H de ΦH_5, s'il existait, seraient identiques, c'est nier la profonde analogie qui existe, par ex., entre KCl et $(AH_4)'$ Cl. — Et comment cela? La théorie de l'Atomicité est-elle inconciliable avec celle des Radicaux? N'avons-nous pas vu qu'elle explique, au contraire, d'une manière on ne peut plus satisfaisante, les radicaux monatomiques comme sont monatomiques les Natroïdes, les radicaux diatomiques comme sont diatomiques les Calcoïdes, etc.? Quelque théorie que l'on adopte, l'isomorphisme des chlorures de potassium et d'ammonium n'est ni plus ni moins difficile à expliquer que celui de la molécule compliquée d'un alun et

de la molécule, relativement si simple, du chlorure de potassium lui-même. — Et quant à l'identité des 3 H de ΦH_3, nous le répétons, quelque conséquence qu'elle doive entraîner, c'est un fait indiscutable, car il est établi par l'expérience.

La parfaite isodynamie des 2 H de HOH est démontrée également par les substitutions. Si un seul de ces H est remplacé par Cl dans l'ac. hypochloreux ClOH, les deux le sont par le même métalloïde dans l'anhydride hypochloreux ClOCl. Si un seul de ces H est remplacé par K dans l'hydrate de potasse HOK, les deux le sont par le même métal dans la potasse anhydre KOK.

Les 4 H du gaz des marais sont indifféremment substituables par Cl; si le méthylène CH_2 était connu et s'il fournissait, par addition, un dichlorure différent du dichlorométhane, l'objection dont nous nous occupons serait fondée. — Mais, dira-t-on, il y a lieu de penser que le dichlorure de méthylène serait, en effet, différent du dichlorométhane, puisque le dichlorure d'éthylène ou liqueur des Hollandais est différent du dichloréthane ou éther chlorhydrique chloré. Pardon, mais il n'y a pas identité de constitution entre ces corps de formules homologues : l'éthylène peut exister libre, parce que, contenant 2 C, il peut se constituer ainsi $\begin{matrix} CH_2 \\ \| \\ CH_2 \end{matrix}$ et satisfaire par là à la tétravalence de chacun des C (et c'est peut-être parce qu'il y a impossibilité de formation d'un double-bras dans CH_2 que ce composé incomplet n'est pas connu à l'état libre); or, si on chlorure $\begin{matrix} CH_2 \\ \| \\ CH_2 \end{matrix}$, on ne peut faire que $\begin{matrix} CH_2Cl \\ | \\ CH_2Cl \end{matrix}$, tandis que, quand on chlore $\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$, ce qui donne d'abord $\begin{matrix} CH_2Cl \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$ et qu'on chlore encore ce premier dérivé, il y a des chances considérables pour que le chlore continue à se fixer dans le groupe méthyle déjà entamé et pour

qu'il fournisse $\overset{\text{CH Cl}_2}{\underset{\text{CH}_3}{|}}$, corps bien différent de $\overset{\text{CH}_2\text{Cl}}{\underset{\text{CH}_2\text{Cl}}{|}}$. — Il n'y a donc pas plus de raison théorique que de raison expérimentale de penser que le dichlorure de méthylène soit différent du dichlorométhane, c'est à dire qu'il y ait des H de diverses sortes dans le gaz des marais.

(*b*) En rendant compte, — dans le *Mon. sc.*, 68, p. 850, — des études faites par M. Edme Bourgoin sur le ***Rôle de l'eau dans l'électrolyse,*** — M. Naquet, — car c'est bien lui qui a écrit l'article, comme le prouve la table alphabétique des Auteurs qui est à la fin du volume de cette année-là, — tire de ces études une objection contre la théorie de l'Atomicité. Résumons cette objection dans ce qu'elle a d'essentiel :

M. Bourgoin a confirmé, par des expériences antérieures (voir, au besoin, le bas de la p. 58 de notre *R.* 68), ce fait que, dans les électrolyses, l'eau n'est pas décomposée. Il a également démontré que tout oxacide se décompose à la façon d'un hydracide, son H se dégageant au pôle —, son résidu halogénique (qui se détruit aussitôt) se dégageant au pôle +. Cela posé, M. Bourgoin met de l'eau sulfurique dans deux vases-tubes concentriques communiquant par un trou imperceptible qui laisse le courant passer et les molécules se polariser, mais qui empêche le mélange du liquide des deux compartiments; chacun des vases-tubes reçoit une électrode et est disposé de façon à fournir le gaz qui se dégagera en lui ; on note la température des gaz, la pression, on peut donc en calculer le poids. Si l'on met le même poids de la même eau sulfurique dans les deux compartiments, on constate, au bout de quelque temps et avec une liqueur alcaline titrée, que l'acide s'est concentré dans le compartiment positif, ce qui s'explique par la libération de SO_4 qui s'est faite là et par la décomposition subséquente de cet SO_4 en O et en SO_3 qui s'est réhydraté.

Puisque cette accumulation de l'acide dans le compartiment + est la conséquence de l'électrolyse, la comparaison acidimétrique des deux compartiments permet de déterminer

la quantité de cet acide qui a été électrolysée. — On trouve que l'O dégagé au pôle + et que l'H dégagé au pôle — ne sont pas en raison de la quantité d'acide électrolysée : si cet acide est SO_4H_2 comme on le prétend, il doit y avoir, pour une molécule d'icelui décomposée, un atome d'O et deux atomes d'H libérés ; on trouve davantage. Ce *davantage* serait trois fois plus, et toujours trois fois plus, pour toutes les solutions comprises entre $SO_4H_2, 4H_2O$ et $SO_4H_2, 250H_2O$, — si toutefois on s'en rapporte exclusivement à la p. 434 du 2[e] semestre 69 du *B.*

Voilà les faits, voici maintenant l'objection :

Puisque l'eau libre n'est pas électrolysée, l'acide sulfurique que le courant décompose est, non SO_4H_2, mais $SO_4H_2, 2H_2O$ ou SO_6H_6. C'est là l'hydrate normal, dont SO_4H_2 n'est qu'un deuxième anhydride et SO_3 un troisième et dernier. Or l'existence de SO_6H_6 exige qu'on porte à 6 l'atomicité du soufre, atomicité avec laquelle le composé à expliquer est $S(OH)'_6$. On déduit de là, pour l'anhydride absolu, non la formule déve-

```
        O
       / \
loppée S   O
       \ /
        O
```

se contentant de la diatomicité des deux corps

simples, mais la formule développée

```
O"  O"
 \ /
  S
  |
  O"
```

exigeant, elle aussi, l'hexatomicité du soufre. Puisque l'anhydride sulfurique

```
    O   O
     \ /
est   S
      |
      O
```

, « l'atomicité des corps peut être déterminée » d'après les composés que ces corps forment avec l'oxygène en » faisant celui-ci diatomique. » Dès lors l'existence des composés $X\lambda O_3.OH$ et $X\lambda_2O_7$ conduit à faire les chloroïdes heptatomiques, ce qui est d'accord avec la formule IO_6H_5 que Rammelsberg (*B.*, X, 232 : *citation de M. Naquet*) attribue à l'ac. perio-

dique. Si Cl est heptatomique, voilà que O, qui se combine avec deux atomes de cet élément dans Cl_2O, se montre maintenant avec une atomicité égale à 14. Mais, si O a une atomicité de 14, les acides chloroïdiques et perchloroïdiques plus haut cités permettent maintenant de porter à sept fois 14 ou 98 l'atomicité des chloroïdes, et on voit à quelles monstruosités, comme *quantùm* et comme variabilité de valences, on arriverait en continuant à raisonner ainsi, sans terme de comparaison précis.

Il ne nous paraît pas difficile de répondre à cette argumentation.

Adressons-nous d'abord à M. Bourgoin. Il a dit, dans son premier Mémoire (*B.*, sept-oct. 68, p. 207, 208) que, pour ne voir électrolyser que SO_6H_6, il fallait prendre de l'acide très étendu, contenant, par ex., de 100 à 250 molécules d'eau; que, si l'on s'adresse à un acide plus concentré, contenant, par ex., « 25 molécules d'eau, on obtient des résultats indi- » quant la coexistence dans la liqueur des deux hydrates » SH_6O_6 et SH_4O_5. » Or, à la p. 434 du 2e semestre 69 du *B.*, M. Bourgoin, — voulant montrer tout le parti qu'on peut tirer de l'électrolyse « pour déterminer la nature des corps qui » préexistent dans les dissolutions, conséquence d'autant plus » importante que la science jusqu'à présent ne possédait aucun » procédé pour aborder la solution de ce difficile problème » (p. 438, à la fin du Mémoire), — M. Bourgoin revient sur l'électrolyse de l'ac. sulfurique; mais il ne dit plus cette fois que l'hydrate analysé varie avec la concentration de la liqueur; ce serait toujours le composé à $3\,H_2O$ qui existerait et pour des solutions comprises entre $SO_4H_2, 4\,H_2O$, et $SO_4H_2, 250\,H_2O$. Ainsi, en 1868, l'acide contenant 25 molécules d'eau contient l'hydrate SO_5H_4; en 1869, il ne le contient plus. On voit que la base expérimentale de l'argumentation de M. Naquet n'est pas très solide.

Mais admettons qu'elle le soit et que l'hydrate SO_6H_6 se présente seul au courant dans tout acide sulfurique contenant assez d'eau pour le constituer. Ce n'est plus à cet hydrate

qu'aura affaire le froid, car, à 4°, nous verrons cristalliser $SO_5\,H_4$. On voit combien les corps en solution varient selon les circonstances et combien l'état liquide est peu propre à nous édifier sur la constitution des corps. C'est, du reste, ce que confirment les recherches de Graham sur la diffusion des sels en solution, car le savant chimiste anglais a vu, dans la diffusion du sulfate de potasse (*Revue des cours sc.,* 11 déc. 69, p. 32, art. de M. Williamson), l'acide sulfurique se séparer de la potasse, celle-ci devenant alors caustique, — ce qui « oblige à » admettre que la solution du sel dans l'eau contient les deux » substances en simple mélange l'une avec l'autre; exactement » comme l'expérience de la diffusion de l'air à travers une paroi » poreuse en argile, qui laisse passer les éléments constituants » en proportions différentes de celles de l'air primitif, prouve que » l'air est un mélange et non une combinaison des deux gaz. » — Et l'on voudrait après cela prendre l'état liquide comme état-type pour la recherche de la constitution des corps! Évidemment, c'est celui des trois qui mérite le moins cet honneur.

L'existence de $SO_6\,H_6$, dit M. Naquet, exige qu'on porte à 6 l'atomicité du soufre. — Mais est-ce d'aujourd'hui que cet hydrate est connu? N'était-il pas démontré, par une contraction de volume en accompagnant la formation, avant les recherches de M. Bourgoin? Ne connaissait-on pas d'une façon plus certaine encore, puisqu'il cristallise, lui, l'hydrate $SO_5\,H_4$? Or, s'il est vrai que $S\,\underline{(OH)'_6}$ exige qu'on considère le soufre comme hexatomique, $\overline{SO''\,(OH)'_4}$ l'exige également. Et pourtant les partisans *restés partisans* des idées modernes se sont contentés et se contentent encore de la diatomicité du soufre : elle leur suffit à expliquer l'anhydride sulfurique et l'acide à 66°; quant aux hydrates de l'acide, ils sont considérés ainsi que le rappelle M. Naquet (*Mon. sc.,* X, 855), comme contenant un surcroît d'eau qui, lui, fonctionne à la manière de l'eau de cristallisation des sels, — c'est-à-dire comme un mélange plutôt que comme une combinaison, comme une partie accessoire plutôt que comme une partie essentielle, comme les pyramides à 6 pans

isocèles qui terminent le quartz plutôt que comme le prisme hexagonal droit qui en constitue le corps (comparaison *ad hoc* de Laurent). Et M. Naquet lui-même se charge du soin de justifier cette ancienne opinion qu'il abandonne aujourd'hui, en rappelant *(loco citato)* qu'on ne connaît aucun sulfate contenant plus de 2 atomes de métal pour 1 de soufre.

M. Naquet, dans l'art. *Acides* du *Dict.* de MM. Wurtz et C[ie], a tracé lui-même, de main de maître, les caractères des acides de diverses atomicités et basicités. Comment, après cela et en présence des dérivés de l'acide sulfurique, cesse-t-il de le considérer comme diatomique bibasique?

M. Naquet lui-même, dans un art. (15 juillet 68) du *Mon. sc.* (X, 630) approuve M. Bourgoin prétendant que les formules rationnelles fondées sur l'action du courant ne répondent à rien; et nous les surprenons ici tous les deux en train de déduire de l'action du courant la formule rationnelle de l'hydrate sulfurique.

Mais admettons que ce soit toujours le même hydrate sulfurique qui se présente au courant (ce qui n'est pas, d'après le premier Mémoire de M. Bourgoin), que ce soit cet hydrate qui se montre à tous les agents intervenant (ce qui n'est pas), que l'état liquide soit le modèle des états pour la recherche de la constitution des corps (ce qui n'est pas), que M. Bourgoin ait découvert les hydrates $SO_5\,H_4$ et $SO_6\,H_6$ (ce qui n'est pas), que ces hydrates représentent des combinaisons chimiques franches et stables (ce qui n'est pas), que les dérivés de l'acide sulfurique soient autres que ceux d'un acide diatomique bibasique (ce qui n'est pas), que l'électrolyse soit une bonne méthode pour arriver à la connaissance de la constitution des corps (ce qui n'est pas), — nous ne serons pas encore désarmés.

— « L'atomicité des corps, — dit M. Naquet, — peut être » déterminée d'après les composés que ces corps forment avec » l'oxygène en faisant celui-ci diatomique. » Oui, elle le *peut*, mais elle ne le *doit* pas, parce que le procédé, s'il réussit parfois (ex. : carbone), conduit plus souvent à des erreurs, erreurs qui sont impossibles quand on s'adresse à des combinaisons du

corps qui est à l'étude avec des corps univalents. — Ainsi, la base rationnelle de l'argumentation de M. Naquet n'est pas plus solide que sa base expérimentale.

Le savant agrégé de la Faculté de Médecine de Paris n'attaque, du reste, en tout ceci, que l'Atomicité. Il reste fidèle à la Notation atomique, car, dans l'article même dont nous combattons les tendances, il fait voir combien il est rationnel, « même en dehors de toute hypothèse » (*Mon. sc.,* X, 854, 855), de prendre, pour quantité réagissante des Oxoïdes et du carbone, le double de l'équivalent de ces corps simples, puisque les composés de ceux-ci contiennent toujours un nombre pair d'équivalents. « Cela revient, dit-il, à réduire une » fraction à sa plus simple expression. »

— 2° Une objection a été faite à un détail de la théorie-Kékulé de la Constitution de la Série grasse : ce détail est celui de l'accentuation électro-positive qui, chez les Acides gras volatils à 2 O, aurait lieu dans l'H restant d'un des méthyles des carbures en *ane,* par le fait de l'intercalation de l'O oxhydrylique et de la substitution subséquente de l'O intràradicaliên. L'objection consiste à rappeler que M. P. Schützenberger a préparé des acétates de chloroïdes, c'est-à-dire des acétates offrant un métalloïde en remplacement de l'H qu'on dit être devenu métallique. — Mais examinons la genèse de ces remarquables composés, et nous verrons qu'il y a une raison pour que les choses se soient passées de la façon indiquée par le savant Directeur adjoint du laboratoire de la Sorbonne. C'est, en effet, par l'action de l'anhydride hypochloreux sur l'anhydride acétique, qu'a été obtenu le premier de ces singuliers acétates :

$$\underbrace{\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO \\ \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{matrix} \Big\} O''}_{\text{2 molécules momentanément unies.}} + \begin{matrix} Cl \\ | \\ O \\ | \\ Cl \end{matrix} = \underbrace{\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO.O\,Cl \end{matrix} + \begin{matrix} CO.O\,Cl \\ | \\ CH_3 \end{matrix}}_{\text{2 molécules, séparées, d'acétate de chlore.}}$$

Or, la tendance qu'ont deux molécules, momentanément unies par un corps diatomique, à se séparer dès qu'il leur est possible de se compléter isolément, a triomphé ici de la *répugnance* qu'avait le chlore à occuper la place de l'H métallique.

— Une autre difficulté a été suscitée à la Théorie des chaînes de carbone, et par M. Wurtz, l'un des plus ardents promoteurs et extenseurs cependant des idées modernes. L'illustre Doyen de la Faculté de Médecine, par l'union directe des $C_n H_{2n}$ avec XλH et par saponification subséquente avec HOAg, a obtenu des *hydrates d'oléfines* ou *pseudalcools*, se distinguant des autres alcools par leur tendance à se dédoubler (par chaleur ou réactifs) en $C_n H_{2n}$ et $H_2 O$, par les produits de leur oxydation qui sont ceux du $C_n H_{2n}$ qu'ils contiennent. Ceux de ces faux alcools qui sont connus ne commencent qu'à la condensation C_4. Or jusqu'ici aucune théorie bien satisfaisante, basée sur les notions d'atomicité, n'a été donnée sur la constitution de ces composés peu stables. — Mais il n'est point difficile d'en imaginer, surtout alors que les composés à expliquer n'appartiennent pas aux premières condensations. Nous en avons hasardé une p. 231 de notre *R. 68*. En voici une autre : On peut admettre que le butylène générateur du premier de ces produits, par ex., est du butylène carbinolique

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ C = CH_2 \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

qui, par XλH, au lieu de donner

$$\begin{array}{l} \quad\;\; CH_3 \\ \quad\;\; | \\ X\lambda C - CH_3 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; CH_3 \end{array}$$

conduisant au carbinol correspondant, fournirait

$$\begin{array}{l} \;\; CH_3 \\ \;\; | \\ HC - CH_2 X\lambda \\ \;\; | \\ \;\; CH_3 \end{array}$$

conduisant peut-être au pseudalcool de la famille. — Le difficile n'est donc pas de faire des théories : les systèmes modernes sont assez souples pour en permettre plusieurs. Le difficile est de les démontrer, et, dans l'espèce, les faits ne permettent pas encore de se prononcer.

Mais, comme il n'y a rien de contraire aux idées nouvelles dans l'existence des hydrates d'oléfines, comme ces composés sont loin d'être *à priori* inexplicables, nous ne voyons pas, pour le moment, qu'ils constituent une objection bien sérieuse aux théories de M. Kékulé.

— Autre objection encore, faite par M. Bourgoin, mais à laquelle cette fois-ci M. Naquet a répondu. (*Mon. sc.*, X, 628 à 630.)

Si, a dit notre adversaire, l'ac. acétique est méthylure de carboxyle alors que l'ac. formique est hydrure du même radical, l'électrolyse du premier fournissant 2 CO_2 et du diméthyle au pôle +, celle du second devrait donner 2 CO_2 et de l'hydrogène libre HH; or elle donne à ce pôle (p. 59 de notre *R. 68*) 1 CO_2 et de l'acide formique. A quoi notre auxiliaire répond qu'il ne s'agit pas là de l'action primordiale du courant (qui est la même pour tous les acides), mais du phénomène secondaire se produisant au pôle + et désigné par M. Bourgoin sous le nom d'*oxydation normale,* et que les produits de cette action secondaire varient suivant les degrés de stabilité des corps qui sont en présence, comme varie l'état de combinaison d'acides et de bases en présence, suivant la fixité ou la volatilité relative des sels possibles.

— Après ces objections de détail, examinons une objection d'ensemble. *Objection* vient du supin d'*objicere* qui veut dire *jeter à la face de, mettre vis à vis, opposer*. Nous pouvons donc considérer comme objection à une théorie une théorie antagoniste.

M. Berthelot a mis des théories à lui en opposition avec celles de M. Kékulé. Ces théories sont : celle des *lacunes moléculaires,* s'appliquant aux composés incomplets et servant à expliquer leur réaction par addition; celle de l'*ordre différent des réactions entre générateurs identiques,* s'appliquant aux composés métamères et servant à les expliquer; celle de la *prédominance d'un générateur sur un autre dans le sein d'un carbure complexe,* s'appliquant spécialement à la Série aromatique.

M. Berthelot avait déjà émis ces vues théoriques en 1867 (*B.,* 1er semestre, p. 310 à 321); il est revenu sur cette question en 1869 (*B.,* 1er semestre, p. 355 à 372). Nous allons donner une idée des opinions du savant chimiste, en les prenant (ce sera bien suffisant) dans le deuxième des mémoires cités et en en faisant deux parts selon qu'elles s'appliquent à la Série grasse ou à la Série aromatique. Pour ne pas avoir deux notations différentes dans cet opuscule, nous nommerons les corps, au lieu de les formuler, toutes les fois que leur représentation symbolique aurait à différer de celle déjà adoptée.

« C'est une circonstance remarquable, » dit M. Berthelot, p. 356, que H « soit toujours éliminé en nombre pair d'équivalents » dans les réactions des carbures d'hydrogène les uns sur les autres, qu'on ne puisse pas par ex. (p. 357) enlever un H au formène (méthane) pour avoir le méthyle et qu'on ait dans ce cas du diméthyle. — Cette circonstance n'est point remarquable pour nous, car elle est forcée quand intervient la notion d'Atomicité.

Page 359, le formène ne peut être associé au formène sans perte de 2 H. — C'est un fait énoncé, mais sans aucune explication : on sait combien la chose est naturelle, au contraire, dans le système de l'Atomicité.

P. 359 encore, les oléfines peuvent fixer 2 H par addition, les carbures acétyléniques en peuvent fixer quatre, ce que l'auteur représente en mettant (—) à la suite de la formule des premières, (—) (—) après celle des seconds. — Encore une énonciation de faits, sans explication. Mais il y a, M. Berthelot en cite lui-même un (hydrure de terpilène) à la page suivante, des carbures de formule incomplète qui réagissent comme des composés saturés; comment expliquer cela avec la théorie des lacunes unique (—), double (—) (—) ou multiple?

P. 364, le propylal serait du propylane oxygéno-substitué, tandis que l'acétone serait du propylène oxygéno-additionné. — Nous ne voyons pas l'accord qui existe entre cette opinion et la genèse de l'un et de l'autre de ces isomères; de plus,

délaissant la notion d'Atomicité (qui nous a déjà si bien expliqué la métamérie de la liqueur des Hollandais et du dichloréthane), nous avouons ne pas comprendre comment du propylane donne des composés différents quand il gagne O en perdant H et quand il gagne O après avoir perdu H.

P. 365, les aldéhydes sont susceptibles d'additions moins étendues « que celles des carbures incomplets, puisque les carbures fixent O_2 et O_4, tandis que les aldéhydes fixent seulement O_2. » — Mais n'est-ce pas répondre à la question par la question même?

Même page, la fixation de 2 O a été réalisée sur les aldéhydes, non sur les acétones. — Encore une affirmation sans explication.

P. 369, M. Berthelot explique les alcools par la substitution de H_2O_2 à H_2 : ce qui est assez particulier, — personne en dehors de lui ne considérant l'eau comme un radical depuis qu'on a abandonné l'ancienne théorie des radicaux en *ène* de MM. Dumas et Polydore Boullay.

Même page, l'auteur explique les isoméries des alcools, dès que les carbures saturés correspondants sont ou peuvent être dualistiques, par l'accomplissement de l'*aquàsubstitution* dans le sein de l'un ou de l'autre des deux carbures élémentaires. Cette aquàsubstitution, s'effectuant sur le groupe formène, lui paraît donner les orthalcools. — D'après cela, le propylane, pouvant être (avec élimination de H_2) immédiatement considéré comme du forméthane, donnera, puisqu'il possède deux groupes différents, deux alcools isomériques, savoir : l'orthopropylol, si l'aquàsubstitution a lieu dans le formène; l'isopropylol, si elle a lieu dans l'éthane ou résidu éthanique. Mais il faudrait alors que la *réaction hydrogénante* (réaction par excès d'eau saturée de IH et chauffée à 275° en tubes scellés) donnât avec eux un mélange de formène et d'éthane; or, elle donne un seul carbure, le propylane, qui est unitaire et qui est aussi l'unique carbure saturé de la condensation propionique.

Si nous ajoutons aux observations précédentes que plusieurs

points sont abordés par l'auteur et abandonnés avant d'avoir été traités à fond, que la théorie des vides ou lacunes nous paraît ne différer guère que par le nom de celle des atomicités non satisfaites, nous aurons établi, croyons-nous, la fréquente abstention de la théorie-en-équivalents de la Série grasse, son état d'infériorité quand elle essaie d'expliquer, sa quasi-identité avec la théorie que nous défendons quand elle réussit à le faire.

— 3° Mais passons à la théorie-en-équivalents de la constitution des corps de la Série aromatique, et puisons-la toujours dans le dernier Mémoire (mai 1869) de M. Berthelot.

Nous avons déjà dit que le savant professeur du Collége de France et de l'École de pharmacie faisait intervenir ici la *prédominance d'un générateur sur un autre* dans le sein d'un carbure complexe. C'est ainsi qu'il explique l'état relativement saturé de la benzine, l'un des acétylènes constitutifs de ce carbure se subordonnant les deux autres, qui ont servi à le saturer, de sorte que le corps résultant de cette saturation *(p. 360)* résiste davantage aux actions qui tendent à opérer des additions ultérieures dans les deux carbures incomplets de deuxième ordre (—) (—) qui ont servi à saturer le premier, ces additions ne pouvant se faire que par l'attaque des carbures subordonnés. — M. Berthelot dit que ses théories expliquent les faits de la science moderne, sans qu'il soit besoin de faire intervenir aucune « hypothèse spéciale » *(pages 356, 362, 372)* sur les atomes ou leurs liens réciproques. Mais n'est-ce pas une hypothèse toute gratuite que d'admettre, pour expliquer des phénomènes, que, dans un carbure complexe, l'un des carbures élémentaires prédomine et se subordonne les autres? Et combien peu vraisemblable est une telle opinion quand il s'agit d'un corps, qui, comme le pivot de l'Orthosérie aromatique, est formé de trois carbures identiques. — M. Berthelot trouve *(p. 360)* son principe (qu'il devrait appeler théorie) de la prédominance d'un générateur plus général dans les applications, plus clair dans le point de départ. Il le trouve plus général dans

les applications, parce qu'il ne croit pas l'hypothèse-Kékulé *(même page)* applicable aux autres séries; mais n'avons-nous pas vu précisément que M. Erlenmeyer a étendu celle-ci à la série naphtalique, MM. Graëbe et Liebermann à la série anthracénique? Il le trouve plus clair dans le point de départ; ici encore, nous ne saurions être de son avis, car nous ne trouvons pas plus de difficulté à comprendre la double chaîne alternative que la subordination d'un carbure intràmoléculaire à un autre.

Mais nous voici à même d'opter définitivement, et éclairés par les lueurs de l'expérience, entre la théorie-Berthelot et la théorie-Kékulé. C'est le toluène qui servira de champ de bataille : il est formène-benzol pour le savant français, méthylbenzol pour le professeur de Bonn. Si la première opinion est vraie, il doit donner 5 dérivés tétrachlorés isomériques, ayant leurs 4 Cl,

l'un entièrement dans le formène,

un 2me dans le formène pour les $\frac{3}{4}$ et dans le benzène pour $\frac{1}{4}$,

un 3me dans le formène pour $\frac{2}{4}$ et dans le benzène pour $\frac{2}{4}$,

un 4me dans le formène pour $\frac{1}{4}$ et dans le benzène pour $\frac{3}{4}$,

le 5me entièrement dans le benzène.

Si c'est, au contraire, la constitution-Kékulé qui est préférable, le toluène ne doit offrir que 4 dérivés tétrachlorés, ayant leurs Cl,

l'un dans le méthyle pour $\frac{3}{4}$ et dans le phényle pour $\frac{1}{4}$,

un 2me dans le méthyle pour $\frac{2}{4}$ et dans le phényle pour $\frac{2}{4}$,

un 3me dans le méthyle pour $\frac{1}{4}$ et dans le phényle pour $\frac{3}{4}$,

le 4me entièrement dans le phényle.

Or MM. Beilstein et Kuhlberg n'ont obtenu, il y a deux ans, que 4 tétrachlorotoluols. Ce n'est pas tout : M. Berthelot

(p. 368) reconnaît, lui aussi, que le chlore fixé sur le plus petit des deux groupes est substituable, alors que celui qui est fixé sur le plus grand résiste. Or, aucun des 4 tétrachlorotoluols de MM. Beilstein et Kuhlberg n'opère la double décomposition par ses 4 Cl (Voir, au besoin, la p. 283 de mon *R.* 68); et je ne connais aucun Mémoire qui me permette de considérer autrement que comme une vue-théorique-par-extension le fait, cité *p. 368* par M. Berthelot, d'un tétrachlorotoluol qui, par l'eau, engendrerait un acide de formule oxybenzoïque.

Nous en resterons là. Les épreuves auxquelles nous avons soumis les théories objectées, comme rivales, à celles qu'on ne peut exposer sans la notation atomique, nous paraissent bien suffisantes pour établir la très grande supériorité de ces dernières.

— Mais on a fait des objections de détail à la Théorie de l'Orthosérie aromatique.

Nous ne mentionnerons que pour mémoire une de celles faites par M. Jungfleisch dans sa thèse de doctorat ès sciences et rappelées par nous *pages 259 et 260 de notre* R. *68.* Elle consiste à dire que la benzine n'est pas un composé saturé, puisqu'elle est susceptible d'addition. Mais personne n'a dit que la benzine fût un corps réagissant toujours à la manière des composés complets; les théories modernes n'appellent les $C_n H_{2n-6}$ que des *Carbures relativement* (et non absolument) *saturés,* et elles expliquent les produits d'addition, encore aromatiques, de la benzine, par la dislocation des doubles-chaînons, et les produits d'addition saturés par la rupture de la chaîne fermée.

A peine M. Kékulé avait-il publié sa Théorie des combinaisons aromatiques que M. Carius venait la battre en brèche en signalant dans les produits d'oxydation de la benzine un composé qu'il prétendait être l'homologue immédiatement inférieur de l'ac. benzoïque, composé dont le sel barytique, par distillation, fournissait, disait-il, l'homologue immédiatement inférieur de la benzine. — Mais, comme on peut le voir par la note imprimée

au bas de la page 391 du t. I du *Dict. de chimie de MM. Wurtz et Cie*, l'existence de ce nouvel acide et de ce nouveau carbure aromatiques est fort douteuse, et M. Carius lui-même n'a pu les reproduire (*B.*, mai 1869, p. 413), de sorte que, — dit N. Naquet, l'auteur de l'article du *Dict.* dont nous avons cité une note, — « la théorie de M. Kékulé demeure intacte, » jusqu'à présent du moins. »

M. Jungfleisch a fait, dans sa thèse, une objection plus sérieuse que celle, venant de lui, que nous avons signalée plus haut. M. Kékulé a dit (*B.*, III, 101) que, selon la théorie, il ne peut exister qu'une pentachlorobenzine, par la même raison qu'il ne peut exister qu'un chlorobenzol : il ne peut exister qu'un chlorobenzol, parce qu'il est indifférent que Cl se fixe sur un point ou sur un autre de la chaîne fermée, tous les H de $C_6 H_6$ étant identiques; par la même raison, si nous supposons une première *substitution inverse* s'effectuant sur le chlorure de Julin, il doit être indifférent que H se fixe sur un point ou sur un autre de la chaîne fermée de ce chlorure, tous les Cl de $C_6 Cl_6$ étant identiques. Or, les travaux de M. Jungfleisch, qui ont le cachet de la plus scrupuleuse exactitude, établissent définitivement l'existence de deux pentachlorobenzines. — Mais on a déjà répondu à cette objection en disant que l'un des quintichlorobenzols est peut-être bien dimère de l'autre, et il est impossible de réfuter péremptoirement cette réponse, la densité de vapeur des deux isomères ne pouvant être déterminée à cause de leur facile décomposition par la chaleur. — Il est vrai qu'à défaut des densités de vapeur, on a les points d'ébullition des benzines pentachlorées, et que ceux-ci sont trop peu éloignés l'un de l'autre pour donner grande probabilité à l'opinion exprimée dans la réponse. Il y a donc là un point faible. — Est-ce une raison de délaisser la vaste synthèse moderne? D'abord, l'objection de M. Jungfleisch n'est pas sans réplique, puisqu'on y répond d'une manière que nous trouvons peu satisfaisante, mais dont on ne peut pas rigoureusement démontrer l'inanité. Et puis, ce qu'on doit demander à une théorie,

ce n'est pas de tout faire comprendre, c'est d'expliquer mieux et plus complètement que les autres; on ne doit pas la délaisser parce qu'elle serait faible sur un point, on ne doit l'abandonner que le jour où une autre se montre ou plus rationnelle, ou plus générale.

CONCLUSIONS.

Les conclusions de ce travail n'étonneront personne.

La notation atomique est plus simple, plus profonde, plus mnémotechnique, plus rationnelle, que l'autre. Elle a donné naissance à des théories qui ont provoqué des masses de travaux. Elle est aussi conforme à l'expérience que la notation en équivalents. Son nom est justifié au point de vue chimique, et peut-être même au point de vue de la constitution philosophique des corps. Elle représente les poids de toutes les espèces chimiques sous le même volume (le volume 2). Elle conserve entre les corps les affinités naturelles qui sont déduites d'autres considérations. Elle est déjà préférée par plus des 4/5 des chimistes. Les théories basées sur elle triomphent de toutes les objections qu'on leur a adressées moins une; et aucun partisan de la notation en équivalents n'a pu leur opposer de système supportant la comparaison.

Nous devons donc voir dans son adoption un progrès important, dans son délaissement une erreur. Nous devons donc pousser à son introduction dans l'enseignement, ainsi que dans les examens officiels : chose déjà faite en Allemagne; chose déjà faite en Angleterre, même dans l'instruction secondaire, ainsi qu'il appert d'un rapport spécial, de M. Perkin (je crois), sur l'état de cette instruction secondaire dans les Iles Britanniques.

Il nous paraîtrait au moins de la plus élémentaire justice qu'on laissât, à cet égard, aux candidats, aux professeurs, la

liberté du choix; que les premiers ne fussent pas arrêtés par leurs juges, les seconds par les Inspecteurs généraux, dans le mode de représentation graphique des corps et des faits.

Ce que nous pouvons affirmer pour notre compte, c'est qu'en dix ou douze jours nous avons fait de candidats à l'École de Strasbourg, grâce aux vues systématiques dont la notation atomique est la condition *sinè quâ non,* des théoriciens remarquables de Chimie organique, se rappelant et s'expliquant plus de faits que nous n'eussions pu leur en inculquer en trois mois par l'application des anciennes méthodes.

Des ouvrages capables de servir, comme guides, dans la voie nouvelle, sont, du reste, déjà publiés. Nous signalerons particulièrement en France :

La 2e édition des *Principes de Chimie fondée sur les théories modernes,* de M. A. Naquet;

Les *Leçons élémentaires de Chimie moderne,* de M. Wurtz.

BIBLIOGRAPHIE PRINCIPALE DU SUJET EN FRANCE :

Ad. Wurtz, *Cours de Philosophie chimique fait au Collège de France,* rédigé par M. F. Papillon et imprimé dans le *Moniteur scientifique* du docteur Quesneville; années 1864 et 1865.

Ed. Grimaux, *Équivalents, Atomes, Molécules;* in-8°, 1865.

Hofmann, *Leçon faite à Londres, en 1866, sur la Force de combinaison des Atomes,* traduite par M. l'abbé Moigno; in-12.

A. Naquet, *De l'Atomicité,* brochure grand in-8°; 1868.

Ad. Wurtz, *Histoire des Doctrines chimiques depuis Lavoisier jusqu'à nos jours,* grand in-8°; 1868.

Dictionnaire de Chimie pure et appliquée, de MM. Wurtz et Cie : articles

Aromatique (Série), par M. A. Naquet;

Atomicité, par M. Ad. Wurtz;

Atomique (Théorie), par M. Ad. Wurtz.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

CONFÉRENCE

SUR

LA THÉORIE DE LA MUSIQUE

faite à la Faculté des Sciences de Bordeaux

le 16 mars 1869

PAR A. BAUDRIMONT.

MESDAMES, MESSIEURS,

Dans cette conférence, mon intention est de vous entretenir de la théorie de la musique. C'est une tâche assez difficile à remplir; beaucoup d'écrits ont paru sur ce sujet, et bien des auteurs sont loin d'être d'accord entre eux et de donner un exemple de l'harmonie dont ils veulent faire connaître les principes.

Musicien dès mon enfance, ayant consacré un temps considérable à l'acoustique et à l'étude anatomique et physiologique de l'oreille qui est l'organe de l'audition, et à celle du larynx qui est l'organe de la voix, j'ai pu faire des observations qui m'ont permis d'apporter, sinon la certitude, au moins quelque lumière là où il n'y avait que doute et contestations.

J'ai pensé que ce sujet pouvait intéresser, non seulement les personnes qui ont étudié la musique comme art, mais aussi celles qui se sont occupées de sa théorie; car j'aurai à leur soumettre quelques aperçus nouveaux.

Si j'avais pu disposer d'un nombre suffisant de séances, j'aurais désiré vous entretenir de l'anatomie de l'oreille dans les diverses classes d'animaux, vous faire connaître les modifications que ce merveilleux organe subit à mesure que l'animal se perfectionne et que d'aquatique il devient aérien, et vous exposer les découvertes récentes, soit anatomiques, soit physiologiques, qui ont permis de préciser les fonctions des différentes parties qui le constituent.

J'aurais aussi désiré joindre à cette première étude celle du

larynx, et signaler à votre attention les expériences remarquables dont il a été l'objet dans la recherche de la production de la voix; mais le temps me manque pour aborder ce sujet, et ce sera pour une autre occasion.

Afin d'assurer nos pas dans l'étude à laquelle nous allons nous livrer, je désire que les faits soient exposés dans un ordre logique déterminé, et qui soit tel que ceux qui seront antérieurs se rattachent à ceux qui les suivront, et servent à les faire comprendre ou à les affirmer, si ce n'est à les démontrer.

Nous verrons d'abord que les sons sont produits par des *mouvements* que l'on nomme *vibrations.*

Que les vibrations sont transmises à l'organe auditif par des milieux, et, pour nous plus spécialement, par l'air dans lequel nous sommes immergés.

Nous verrons ensuite que l'on peut déterminer exactement le nombre des vibrations des corps sonores; que les sons relativement aigus sont produits par un plus grand nombre de vibrations que ceux qui sont plus graves.

Nous en concluerons qu'un son d'une hauteur déterminée étant toujours produit par le même nombre de vibrations, *tous les sons, sans exception, peuvent être représentés par des nombres.*

Je ferai voir ensuite qu'une partie de la gamme diatonique est dans la nature, ou qu'elle est donnée par des instruments d'une simplicité extrême.

Nous verrons qu'elle résulte d'une suite de rapports simples; que plus tard on a complété les rapports connus en ajoutant ceux qui ne peuvent être donnés directement par les instruments dont il vient d'être question, et qu'en se fondant sur les mêmes principes, il deviendra éminemment probable, sinon certain, qu'il manque un son ou une note dans la gamme diatonique de notre époque; que ce son en fait réellement partie; que plusieurs auteurs l'y ont introduit, s'en sont servis; qu'il a même existé dans le plain-chant; et qu'il n'est pas douteux qu'il sera réintégré dans la gamme diatonique dans un avenir prochain.

Je démontrerai par une foule d'exemples et surtout par des chiffres que notre oreille supporte des écarts assez considérables sans s'en trouver offensée, et que c'est à ce fait que l'on doit les dissidences qui existent dans les diverses théories de la musique.

Nous chercherons ensuite à nous faire une idée de la gamme chromatique; nous en étudierons la nature et les conséquences, et nous pourrons rendre compte par des chiffres de l'étude la plus approfondie dont elle ait été l'objet, au point de vue purement musical, dans ces derniers temps.

Enfin je terminerai par quelques observations sur la mélodie, l'harmonie et les modulations.

ÉTUDE DES SONS.

Le son est dû à des vibrations excitées dans un milieu, transmises à l'organe auditif et de là au centre nerveux qui le perçoit.

Dans les conditions ordinaires ce milieu est l'air. Cependant les fluides élastiques en général, les liquides et les solides, peuvent aussi être mis en vibration et transmettre le son avec la même facilité. Soit un arbre abattu et scié perpendiculairement à son axe, à chacune de ses extrémités. Si l'on applique l'oreille sur l'une d'elles et si l'on fait frapper l'autre extrémité, même avec la pointe d'une épingle, on perçoit un son fort net dont l'intensité a lieu d'étonner.

Les agents ou les instruments qui produisent le son sont de divers ordres; les uns sont sonores par eux-mêmes, tels sont, en général, les corps solides qui possèdent une élasticité propre et qui peuvent entrer en vibration par un ébranlement quelconque, comme la plupart des métaux et des pierres.

Les diapasons, les timbres, les sonnettes, les cloches, les triangles musicaux, possèdent cette propriété au plus haut degré.

Il est des corps qui ne deviennent élastiques que par tension, comme les cordes de boyau et de soie, que l'on tend sur les instruments tels que le violon, la harpe, la guitare.

Dans certains instruments, tels que les sifflets, les flûtes, les galoubets, les flageolets, l'air est mis en vibration par un mouvement qui lui est communiqué et par sa propre élasticité. Rencontrant la tranche de l'embouchure contre laquelle il frappe, il est repoussé et fait naître ainsi des vibrations successives qui produisent le son.

Dans la voix humaine, les trompettes, les cors et dans les instruments dont les embouchures sont du même ordre que celles de ces instruments, l'air est mis en vibration par des

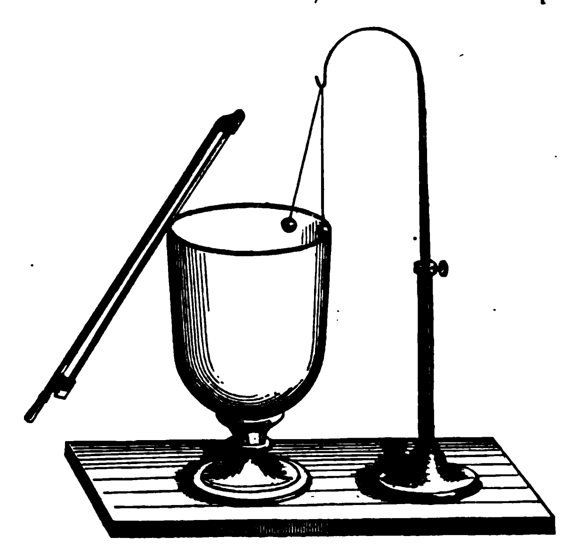
membranes tendues ou par les lèvres, et cet air se meut dans les tubes qui constituent ces instruments comme dans les flûtes.

Les vibrations peuvent être rendues évidentes de plusieurs manières.

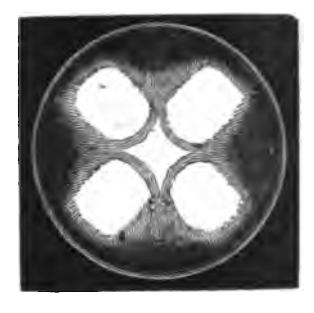
Voici une cloche que l'on fait sonner avec un archet. Si l'on en approche une vis qui vient butter contre elle, on entend une suite de chocs qui prouvent qu'elle vibre.

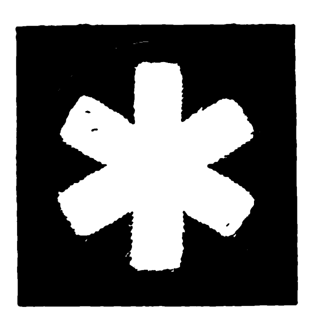


Si au lieu d'une vis c'est un pendule, ou une petite sphère suspendue par un fil, qui est en contact avec ses parois, aussitôt que le timbre est mis en vibration, elle est vivement projetée.



Ce vase de verre contient de l'eau; si on le fait vibrer avec un archet, elle entre en mouvement, présente des sections en nombre pair et peut même être projetée hors du vase.





Si l'on répand une poudre de couleur sur une lame métallique que l'on fait vibrer par le même moyen que les instruments précédents, non seulement la plaque vibre, mais elle présente des lignes qui restent en repos et sur lesquelles la poudre se réunit et dessine ainsi des concamérations.



Voici une corde tendue sur une caisse rectangulaire, si on l'écarte de sa position, et si on l'abandonne à elle-même, elle entre en vibration et la persistance de la vision lui donne l'apparence d'un ruban acuminé à ses extrémités, qui indique l'amplitude des oscillations de la corde.

On ne peut douter que le son est transmis par l'air, puisqu'il va directement du corps sonore à l'oreille. Cependant on peut rendre cette démonstration plus probante par les expériences suivantes : Si l'on produit un son violent, avec un sifflet par exemple, les vibrations qu'il excite dans l'air peuvent être



transmises à une membrane fort mince tendue sur un châssis. Cette membrane étant recouverte de sable teint en bleu, on voit qu'il s'agite, que des lignes nodales se forment et dessinent des concamérations.

Voici, d'une autre part, un timbre renfermé sous une cloche où l'on a fait le vide. Il est mû par un ressort et on peut le mettre en mouvement par une tige qui s'appuie sur une détente. Vous voyez le marteau qui s'agite et l'on n'entend aucun son; cependant, si l'on ouvre ce robinet qui permet à l'air d'entrer dans le récipient, on entend le son qui prend d'autant plus d'intensité que la quantité d'air devient plus grande.



Les vibrations aériennes arrivent ainsi jusqu'à l'oreille. L'oreille est un organe merveilleux qui est disposé de manière à transformer les vibrations aériennes en vibrations opérées dans un liquide qui réagit immédiatement sur le système nerveux et qui transmet le mouvement vibratoire au centre de perception.

Je n'ai point l'intention de décrire l'oreille, je dirai seulement qu'on la divise en trois parties contiguës et successives : l'oreille externe, l'oreille moyenne et l'oreille interne. L'oreille externe est représentée par le *pavillon*, dont la forme est si variée chez les mammifères, et par le *conduit auditif*, qui est un simple canal dont l'ouverture est libre du côté du pavillon, mais qui est fermée à l'extrémité opposée par une membrane que l'on nomme le *tympan*. Cette membrane est mise en vibration par l'air. Pour faciliter ces vibrations, elle est tendue par une chaîne d'osselets fort petits qui aboutit vers son centre. Cette chaîne d'osselets traverse l'oreille moyenne et se termine par une pièce appelée *étrier*, à cause de sa forme, qui s'appuie par sa base sur une membrane dont la face opposée est dans l'oreille interne, et qui transmet directement les vibrations au liquide et aux nerfs qu'elle contient. L'ouverture formée par cette membrane prend le nom de *fenêtre ovale*. Dans l'oreille moyenne est une autre ouverture formée par une membrane qui est désignée sous le nom de *fenêtre ronde*. Cette membrane permet aux vibrations liquides de pouvoir exister dans un espace fermé dont elle rend la capacité variable. Elle fonctionne, en outre, comme une véritable soupape de sûreté, qui ne permet pas aux vibrations trop intenses de léser le système nerveux.

Le son est transmis dans l'air avec une vitesse qui est de 333 mètres par seconde ou d'un kilomètre pour trois secondes, à la température de la glace fondante ou du zéro du thermomètre centigrade. Dans l'eau, la vitesse du son est beaucoup plus grande, elle est de 1435 mètres par seconde.

Dans la transmission du son, la masse de l'air n'est pas déplacée, ce sont simplement les éléments ou les plus petites parties qui le constituent, qui réagissent les unes contre les autres et qui transmettent le mouvement imprimé par le corps sonore. Une vibration pousse en avant les particules de l'air qui sont le plus rapprochées; celles-ci réagissent sur les suivantes, et le mouvement se trouve ainsi transmis jusqu'à une grande distance.

On peut avoir une idée de ce mouvement par l'expérience

suivante : Voici une série de billes suspendues par des fils, de telle manière que leur centre passe par un même axe horizontal. Si l'on écarte de la verticale une des billes de l'extrémité et si on la laisse retomber, le choc est transmis de bille en bille et la dernière est projetée dans le sens du mouvement. Ce qui prouve que la réaction s'est opérée dans toute la série des billes et par leur élasticité, sans qu'elles aient paru se déplacer.

Dans les ondes progressives on observe donc : une partie condensée et une partie dilatée; mais de plus une partie qui n'est ni l'une ni l'autre et qui est située entre elles deux. Partie qui fait naître un moment de repos pour l'oreille. C'est sans doute l'alternative de ces mouvements dont la durée est déterminable par ce repos, qui fait naître en nous la sensation d'un son déterminé. Cependant, il est éminemment probable que la cause de l'audition n'est pas aussi simple que cela, que les ondes qui émanent du lieu d'ébranlement ou des corps sonores sont rencontrées par des ondes produites, soit par le mouvement inverse qui a lieu dans les vibrations des corps sonores, soit par une réaction de l'air sur lui-même, et que c'est alors seulement que le son est produit.

J'ai remarqué depuis longtemps, et ai signalé à l'attention des physiciens, qu'il est impossible de faire claquer un fouet en présence d'une grille. Au lieu du bruit sec que tout le monde connaît, on entend un sifflement prolongé, qui est sans doute dû aux réflexions successives qui ont lieu sur les barreaux des grilles.

Il résulte de ce fait, de la manière la plus évidente, que *le son n'est pas produit seulement par les ondes qui, parties du corps sonore, vont frapper l'oreille, mais par une réaction de la sphère sonore sur elle-même, avant qu'elle atteigne cet organe.*

Le fouet étant dans une condition spéciale et ne faisant vibrer l'air qu'en l'arrachant pour ainsi dire de sa position d'équilibre, et faisant naître un espace vide qu'il vient remplir immédiatement en produisant le bruit qui le caractérise, il est possible que les corps à vibrations continues, par l'alternative de ces mêmes vibrations, produisent les deux mouvements

inverses des *ondes évasives* et des *ondes invasives,* qui sont indispensables à la production du son.

Les particules d'air qui ont été projetées en avant subissent cependant un véritable déplacement qui est au moins égal à l'amplitude de la vibration du corps sonore, et font naître une espèce de condensation qui s'étend et s'avance à mesure que le mouvement se propage avec la vitesse qui vient d'être indiquée.

Cette *condensation* ne peut pas avoir lieu sans qu'il se fasse en arrière du corps sonore une *raréfaction* qui la suit immédiatement, puisque le déplacement en avant laisse un espace moins condensé du côté opposé. Le corps sonore revenant à la position primitive et la dépassant même, refoule les parties dilatées jusqu'à ce qu'arrivé à la moitié de sa course ou à sa position d'équilibre primitif, le fluide qui l'entoure se retrouve tel qu'il était au moment du départ de la partie vibrante; mais bientôt celle-ci dépasse cette position et produit en arrière ce qu'elle avait fait en avant. Il résulte de ce mouvement des ondes alternativement condensées et dilatées qui forment une espèce de sphère sonore qui va en grandissant avec une grande rapidité; mais si grande que soit cette rapidité, elle est saisissable et l'on a pu la mesurer avec assez de facilité.

Cette sphère, qui va sans cesse se dilatant, est produite par des *ondes progressives.*

Si les ondes progressives rencontrent des obstacles, elles sont réfléchies comme l'est la lumière par un miroir.

La rencontre des ondes qui marchent en sens inverse peut faire naître des *interférences* ou des réactions dans des lieux où le son est détruit.

Si l'on fait vibrer un fort timbre avec un archet, et si l'on en augmente le son par une boîte renforçante, ce son peut atteindre un degré d'intensité vraiment assourdissant. Eh bien! ce son, si violent qu'il soit, étant produit dans un espace fermé ou en face d'un plan réfléchissant, ne donne pas moins lieu par la réflexion à des parties entièrement aphones, de telle manière qu'en se plaçant convenablement, on peut entendre le son d'une oreille et n'entendre absolument rien de l'autre oreille,

quand même elle serait tournée vers le corps sonore et n'en serait qu'à une faible distance.



Ces positions dépendant de la longueur des ondes et de leur distance à la paroi réfléchissante, il en résulte qu'elles conservent une position invariable pour un son déterminé. C'est pour cela qu'on les nomme des *ondes fixes.*

Il résulte encore de là que la distance des plans aphones peut donner la mesure de la longueur des ondes sonores.

On établit une relation fort simple entre la longueur des ondes et leur nombre dans l'unité de temps, ou la seconde qui, comme vous le savez, est le soixantième de la minute, et leur vitesse de propagation.

Par exemple, si une ondulation complète a un mètre de longueur, elle parcourra 333 mètres à la température de la glace fondante en une seconde, et il y en aura eu 333 dans le même temps.

D'une manière plus générale, si l'on représente la vitesse du son par V, la longueur de l'onde par L et le nombre des ondes par n, on a cette expression fort simple :

$$V = L\,n$$

qui peut être traduite ainsi :

La vitesse du son est égale au produit de la longueur des ondes par leur nombre, dans l'unité de temps.

Cette formule présente encore ce point de vue général que *le nombre des vibrations sonores est en raison inverse de leur longueur.*

Effectivement, plus les ondes seront longues, moins il en faudra pour égaler la grandeur qui représente la vitesse du son.

De même que, si l'on connaît la longueur d'une onde donnée par un son déterminé, mesurée comme cela vient d'être dit, ou de toute autre manière, et si l'on connaît le nombre de ces ondes ou des vibrations qui les produisent dans l'unité de temps, on en déduit facilement la vitesse du son.

On verra bientôt qu'il est facile de déterminer le nombre des vibrations données par un corps sonore.

On peut donc déterminer la vitesse du son sans avoir recours au canon et sans sortir d'un appartement.

Si au lieu de prendre la longueur totale de l'onde, on n'en prend que la moitié qui correspond à un mouvement simple du corps sonore, soit l'allée ou le retour, et si l'on représente cette demi-longueur par l, on a la formule :

$$V = 2\,l\,n,$$

Dont la relation avec la précédente formule est trop simple pour qu'il soit utile de l'expliquer.

Après avoir vu que le son est produit par des vibrations et avoir étudié les mouvements qu'elles font naître dans l'air, il convient de démontrer que l'on peut déterminer le nombre des vibrations qui caractérisent chaque espèce de son.

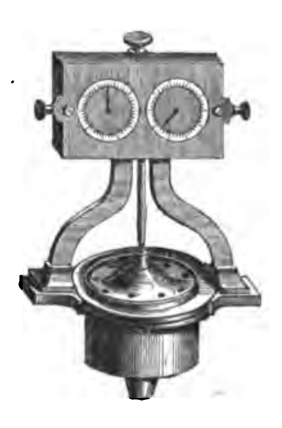
Pour atteindre ce résultat, il existe plusieurs moyens. Je choisirai les principaux et les plus directs.

Voici un petit instrument qui a été inventé par M. Cagnard-Latour. Il porte le nom de *Sirène*, parce qu'il fonctionne dans l'eau aussi bien que dans l'air.

Il est principalement formé d'une petite caisse cylindrique, dont une des bases est percée de trous obliques, disposés en anneau. Au dessus de cette base est situé un disque de même surface, percé d'un égal nombre de trous percés aussi obliquement et dont la direction forme un angle avec ceux de la caisse.

Le disque se meut autour d'un axe qui est dans la continuité de celui de la caisse. Le disque en tournant, réagit sur des roues dentées auxquelles correspondent des cadrans, qui indiquent le nombre de trous qui se sont rencontrés dans un temps donné. Effectivement, le disque, en tournant, fait que les trous se rencontrent. S'il y en a huit, ils se rencontrent huit fois pendant que le disque fait un tour, s'il y en a vingt, ils se rencontrent vingt fois.

Si l'on fait entrer un courant d'air dans la caisse de la *Sirène*, ce fluide tend à s'échapper par les ouvertures percées dans sa base et met le disque en mouvement. A mesure que l'on souffle, la vitesse augmente, et bientôt il se produit un son qui s'élève à mesure que la vitesse de rotation, et par suite le nombre des vibrations, s'accroît. Il suffit de mettre la sirène d'accord avec le son dont on veut connaître le nombre des vibrations, et de voir le nombre des rencontres qui ont eu lieu pendant un temps déterminé pour avoir le nombre des vibrations qui produit ce son.

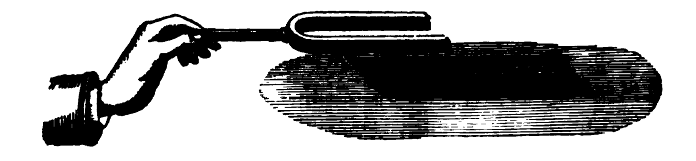


L'appréciation du nombre des vibrations par l'emploi de la sirène peut n'être pas d'une exactitude parfaite, et cela tient à deux causes : la première, que les sons que l'on compare peuvent n'être pas exactement à l'unisson, et, la seconde, parce que le nombre des ouvertures est quelquefois assez grand pour qu'une erreur d'appréciation sur une fraction de tour devienne insensible.

On obvie à ces deux sources d'erreur, 1° en observant le nombre des *battements* qui se font entendre quand on approche de l'unisson, et l'on doit faire en sorte qu'ils aillent en s'éloignant les uns des autres et qu'ils finissent par disparaître; 2° en prolongeant l'expérience pendant un grand nombre de secondes, soit une minute, et divisant le nombre observé par celui des secondes.

On peut obtenir un résultat plus évident encore et dans lequel l'oreille n'est pour rien. Les vibrations ayant lieu par le mouvement du corps sonore, on peut faire qu'elles s'inscrivent sur une surface préparée pour cet usage. M. Duhamel est le premier qui se soit servi de ce procédé pour déterminer le nombre de vibrations. Aujourd'hui M. Marey a inventé plusieurs instruments remarquables qui permettent d'enregistrer tous les mouvements périodiques, ceux du pouls, de la respiration. Voici un appareil qui est principalement formé de deux cylindres, dont les axes sont parallèles et autour desquels est enroulée une bande de papier sans fin. Si l'on noircit ce papier avec de la fumée d'une lampe alimentée par quelque carbure d'hydrogène, le moindre contact laisse une trace apparente à sa surface.

Voici une verge métallique qui est maintenue dans un étau par une de ses extrémités, elle porte une petite tige légère qui touche le papier; si avec un archet, on la fait vibrer dans un plan parallèle à celui du papier et si l'on met celui-ci en mouvement, chaque vibration laisse une trace. L'ensemble des traces, ainsi que vous le voyez, peut être compté. Si le mouvement du papier était plus rapide, les traces seraient plus écartées et plus évidentes. Le même résultat peut être obtenu avec un diapason muni d'une tige indicatrice, que l'on tient dans une main.



L'expérience faite avec la sirène nous a démontré que le son

devenait plus *élevé* ou plus *aigu*, à mesure que le mouvement de rotation du disque s'accélérait, ou, en d'autres termes, à mesure que le nombre des vibrations devenait plus grand.

On peut enfin conclure de ce qui précède, que non seulement on peut compter le nombre des vibrations qui produisent les sons, mais que la *hauteur du son* dépend du nombre des vibrations.

Il en est ainsi d'ailleurs quelle que soit la nature du son.

Enfin nous devons reconnaître que les sons peuvent être représentés d'une manière très précise par les nombres des vibrations qui les produisent.

Nous profiterons de cette condition spéciale pour rechercher l'origine de la gamme diatonique.

Pour simplifier l'étude à laquelle nous allons nous livrer et pour nous renfermer dans les notions qui viennent d'être exposées, nous examinerons d'abord la suite des sons qui peuvent être rendus par des tubes mis en vibration par une embouchure de flûte. Les vibrations aériennes développées dans ces sortes de tuyaux présentent une relation immédiate avec leur longueur.

Voici une série de tuyaux montés sur un sommier ou une espèce de buffet d'orgue. Considérons d'abord le premier, dont la grandeur est double de celle du dernier. Si on les fait résonner d'abord successivement, puis ensemble, on entend deux sons qui se confondent presque l'un dans l'autre, quoique celui qui est donné par le petit soit beaucoup plus aigu. Pour toute oreille un peu exercée, le deuxième tube est à l'octave aiguë du premier.

L'air se comportant de même dans ces deux tubes, quelle que soit d'ailleurs la manière dont il agit, les ondulations produites dans le premier sont une fois plus longues que celles qui s'effectuent dans le second. Or, il résulte de la relation fort simple que nous avons trouvée antérieurement entre la longueur des ondes et leur nombre, que le nombre des vibrations du petit tuyau doit être double de celui du grand tuyau.

Comme nous ne nous occupons nullement du nombre absolu des vibrations qui produisent ce son, mais simplement de leurs

rapports, nous pouvons affirmer que le rapport de ces nombres est de 1 à 2 pour produire l'octave. Il résulte de là que les nombres des vibrations : 32, 64, 128.... représentent des sons à l'octave l'un de l'autre : le second du premier, et le troisième du second.

Si l'on compare les sons de ces quatre tuyaux, on entend qu'ils donnent l'accord parfait avec répétition de la tonique, soit UT, MI, SOL, UT_2, pour fixer les idées. Si l'on prend les rapports de leurs longueurs, on voit qu'elles sont entre elles comme 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Or, le nombre des vibrations étant en raison inverse de la longueur des ondes qui leur correspondent, on peut en conclure que les nombres des vibrations qui les produisent peuvent être représentés par 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ et 2, ou, en les réduisant en nombres entiers : 12, 15, 18 et 24, ou plus simplement encore, 4, 5, 6 et 8, ou toute autre suite de nombres présentant les mêmes rapports.

Les tuyaux que vous venez d'entendre sont ouverts aux deux extrémités ; si l'on bouche l'ouverture supérieure de l'un d'eux, le son sera beaucoup plus grave et une octave plus bas que lorsque le tuyau est ouvert.

Les tuyaux peuvent donc fonctionner dans deux conditions distinctes : ouverts ou fermés.

Étudions d'abord ce qui se passe dans un tuyau ouvert.

Puisque l'on fait baisser le son d'une octave en fermant un tuyau librement ouvert, il est rationel de penser qu'un tuyau fermé, une fois plus court, doit rendre le même son qu'un tube ouvert d'une longueur double; et finalement, qu'en introduisant un piston dans un tuyau ouvert, jusqu'au milieu de sa longueur, le son doit conserver la même hauteur. C'est, en effet, ce qui a sensiblement lieu; cependant, la partie inférieure différant de la supérieure parce qu'elle est *embouchée* par le côté, il en résulte que les longueurs ne sont pas identiques, et l'on voit, en expérimentant, qu'il faut dépasser un peu le milieu du tuyau pour atteindre ce résultat.

Voici un tuyau vitré sur le devant. Cette disposition permet

de voir ce qui se passe dans son intérieur. Si, pendant qu'il résonne, on y introduit une petite membrane tendue sur un cercle maintenu par une tige, et si sur cette membrane on projette un peu de sable bleu, on voit, en l'introduisant dans le tuyau, que le sable est fortement agité, mais qu'à mesure qu'on l'approche du lieu où le piston indiquait que le son était le même que celui du tuyau ouvert, cette agitation diminue, et qu'enfin le sable demeure tout à fait en repos lorsque le disque est arrivé au point indiqué.

Voici un tuyau de flûte ayant trois points latéraux recouverts par une membrane très mince; cette membrane communique au dehors avec une petite caisse terminée par un tube conique et pouvant recevoir du gaz d'éclairage. Si l'on met le feu à ce gaz et si l'on fait en même temps résoner le tuyau, on trouve que la flamme n'a pas changé vers le milieu, mais qu'elle s'est modifiée dans les autres parties.

Il y a donc dans les tubes sonores des endroits où l'air est en mouvement et d'autres où il paraît en repos. Les premiers se nomment *ventres* et les seconds se nomment *nœuds*.

Ce qui se passe dans les tuyaux est tout à fait comparable aux ondes fixes, et ce sont effectivement des ondes fixes produites dans des tubes; seulement, il y a de plus ici la réaction des parois du tube.

Si l'on augmente la vitesse du courant d'air qui alimente le tuyau, le *ton* s'élève tout d'un coup. Si l'on cherche ce qui s'est passé dans ce tuyau, on trouve qu'il s'y est formé deux nœuds au lieu d'un, et qu'ils sont situés chacun à un quart des extrémités du tuyau, de telle manière que la partie comprise entre les deux nœuds a une longueur double de celles des extrémités. Dans ce cas, le son s'est élevé d'une octave.

Si l'on augmente encore la force du courant d'air, le son s'élève subitement, et si l'on cherche le nombre et la situation des nœuds, on trouve qu'il y en a trois et que les longueurs placées entre deux nœuds sont doubles de celles qui sont aux extrémités du tube.

Si le tube est suffisamment long et étroit, il peut subir un plus grand nombre de divisions; c'est ce que l'on observe d'ailleurs dans la trompette et dans le cor.

Le nombre des nœuds augmente toujours de la même manière, d'où il résulte qu'il est successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Entre deux nœuds, il existe un ventre, et l'extrémité libre des tuyaux qui communique le mouvement à l'air est aussi un ventre.

Lorsqu'il n'y a qu'un nœud, il est placé entre deux ventres, qui peuvent être considérés comme le milieu d'ondes fixes qui, par conséquent, *ont la même longueur que le tube.*

Lorsqu'il y a deux nœuds, l'espace qu'ils enserrent a *une longueur égale à celle de la moitié du tube,* et la somme des parties libres représente les mêmes dimensions.

Pour trois nœuds, les concamérations sont égales au tiers de la longueur du tube; pour quatre nœuds, elles en sont le quart, et ainsi de suite. Or, les nombres des vibrations étant en raison inverse des longueurs des ondes, il en résulte que la suite des sons donnés par un tuyau ouvert peut être représentée par la série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Par une suite de raisonnements du même ordre, et sur lesquels il est inutile d'insister, parce que nous n'en ferons aucun usage, la série des sons donnés par un tube fermé est représentée par celle des nombres impairs 1, 3, 5, 7.....

La figure ci-jointe permettra de comprendre comment la colonne d'air est divisée dans les tuyaux sonores par la disposition des nœuds qui sont indiqués par des lignes transversales.



Les sons donnés par un simple tube ouvert, comme le cor de chasse et la trompette, sont déterminés et sont ceux qui, réduits à leur plus grande simplicité, peuvent être représentés par la série naturelle des nombres. On verra dans le tableau ci-joint qu'il faut modifier cette série pour obtenir la gamme diatonique telle qu'elle est adoptée aujourd'hui.

On voit que les sons *fa* et *la* manquent dans la gamme donnée par les tubes ouverts, mais que l'on y trouve le SI ♭, et que les sons représentés par 11 et 13 ne figurent pas dans notre gamme diatonique.

Afin d'avoir les autres sons, on est obligé de modifier l'ouverture du pavillon avec la main, comme lorsque l'on se sert du cor et de la trompette d'harmonie, ou de changer la longueur des tubes. On y parvient de plusieurs manières différentes, et, à cet égard, permettez-moi de vous raconter un fait qui serait perdu pour l'histoire des instruments à vent, si je ne vous en entretenais.

L'ancienne garde royale comptait quatre régiments de cavalerie légère qui tenaient successivement garnison dans les petites villes des environs de Paris : Compiègne, où il y a un palais, aujourd'hui impérial, était l'une d'elles. Les officiers du régiment de hussards étaient généralement riches, et pouvaient rémunérer convenablement des artistes pour constituer leur musique. M. César était le chef de musique des hussards. Il possédait un talent exceptionnel sur le cor d'harmonie. Je l'ai entendu exécuter des concertos qui m'ont rempli d'admiration. M. La Folie était chef de musique des dragons de la garde, et usant de la possibilité de modifier le son de la trompette avec les doigts de la main droite, comme on le fait pour le cor, il était parvenu à posséder un talent remarquable qui pouvait rivaliser avec celui de César. Je l'ai également entendu exécuter des concertos qui étaient véritablement étonnants. Il faisait entendre des gammes, des trils et des cadences, des doubles coups de langue, avec une légèreté comparable à celle qui appartient à la flûte.

Il paraît que César fut jaloux du talent de La Folie; il voulut que chacun pût jouer de la trompette comme lui, et, pour cela, il inventa la ***trompette à clé*** qui a reçu le nom de ***clarine.*** Les

premiers essais en ont été faits à Compiègne avec un instrument de ferblanc.

Cet instrument est abandonné aujourd'hui; le cornet à piston l'a remplacé; mais il a été l'origine de l'ophicléide, qui existe toujours, et dont un des habitants de cette ville joue avec une si grande perfection.

En changeant la longueur du tube résonnant, on lui fait donner tous les sons possibles.

On y est parvenu par des ouvertures latérales ouvertes ou fermées par des clés, par des petits tubes de différentes longueurs que l'on interpose dans le tube principal, comme dans les instruments à *piston*.

On y parvient encore en faisant glisser les tubes l'un dans l'autre, comme dans le *trombone*.

On s'est bientôt aperçu qu'une corde tendue devenait sonore, surtout si elle était en rapport avec une caisse résonnante. On n'a d'abord fait rendre qu'un seul son à chaque corde, comme dans la lyre, dans la harpe et le clavecin, qui a précédé le piano; mais on s'est aperçu que l'on pouvait faire varier la longueur de ces cordes en les comprimant sur une touche avec les doigts, et plusieurs instruments ont été inventés, tels que la cythare, le cistre et le Rébeck, qui a été l'origine du violon et de ses congénères.

On peut aussi changer le son d'une corde en en faisant varier la tension; mais ce moyen, difficile à mettre en pratique, n'a pas été adopté pour la confection des instruments de musique.

Les vibrations des cordes et les sons qu'elles rendent sont soumis à des lois qui ont été étudiées par les physiciens.

On distingue deux espèces de cordes : celles qui sont sonores par elles-mêmes, comme les cordes métalliques des pianos, et celles qui ne deviennent sonores que par tension, comme celles de la harpe, de la guitare, du violon, de la basse, etc.

Une corde non élastique étant donnée, le nombre des vibrations qu'elle rend est *proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend et en raison inverse de sa longueur*.

Dans les instruments, les poids sont remplacés par des chevilles qui permettent de tendre les cordes à volonté et de leur

faire rendre le son que l'on attend d'elles. Cette tension est considérable; aussi arrive-t-il souvent que les chanterelles des violons cassent.

Si l'on diminue la longueur de la partie vibrante de la corde en appuyant dessus avec les doigts, on obtient des sons qui sont d'autant plus aigus que cette partie vibrante est plus courte.

Si l'on en fait vibrer les $\frac{4}{5}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{2}{3}$, la moitié, on obtient des sons qui peuvent être représentés par des nombres qui sont entre eux comme $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ et 2, la corde entière donnant 1.

Ces nombres correspondent à la tonique, à la tierce, à la quarte, à la quinte et à l'octave.

Une corde peut d'ailleurs donner tous les sons possibles compris entre les limites voulues par sa longueur et sa tension d'une part, et le plus petit espace que l'on peut faire vibrer.

Nous nous servirons de cette propriété pour chercher la valeur numérique de la gamme diatonique.

Si l'on compare plusieurs cordes entre elles, on trouve que les sons qu'elles rendent, dans les mêmes circonstances de longueur et de tension, *sont en raison inverse de leur rayon et de la racine carrée de leur densité*. Le nombre des vibrations diminuant quand le diamètre ou le rayon des cordes augmente, on prend des cordes de plus en plus fortes, à mesure que l'on veut obtenir des sons plus graves, et cela d'autant plus, que les cordes minces n'auraient pas une force d'ébranlement assez grande pour faire entrer l'instrument en vibration. Enfin, on augmente la densité des cordes en boyau en les entourant d'un fil métallique, qui les alourdit et diminue considérablement le nombre des vibrations qu'elles donnent sans nuire à la beauté des sons; au contraire, il les rend plus réguliers en masquant les défauts des cordes de boyau.

Si la corde était élastique par elle-même, elle n'aurait pas besoin d'une tension aussi grande que les cordes en boyau pour rendre un son déterminé.

Lorsque l'on fait vibrer une corde d'une certaine longueur, il arrive souvent qu'elle se divise en parties aliquotes, qui vibrent

en même temps qu'elle et font entendre chacune un son particulier qui en représente les harmoniques. Les parties vibrantes peuvent être $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Les vibrations se superposent et ont lieu en même temps.



Une corde qui vibre a presque toujours un nœud au milieu, qui la partage en deux parties vibrantes. Aussi, si l'on applique un archet exactement au milieu, elle ne résone pas; en plaçant l'archet à côté, sur un ventre, ou près d'un ventre, la corde résone.

De même, si l'on veut que la corde se divise, il suffit de placer l'archet près du nœud que l'on veut faire naître, nœud qui se reproduit symétriquement sur toute la longueur de la corde. Les divisions en 2, 4, 6, 8 sont celles qui sont obtenues le plus facilement, parce qu'elles n'entravent pas l'action du nœud médian.

La division de la corde en parties aliquotes conduit naturellement à la production des sons harmoniques.

Si au lieu d'appuyer fortement le doigt sur la corde d'un violon, de manière à lui faire rencontrer la *touche*, ou sur tout autre instrument du même ordre, on ne fait que le poser, pour l'empê-

cher de vibrer, dans l'endroit où il est, il peut arriver deux choses : ou la corde ne résone pas, ou elle rend un son aigu, flûté, agréable, que l'on a comparé au son de l'harmonica formé de lames de verre. Il y a un son rendu lorsque la position du doigt divise la corde en parties aliquotes, telles $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc. Dans ce cas, la corde se divise en autant de parties que la position du doigt permet de le faire, et elle rend un son dont le nombre des vibrations est en raison inverse de la longueur de la partie vibrante. A proprement parler, en opérant ainsi, ce sont les harmoniques seules qui résonent, mais à chaque fois on n'en entend qu'une seule.

Il résulte de ce fait que les sons harmoniques sont beaucoup plus aigus que les sons ordinaires. C'est en se servant de ces sons que M. Bottezini, qui s'est fait entendre plusieurs fois dans Bordeaux, est parvenu à transformer une contrebasse en violon.

Il obtient, en se servant de ce procédé, concurremment avec le procédé ordinaire, tous les sons qui pourraient être donnés par un orchestre complet, depuis les plus graves de la contrebasse jusqu'aux plus aigus de la petite flûte.

En résumé, les cordes, dont on peut faire varier à volonté la longueur de la partie vibrante, peuvent donner tous les sons compris dans l'étendue qui existe depuis le son le plus grave qu'elles peuvent rendre jusqu'au plus aigu. Aussi peut-on sur les instruments à corde *jouer juste* et *jouer faux,* c'est à dire faire entendre des sons qui sont compris dans la gamme ou qui sont en dehors d'elle.

GAMME DIATONIQUE.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on exécute une gamme sur un instrument à corde, il y aura une relation fort simple entre les nombres des vibrations, qui produisent chacun des sons de cette gamme, et les longueurs des parties vibrantes. D'après la loi énoncée, *les nombres des vibrations seront en raison inverse des longueurs des cordes.* On pourra donc passer facilement des longueurs des cordes au nombre des vibrations.

Afin de fixer les idées, et pour donner un nom à chaque son déterminé, nous admettrons les noms des sons de la gamme

en UT. On verra même par la suite que c'est une nécessité, parce que la transposition change souvent la série des rapports numériques qui représentent une gamme diatonique.

Si une corde, vibrant dans toute sa longueur, représente un UT, comme cela peut avoir lieu pour les cordes les plus graves de l'alto et du violoncelle, et si l'on exécute une gamme diatonique simple sur cette corde en partant de cet ut, les longueurs des parties vibrantes sont représentées par les fractions suivantes :

1	2	3	4	5	6	7	8
ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut_2
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Les dénominateurs de ces fractions, ou les chiffres inférieurs, représentent le nombre des divisions de la corde, et les chiffres supérieurs indiquent la longueur de la partie vibrante.

Pour UT, la corde résone à vide, ainsi que cela a été dit; pour RÉ, il y a seulement les huit neuvièmes qui vibrent; pour MI, il n'y en a que les quatre cinquièmes et ainsi de suite. Pour l'octave, il n'y aura que la moitié de la corde qui vibrera. Or, le nombre des vibrations étant en raison inverse des longueurs des cordes, il suffit de renverser les fractions, c'est à dire de faire que le dénominateur devienne le numérateur et que celui-ci devienne le dénominateur pour obtenir ce résultat.

Par exemple, la moitié de la longueur de la corde, exprimée par $\frac{1}{2}$, donnant un nombre double de vibrations, on aurait, en renversant la fraction $\frac{2}{1}$, qui est la même chose que 2, qui exprime réellement le nombre relatif des vibrations.

Si l'on opère ainsi, on a pour exprimer la gamme diatonique par les rapports les plus simples des nombres qui la produisent,

1	2	3	4	5	6	7	8
ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut_2
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Si l'on cherche les rapports qui existent entre l'une de ces fractions et celle qui la suit, on trouve :

1	2	3	4	5	6	7	8
ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut_2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15}$$

On voit qu'il existe trois sortes de rapports : $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ et $\frac{16}{15}$, de telle manière que le rapport de l'*ut* au *ré* n'est pas le même que celui du *ré* au *mi*, etc. Le rapport $\frac{9}{8}$ est dit *ton majeur*, le rapport $\frac{10}{9}$ est le *ton mineur*, et enfin l'intervalle représenté par $\frac{16}{15}$, qui existe entre le *mi* et le *fa* et le *si* et l'*ut*, prend le nom de *demi-ton*.

M. Delezenne de Lille a émis des doutes sur la valeur du premier intervalle. Il a soutenu qu'il devait être représenté par $\frac{10}{9}$ et non par $\frac{9}{8}$. Pour cela, il a fait des expériences sur la contrebasse en opérant sur le *sol*, et il est probable que la gamme, qui a donné $\frac{10}{9}$ pour l'intervalle qui existe entre la tonique et la sus-tonique a été une gamme en SOL. Or, on voit que l'intervalle qui existe entre le SOL et le LA est effectivement représenté par $\frac{10}{9}$. Cela prouve simplement que les intervalles des gammes peuvent varier par la transposition, mais non que l'intervalle $\frac{9}{8}$ doive être changé dans la gamme en UT. L'affirmation de M. Delezenne, quoique fondée sur l'expérience, est donc le résultat d'une fausse appréciation des faits.

La gamme diatonique, quoiqu'exprimée en fractions ordinaires, peut l'être d'une manière qui permet de mieux apprécier

l'accroissement du nombre des vibrations à mesure que le son s'élève. Cette gamme devient alors :

1	2	3	4	5	6	7	8
ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut
1	$1+\frac{1}{8}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{2}{3}$	$1+\frac{7}{8}$	$1+1$ (¹)

Les différentes notations, dont il vient d'être fait usage, sont résumées et comparées dans le tableau suivant :

Gamme diatonique donnée par une corde.

Ordre des sons successifs.....	1	2	3	4	5	6	7	8
Notation vocale..............	ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut
Longueur de la partie vibrante.	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
Nombres relatifs des vibrations..	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Autre expression des nombres...	1	$1+\frac{1}{8}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{2}{3}$	$1+\frac{7}{8}$	$1+1$
Rapports géométriques des sons.	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

Au lieu de représenter les rapports des nombres des vibrations de la gamme diatonique par des fractions, on peut employer des nombres entiers. Cela rend ces rapports plus évidents et permet même d'arriver à certaines considérations d'un ordre spécial, qui ne sont pas sans intérêt et qu'il serait beaucoup plus difficile de saisir sans cela.

La gamme étant représentée par des huitièmes, des tiers, des quarts, des demies, il faut que le nombre qui sera adopté pour représenter la *tonique* soit divisible par 2 , 4 , 3 et 8. Le nombre le plus bas qui possède cette propriété est 24; mais pour des raisons qui sont relatives à l'expression en nombre sentiers de la gamme chromatique dont nous aurons bientôt

(¹) Le signe + veut dire *plus;* il représente l'addition d'un nombre à un autre nombre. 4 + 2 veut dire 4 plus 2, ou 6.

à nous occuper, il faut que ce nombre soit doublé. Nous adopterons donc 48.

La gamme diatonique peut alors être exprimée ainsi qu'il suit :

1	2	3	4	5	6	7	8
ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut_1
48	54	60	64	72	80	90	96

54 est 48 + $\frac{1}{8}$, 60 est 48 + $\frac{1}{4}$, 64 est 48 + $\frac{1}{3}$, 72 est 48 + $\frac{1}{2}$, 80 est 48 + $\frac{2}{3}$, 90 est 48 + $\frac{7}{8}$, enfin 96 est 48 + $\frac{8}{8}$ ou $\frac{4}{4}$ ou $\frac{3}{3}$ ou $\frac{2}{2}$ ou bien 48 + 48.

En arithmétique, on distingue deux sortes de rapports numériques : les *rapports arithmétiques* et les *rapports géométriques*.

Dans les premiers on considère les *différences* des nombres et dans les seconds, leurs *quotients*.

Les rapports arithmétiques 2.4 ; 8.10; 13.15, sont égaux, parce que les différences des nombres qui les représentent sont égales.

Les rapports géométriques 2 : 4 , 5 : 10 , 13 : 26, sont égaux, parce que le deuxième terme divisé par le premier donne invariablement 2.

Les rapports des nombres qui représentent la gamme diatonique sont de l'ordre géométrique, par exemple 2 étant la tonique et 3 étant la quinte, cela veut dire que, quels que soient les nombres qui représenteront une tonique et la quinte qui lui est relative, ils seront toujours dans le rapport de 2 à 3; comme 24 : 36 , 48 : 72 , 870 : 1305.

Une suite de nombres ayant des rapports égaux forment une *progression*.

On distingue aussi deux sortes de progressions : la *progression arithmétique* et la *progression géométrique*.

La première est caractérisée par des différences égales comme la suite des nombres 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12, dont

la différence est toujours 2. La seconde est caractérisée par une suite de rapports géométriques égaux, comme 2 , 4 , 8, 16 , 32 , 64.

On donne le nom de *raison*, soit à la différence, soit au quotient, qui exprime les rapports des nombres qui forment une même série.

La première de ces séries ou la série arithmétique présente ce caractère remarquable, que si à une série on superpose la même série renversée, les sommes des nombres placés les uns au dessus des autres sont toujours les mêmes, comme on le voit dans l'exemple suivant :

2	4	6	8	10
10	8	6	4	2
12	12	12	12	12

La gamme diatonique possède ce caractère singulier que, quoique chacun des nombres qui la représente exprime un rapport géométrique entre lui et la tonique, la suite de ces nombres n'est pas moins en série ou en progression arithmétique, incomplète, il est vrai, mais non moins réelle.

Cette vérité ressort de la manière la plus évidente de la gamme donnée par un instrument représenté par un tube ouvert à chacune de ses extrémités. A partir de 8 cette gamme est :

8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16,

qui sont en progression arithmétique, qui peuvent être représentés par les sons suivants :

ut	ré	mi	×	sol	×	si♭	si	ut_2
8	9	10	11	12	13	14	15	16

Si l'on superpose cette série sur elle-même en renversant l'une d'elles, on obtient le résultat suivant qui est véritablement remarquable :

ut	ré	mi	×	sol	×	si♭	si	ut_2
8	9	10	11	12	13	14	15	16
16	15	14	13	12	11	10	9	8
ut_2	si	si♭	×	sol	×	mi	ré	ut

On trouve que la somme des nombres superposés est partout 24; que le *si* ♭ entre dans cette gamme et se superpose au *mi*; enfin que les deux sons qui tiennent la place du *fa* et du *la* se superposent et s'écartent l'un et l'autre de la gamme reçue qui exige des rapports plus simples pour être exprimée.

Faisons donc la même opération pour la gamme diatonique telle que nous l'admettons et voyons ce qu'elle va nous donner :

ut	ré	mi	fa	sol	la	si ♭	si	ut_2
48	54	60	64	72	80	84	90	96
96	90	84	80	72	64	60	54	48
ut_2	si	si ♭	la	sol	fa	mi	ré	ut

Partout la somme est 144.

Le *si* ♭ entre forcément dans cette gamme et se superpose au *mi*, comme dans la gamme des instruments en tube ouvert aux deux extrémités.

Ne semble-t-il pas résulter de ce fait remarquable que le *si* ♭ doit faire partie de la gamme diatonique? car, si on le supprime, la symétrie qui vient d'être signalée disparaît entièrement.

On verra cependant, dans ce qui va suivre, que cette symétrie se maintient jusque dans la gamme chromatique, quelle qu'elle soit, c'est-à-dire fixe ou variable, et qu'elle offre un avantage considérable par la détermination de la valeur numérique des sons; car, lorsque l'on connaît la valeur numérique d'un des deux sons qui doivent s'équilibrer de chaque côté de la dominante, l'autre en découle immédiatement, comme étant son complément.

Cela peut encore ressortir de la constitution de la gamme mineure, qui est généralement formulée d'une manière variable, car elle n'est pas en montant ce qu'elle pourrait être en descendant : en montant, on reconnaît la nécessité d'y introduire le *si* naturel, qui appelle et détermine l'*ut* tonal; mais, en descendant, on y met le *si* bémol : ce dernier son doit y être aussi bien en montant qu'en descendant, et il n'y a que le *si* naturel qui soit obligatoire en montant.

Le *si* bémol, dans la gamme d'*ut*, existait anciennement dans le plain-chant. On lui donnait le nom de ZA, et le

Dictionnaire de Musique de J.-J. Rousseau en fait mention.

Plusieurs auteurs allemands l'ont fait entrer dans l'harmonie, et M. Loquin en a trouvé plusieurs exemples qu'il a eu l'obligeance de me communiquer. (V. les planches.)

Enfin, le *za,* quoique faisant entrer le facteur 7 dans l'expression de la gamme diatonique, remplit un intervalle numérique qui s'y trouve libre et ne me paraît pas moins devoir en faire partie, sa présence dans cette gamme se trouvant suffisamment justifiée par ce qui précède.

Le *fa* et le *la* se superposent en donnant encore la somme générale 144; si le son 11 est trop haut, celui représenté par 13 est trop bas de la même quantité, et il s'établit ainsi une compensation parfaite.

Veuillez maintenant porter votre attention sur la valeur des *différences* qui existent entre les sons de la gamme diatonique complétée et leur disposition relative :

ut		ré		mi		fa		sol		la		si♭		si		ut_2
48		54		60		64		72		80		84		90		96
	6		6		4		8		8		4		6		6	

Voyez que de chaque côté de la quinte, représentée par 72, soit à gauche, soit à droite, les différences sont disposées de la même manière et présentent une espèce d'équilibre parfait. Aussi cette note spéciale, la *quinte,* a-t-elle à juste titre reçu le nom de *dominante;* elle est la seule qui puisse faire partie de l'accompagnement de toutes les notes, quelles qu'elles soient, et elle entre principalement dans les deux accords fondamentaux du ton d'ut : *ut mi sol* et *sol si ré.* C'est elle que l'on entend constamment dans les morceaux exécutés sur une vielle.

Les demi-tons qui existent entre *mi* et *fa* et entre *si* et *ut*, quoique géométriquement égaux, ne peuvent plus présenter la même égalité au point de vue arithmétique. Le premier correspond à la *différence* entre *la* et *si*♭; le second, contrairement à l'opinion généralement reçue représente un ton entier. Ton divisible, ainsi que je le prouverai bientôt en étudiant la gamme chromatique variable.

Si la série des différences données par la gamme ayant 8 pour

tonique et celle ayant 48, ne paraissent pas suivre la même loi, c'est que, comme on se le rappelle, les sons 11 et 13 ne sont pas justes :

Le premier est baissé d'une certaine quantité, et le second est élevé de la même quantité [1], tandis que la dominante demeure invariable. Entre *ut* et *ré*, entre *ré* et *mi*, les différences sont représentées par 6, si la tonique l'est par 48; mais entre *mi* et *sol* cette différence est 12. Si elle était partagée en deux parties égales et que la même chose fût faite pour les dernières notes de la gamme, les différences seraient les mêmes partout, comme dans la gamme fausse donnée par un tube ouvert.

La gamme diatonique n'a pas toujours été ce qu'elle est aujourd'hui; le *fa* et le *la*, qui ne sont point donnés par des tubes ouverts ne s'y trouvaient d'abord pas. Ceux qui les y ont introduits ne pouvaient se douter que les sons qu'ils avaient choisis ou plutôt que leur oreille leur avait imposés, se prêteraient à la formation de cette série remarquable qui est donnée par la gamme diatonique exprimée numériquement.

On peut se demander si la simplicité de ces rapports ne pourrait être détruite dans le cas où, changeant le nombre qui représente la tonique, tous les autres viendraient à être changés. On peut affirmer que cela ne pourrait arriver; *car les différences croissent comme les facteurs qui servent à les multiplier et elles conservent toujours les mêmes rapports entre elles,* rapports qui, ramenés à la plus grande simplicité possible, seraient toujours représentés par 3 , 3 , 2 , 4 , 4 , 2, 3 et 3.

Quels que soient les signes numériques représentatifs de la gamme diatonique, il importe de remarquer qu'ils sont

(1) Le son 11 est baissé de $\frac{1}{33}$; le son 13 est élevé de $\frac{1}{39}$. *Arithmétiquement :* si le son 11 est représenté par 33 vibrations, il est baissé d'une vibration pour devenir juste, ou $\frac{4}{8}$ de la tonique; et si le son 13 est représenté par 39 vibrations, il est élevé d'une vibration pour devenir juste, ou $\frac{5}{3}$

d'une simplicité extrême. Les dénominateurs des fractions sont une demie, des tiers, des quarts, des huitièmes, disposés symétriquement de part et d'autre de la dominante, représentée par le rapport le plus simple après l'octave. Cette grande simplicité permet de comprendre comment les nombres 11 et 13 donnés par les tubes ouverts ne peuvent entrer dans la gamme diatonique. Ces nombres rapportés à la tonique 8, seraient $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$, rapports trop compliqués pour que notre oreille les accepte et les introduise dans les conceptions musicales, ou au moins dans la gamme diatonique. Nous verrons bientôt que les sons introduits dans la gamme diatonique, soit pour obtenir la gamme chromatique, soit pour permettre des transpositions, s'éloignent de cette grande simplicité, et que c'est pour cela qu'ils offrent tant de doute pour ceux qui veulent en déterminer la valeur exacte.

Dans ce qui va suivre, en abordant plusieurs parties importantes telles que le tempérament et la transposition, j'aurai principalement pour but de démontrer que notre oreille ne recherche pas une précision absolue et qu'elle se contente de sons à peu près justes. C'est ce qui a rendu la théorie des demi-tons difficile à aborder; car, tout en nous donnant la facilité de nous contenter de sons qui approchent de l'exactitude, elle a pu masquer la vérité et la rendre difficile à dévoiler.

Pour ce qui concerne la précision du jeu des instruments, il importe de les distinguer en instruments à sons fixes et en instruments à sons variables à volonté.

Parmi les instruments à vent, le cor de chasse, la trompette, le clairon, le hautbois, le basson, la clarinette, sont à sons fixes; les pianos, les guitares dont le manche est divisé par des sillets, sont aussi à sons fixes.

Le violon et les instruments de même forme, sont à sons variables. La flûte, selon que l'on en couvre plus ou moins l'embouchure avec les lèvres, présente aussi des sons que l'on peut faire varier; mais dans des limites fort étroites et généralement inférieures à un demi-ton.

Nous allons voir ce que l'on entend par le *tempérament* dans l'accord du piano.

On fait d'abord usage d'un *diapason* qui représente le *la* de la seconde corde du violon à vide. Cet instrument, comme vous le voyez, est formé de deux branches presque parallèles qui vibrent ensemble et permettent d'en tirer un son fixe et déterminé.

Vous voudrez bien remarquer en passant que ce son est très faible, mais qu'il devient suffisamment intense si l'on en applique la base sur la caisse d'un instrument, tel que le violon ou la guitare, et au besoin sur une simple table.

Disons en passant que le *la* du diapason actuel est représenté par 870 vibrations en une seconde.

On accorde d'abord le *la* qui correspond en hauteur au son du diapason.

Les octaves sont les intervalles que l'oreille apprécie le plus facilement et que l'on accorde le mieux.

Mais les octaves ne pourraient donner que des *la* à différentes hauteurs.

Après l'octave vient la quinte, que l'oreille apprécie encore avec une grande justesse, c'est elle qui sert pour accorder les violons et les basses : l'intervalle qui existe entre deux cordes voisines étant toujours d'une quinte.

Et, soit dit encore en passant, les trois cordes de la contrebasse, en allant de la plus grave à la plus aiguë, sont *sol, ré, la;* les quatre cordes du violoncelle et de l'alto, prises dans les mêmes conditions, sont *ut, sol, ré, la;* celles du violon sont *sol, ré, la, mi.*

Les quintes successives permettent de passer par toutes les notes de la gamme chromatique, comme il est facile de s'en assurer et par suite de s'en servir pour accorder le piano. En partant du *la*, les quintes sont : *la, mi, si, fa #, ut #, sol #, ré # ou mi ♭, si ♭, fa, ut, sol, ré*, qui a le *la* pour quinte et qui recommencerait la série. En tout douze sons ou douze notes, qui, comme cela vient d'être dit, comprennent toutes celles de la gamme chromatique.

Si nous prenons un nombre faible pour représenter la tonique, afin que les rapports soient plus faciles à saisir, on peut

représenter les résultats donnés par les octaves à ceux donnés par les quintes, et l'on voit qu'ils offrent une différence réelle.

	ut		ut_2			ut_3	mi_3
Deux octaves et une tierce :	16		32			64	80
	ut	sol		$ré_2$	la_2		mi_3
Quatre quintes :	16	24		36	54		81

On voit, par ce tableau, que les octaves ne donnent que 80 vibrations pour représenter le mi_3, et que les quintes en donnent 81. Si les vibrations étaient représentées par d'autres nombres, les différences entre les octaves et les quintes varieraient, mais elles seraient toujours dans le même sens.

Pour remédier à ce défaut qui est inévitable, on est obligé de baisser les quintes ou de les *tempérer*. C'est de là qu'est venu le nom de *tempérament*.

Comme notre oreille supporte le tempérament, on peut en conclure que nous considérons de la musique comme suffisamment juste lorsque, en réalité, elle ne l'est point.

On peut se demander si le piano ne pourrait pas être accordé avec justesse en s'y prenant d'une autre manière. Par exemple, si l'on avait 7 diapasons donnant exactement la gamme en *ut*, ne pourrait-on pas accorder successivement toutes les octaves sur ces diapasons?

Par ce moyen, on n'aurait d'abord que des gammes en *ut*, et les résultats seraient exactement les mêmes que ceux qui viennent d'être indiqués ; seulement, le tempérament, au lieu d'être appliqué d'une manière approximative par une oreille plus ou moins sensible ou plus ou moins exercée, le serait d'une manière beaucoup plus certaine. A la rigueur, il faudrait 12 diapasons représentant une gamme chromatique fixe, complète, pour que ce procédé pût être appliqué.

Un morceau de musique, un chant par exemple, pourrait commencer par tel son que l'on voudrait ; et, à cela près qu'il serait plus haut ou plus bas, il resterait le même, si les nombres des vibrations qui représentent les sons qui le constituent con-

servaient les mêmes rapports entre eux. C'est ce qui a lieu pour un organe comme la voix, qui peut émettre tous les sons possibles; il en serait encore de même pour le violon et les autres instruments à archet en ne jouant pas à vide s'il le fallait; mais cela est absolument impossible pour les instruments dits *à sons fixes.*

Il arrive souvent qu'un morceau de musique est écrit dans un ton trop bas ou trop haut, et qu'il est indispensable d'en élever le ton ou de le baisser. C'est ce que l'on appelle *transposer.*

Si tous les instruments pouvaient émettre tous les sons possibles, depuis le plus grave jusqu'au plus élevé, qu'ils peuvent rendre, et si les sons qui constituent un chant conservaient entre eux les mêmes rapports numériques, le chant resterait le même, à cela près de l'impression qui résulterait de la différence de hauteur du ton. La voix et les instruments à archet sont dans ce cas [1]; mais presque tous les instruments de musique sont *à sons fixes,* et le chant ne peut commencer que par l'un des sons qu'ils peuvent rendre et ne peut être par conséquent exécuté qu'avec des sons déterminés.

Il reste à savoir si les intervalles demeurent les mêmes. On a déjà vu que, pour une simple gamme diatonique, les intervalles d'une note à une autre ne sont pas égaux, qu'on les exprime par des rapports géométriques ou arithmétiques (V. p. 302 et 307). Or, on comprend immédiatement qu'indépendamment de la hauteur du ton, le caractère de la musique sera changé. C'est là un fait sur lequel les musiciens n'ont pas apporté une attention suffisante. Ils se servent de tel ou tel ton comme

(1) A la condition pour ces instruments que l'on n'emploiera pas les cordes *à vide,* qui sont accordées par quintes. C'est ce qui fait que les musiciens qui ont l'oreille sensible n'emploient presque jamais les cordes à vide, excepté celle qui rend le son le plus grave, *ut* pour le violoncelle et l'alto, *sol* pour la contre-basse et le violon, parce qu'il est impossible de les obtenir d'aucune autre manière. Il faut encore reconnaître que le son des cordes à vide diffère de celui des cordes qui sont pressées par les doigts; que le son en est plus clair, et qu'il introduit dans le *chant* une modification qui peut n'être pas agréable, ou au moins qui dissocie les sons du chant en leur donnant un éclat différent.

Le doigt, moins dur et plus large que le sillet, agit comme un étouffoir, et *doit probablement diminuer le nombre des sons* HARMONIQUES *de la corde.*

produisant tel ou tel autre effet; mais ils ne se rendent pas compte de la cause des sensations qu'ils éprouvent ou font éprouver à leurs auditeurs.

On verra bientôt, en étudiant la gamme chromatique, que la transposition change les rapports numériques de sons qui la constituent. Or, comme tous les sons de la musique sont tirés de cette gamme, il en résulte que la transposition altère notablement la valeur relative des sons, et que cela a même lieu lorsque l'on ne considère que les différences arithmétiques qui existent entre eux; car ces différences varient, et le point de départ de leur variation change, comme on le verra dans le tableau qui représente la gamme chromatique à sons fixes exprimée dans tous les tons.

Indépendamment du tempérament et de la transposition, beaucoup de faits concourent encore à démontrer que notre organisation nous permet de supporter des écarts dans la formation des sons, telle est, par exemple, l'impossibilité pour un musicien, si exercé qu'il soit, de jouer juste avec un instrument à corde et à archet. Cela ne peut avoir lieu que lorsqu'il soutient les sons et qu'il a le temps de leur donner la véritable expression numérique qui leur convient. Un résultat tout à fait faux est obtenu lorsque l'on fait varier la longueur d'une flûte pour l'accorder avec un autre instrument ou un orchestre, même lorsque la variation de longueur est opérée sur plusieurs points, comme l'a fait Tulou, dans les instruments qui ont été construits sous sa direction. On peut ajouter encore que le diapason actuel, fixant le *la normal* par 870 vibrations, il est impossible que toutes les autres notes de la gamme diatonique soient représentées par des nombres entiers, tels sont le *Ré*, le *Mi*, le *Za* et le *Si*.

Depuis quelques années on a introduit dans les orgues, et même dans les forts accordéons, ce que l'on appelle des *voix célestes*. Ces voix célestes sont simplement des sons qui, au lieu d'être à l'unisson, sont à un quart de ton les uns des autres. Non-seulement l'oreille s'en accommode fort bien; mais elle les trouve très agréables : ils produisent un effet qui

charme nos sens et cela d'autant plus qu'ils diffèrent de tout ce que l'on avait entendu jusque-là. *Il arrivera un jour que, rejetant la plupart des prescriptions que l'on croit indispensables à une bonne musique, on introduira des dissonances qui paraîtraient impossibles aujourd'hui; on passera brusquement d'un ton à un autre sans aucune espèce de transition, et l'on obtiendra des effets nouveaux qui feront naître en nous des sensations jusqu'alors inconnues, qui seront par cela même acceptées.*

Occupons-nous maintenant de la gamme chromatique. Mais qu'est-ce d'abord qu'une gamme chromatique? C'est une gamme diatonique dans laquelle on a intercalé 5 sons qui lui sont étrangers. Ce qui fait en tout 12 sons dans une octave, sans répétition de la tonique; car cette répétition en porterait le nombre à 13. Dans cette gamme, pour ceux qui ne l'ont pas étudiée suffisamment, il existe une suite de 12 demi-tons que l'on considère comme égaux. Mais le sont-ils réellement? La seule inspection de la gamme diatonique, exprimée en nombres suffit pour affirmer qu'ils ne le sont pas : les intervalles de la gamme diatonique, en négligeant les demi-tons qu'elle renferme, ne sont pas égaux; or, si on les partage en deux, les moitiés des uns ne peuvent être égales aux moitiés des autres.

L'origine de la gamme diatonique, que nous savons être l'expression d'une suite de rapports simples, nous permet-elle d'admettre qu'entre ces rapports peuvent être intercalés de nouveaux rapports aussi simples qu'eux? Evidemment non ([1]). Et l'examen auquel nous allons nous livrer le démontrera.

Les sons émis par la voix humaine ne laissent point de traces. Si l'homme n'avait pas eu d'autre moyen d'exprimer une pensée musicale, il est possible que le besoin d'une gamme chromatique ne se fût pas fait sentir, mais il lui a suffi de posséder un instrument à corde, comme le violon, pour que la gamme chromatique fût devenue une nécessité.

([1]) Cependant, quelques exceptions pourraient être faites, principalement pour la *tierce mineure* établie sur la tonique : elle peut être représentée par $\frac{6}{5}$.

Si l'on exécute une gamme diatonique en partant du ***sol*** ou de la note la plus grave du violon, il est naturel de se demander si une gamme semblable peut être exécutée en partant du ***la*** ou de la seconde note, située immédiatement au dessus de la précédente. On voit que cela est facile; mais en continuant ainsi on voit aussi que les doigts se déplacent et n'occupent pas toujours la même position que dans la première gamme, pour exprimer une note qui porte le même nom. On peut exécuter ainsi 7 gammes commençant successivement par ***sol, la, si, ut, ré, mi, fa,*** qui introduisent 5 nouveaux sons dans la gamme, sons qui, unis à ceux de la gamme diatonique, suffisent pour produire la gamme chromatique. On peut voir ensuite que, si l'on commençait de nouvelles gammes par les demi-tons ainsi trouvés, les douze sons suffiraient pour les produire toutes.

On peut se demander si les cinq demi-tons de la gamme chromatique sont toujours identiques et s'ils ne sont pas appelés à varier selon les circonstances. Cette question peut paraître ardue, déplaire même, cependant on va voir que l'on a le droit de la poser; car les musiciens sont loin d'être d'accord sur ce sujet. Si la théorie de la formation de la gamme diatonique est vraie; si la simplicité des rapports numériques des sons qui la forment sont, comme on n'en peut douter, la base sur laquelle elle repose, la simplicité des numérateurs ne permet pas qu'on les y introduise de nouveau. Ce n'est donc qu'avec d'autres numérateurs que cela peut avoir lieu. Les sons qui complètent la gamme diatonique en la transformant en gamme chromatique, ne peuvent par conséquent présenter la simplicité, ni la fixité des autres sons.

Les instruments à sons fixes, comme le piano, ne peuvent avoir, ou au moins n'ont eu jusqu'à ce jour qu'un demi-ton fixe partageant chaque ton entier, si l'on excepte toutefois quelques instruments construits selon certaines idées préconçues, telle que celle de partager la gamme en quarts de tons; instruments qui s'écartent des principes ordinaires et qui n'ont pas été adoptés.

Il est facile de constituer la gamme chromatique à sons fixes. Il n'en est point de même lorsque l'on cherche une gamme

qui, dans un chant lent et expressif, représente la pensée de l'auteur ou de l'exécutant.

Voici la gamme chromatique à sons fixes, telle qu'elle découle naturellement du partage des intervalles existant entre les notes de la gamme diatonique. On a toujours des nombres entiers si l'on prend 48 pour exprimer la tonique.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1_1
ut	×	ré	×	mi	fa	×	sol	×	la	si♭	si	ut_1
48	51	54	57	60	64	68	72	76	80	84	90	96
1	$\frac{17}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	2
1	$1+\frac{1}{16}$	$1+\frac{1}{8}$	$1+\frac{3}{16}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{5}{12}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{7}{12}$	$1+\frac{2}{3}$	$1+\frac{3}{4}$	$1+\frac{7}{8}$	1+1

Le tableau n° 1 donne une gamme chromatique transposée dans tous les tons, à sons fixes ou à sons invariables exprimés en nombres, en rapports géométriques et en rapports arithmétiques. Ces derniers le sont de deux manières différentes : 1° réduits à leur plus grande simplicité; 2° réduits à un même dénominateur.

La première colonne verticale à gauche indique les noms des tons. Chaque ton commence par une des notes inscrites dans la gamme en *ut* en suivant l'ordre des intervalles de demi-tons et en allant de la plus grave à la plus élevée.

Les chiffres qui sont au haut du tableau représentent l'ordre des sons qui est le même pour tous les tons.

Les forts chiffres indiquent les notes de la gamme diatonique; les autres, les demi-tons. On a donc les relations suivantes pour le ton d'*ut* :

1	3	5	6	8	10	11	12	1_1
ut	ré	mi	fa	sol	la	si♭	si	ut_1

La cinquième colonne verticale comprend les tierces ou plutôt les *médiantes*, la huitième comprend toutes les quintes ou plutôt les dominantes, etc.

On voit, à l'inspection de ce tableau, et ce fait est très remarquable, que les fractions ordinaires qui représentent les

rapports géométriques des sons entre eux, varient incessamment, tandis que les rapports arithmétiques indiquent des différences constantes, qui s'élèvent tout d'un coup pour continuer encore à demeurer constantes. On voit, par exemple, que les dénominateurs ne diffèrent les uns des autres que par des quantités égales qui se modifient; car, lorsque le nombre des vibrations augmente, il est alors indispensable qu'elles prennent de l'accroissement. Les différences ne font d'ailleurs que répéter celles que l'on observe entre les nombres adoptés pour exprimer la suite des sons de la gamme, elles varient en même temps que ces dernières, et elles leur seraient absolument égales si l'on prenait pour dénominateur le nombre exprimant la tonique de chaque ton.

Ne doit-on pas voir dans ces faits une preuve de plus que notre organisation apprécie plus nettement les rapports des sons au point de vue des différences, qu'à celui des rapports géométriques?

La symétrie que nous avons trouvée dans la gamme de part et d'autre de la dominante indiquerait qu'il manque deux sons dans la gamme chromatique fixe : un entre le onzième et le douzième; l'autre entre le douzième et la répétition de la tonique à l'octave. Ce dernier son est la septième augmentée de Berbiguier.

On voit encore à l'inspection de ce tableau:

1° Que la sus-tonique est représentée par $\frac{9}{8}$ en UT, en FA, en LA; qu'elle l'est par $\frac{10}{9}$ en RÉ et en SOL. Qu'elle l'est par d'autres rapports qui s'en rapprochent plus ou moins dans les sept tons restants.

2° Que la médiante n'est représentée par $\frac{5}{4}$ que dans les tons d'UT, de FA et de SOL;

3° Que la *sous-dominante* n'est représentée par $\frac{4}{3}$ qu'en UT, en RÉ, en MI et en SI;

4° Que la dominante qui semblerait devoir toujours être représentée par un même rapport, et par celui de $\frac{3}{2}$, ne l'est

cependant qu'en UT, en MI, en FA, en SOL ♭, en SOL, en LA ♭ et en LA.

Il résulte donc de l'examen de la *transposition*, comme cela est résulté de l'étude du *tempérament*, que notre oreille se contente de rapports qui sont loin d'être toujours les mêmes, et qui sont cependant employés avec la pensée de représenter la même chose.

Cette différence ne peut pas être attribuée seulement à ce que les nombres dont je me suis servi pour exprimer les intervalles chromatiques ne seraient pas convenables; car la gamme diatonique seule, qui ne peut exciter le moindre doute, suffit pour donner une partie des différences observées. Nous avons dejà vu que la sus-tonique n'est pas à l'égard de la tonique, ce que sont la sus-tonique à l'égard de la médiante, et la dominante à l'égard de la sus-dominante, et nous nous sommes servi de ce dernier exemple pour expliquer comment M. Delezenne avait pu affirmer que l'intervalle entre la tonique et la sus-tonique devait être exprimée par $\frac{10}{9}$ au lieu de $\frac{9}{8}$.

Le principe de la symétrie qui préside à la formation de la gamme diatonique et qui nous a conduit à dire qu'il était indispensable d'y introduire la sus-dominante haussée ou la sensible diminuée, nous conduirait aussi à reconnaître qu'il manque deux sons dans la gamme chromatique; mais cette fois deux sons qui ne se trouvent dans aucune gamme et qu'il faudrait créer. Ces sons seraient situés entre le onzième et le douzième et entre ce dernier et la répétition de la tonique. Ces sons pourraient être représentés ainsi qu'il suit :

si ♭ +	si +
87	93
$\frac{29}{16}$	$\frac{31}{16}$
$1+\frac{13}{16}$	$1+\frac{15}{16}$

Est-ce à dire que ces sons existent réellement et qu'il est

utile de les introduire dans la gamme? Je vais vous prouver par l'exécution et par votre oreille même qui les acceptera avec plaisir, qu'ils existent, et qu'un artiste doit savoir s'en servir au besoin. Mais il est inutile de les introduire dans la gamme à notes suivies, et s'ils peuvent servir pour la transposition, comme des septièmes augmentées ou plutôt comme des sous-toniques, je le répète, il ne faut pas les faire entrer dans une suite de sons; les compositeurs au moins ne l'ont point fait jusqu'à ce jour. Ils ne sont pas notés; mais les exécutants les comprennent et s'en servent au besoin, souvent sans le savoir; car je ne doute pas que la plupart des musiciens n'en ignorent l'existence.

Dans le premier quart du siècle où nous vivons, un musicien nommé Berbiguier a publié une méthode de flûte éminemment remarquable.

On trouve dans cette méthode un article considérable sur les *notes sensibles altérées*. Cet article se réduit à dire que *toutes les fois qu'une note est baissée d'un demi-ton pour y revenir ensuite, la note baissée doit être plus élevée que celle qui se trouve dans la gamme ordinaire*. Ces notes ne peuvent être *tenues;* mais, employées convenablement, elles ont un charme inexprimable et sont infiniment supérieures à la note soutenable qui est plus basse.

A l'aide de cette flûte, je pourrai vous faire sentir la différence qui existe réellement entre la note ordinaire et la même note altérée ou plus élevée.

J'ai transcrit quelques mesures d'un morceau pris dans la méthode de Berbiguier pour que les musiciens puissent s'assurer du fait par eux-mêmes. *(V. les planches à la fin de cette Conférence.)*

La gamme chromatique à sons fixes pourrait être exprimée par quelques rapports plus simples que les plus compliqués qui s'y trouvent, et les principes qui ont servi pour établir la gamme diatonique, conduisent à voir si, après les dénominateurs 2, 3, 4, 8, 16, on ne pourrait en intercaler d'un nouvel ordre, par exemple le dénominateur 5, qui est le plus simple après 4.

On trouve ainsi que les rapports $\frac{19}{16}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{29}{16}$, qui ne paraissent pas très faciles à saisir, peuvent être représentés par $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ et $\frac{9}{5}$, qui satisfont parfaitement à la règle qui préside à la symétrie de la gamme ; c'est à dire que $\frac{6}{5}$ plus $\frac{9}{5}$ valent $\frac{15}{5}$ ou trois entiers, qu'il en est de même de $\frac{7}{5}$ et de $\frac{8}{5}$ et de tout le reste de la gamme (1).

Les sons représentés par $\frac{17}{16}$ et $\frac{31}{16}$ ne nous offrent point des rapports aussi simples, ni aussi faciles à apprécier, cependant on les saisit encore parce qu'ils sont très rapprochés de 1 et de 2, le premier en plus et le second en moins.

Le rapport $\frac{6}{5}$ a été reconnu et admis par les musiciens qui s'occupent de la théorie de la musique et on le regarde généralement comme représentant la tierce mineure relative à la tonique. Cela nous conduit forcément à adopter $\frac{9}{5}$ pour représenter le son éventuel qui est compris entre le *za* et le *si*. Le *fa*♯ ou *sol*♭ $\frac{7}{5}$, nous donne immédiatement le *sol*♯ ou *la*♭ $\frac{8}{5}$. De même enfin que le rapport $\frac{17}{16}$ nous conduit à adopter le rap-

(1) Si l'on compare entre eux les rapports : $\frac{19}{16}$ et $\frac{6}{5}$, $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$, $\frac{19}{12}$ et $\frac{8}{5}$, $\frac{29}{16}$ et $\frac{9}{5}$, on trouve qu'ils diffèrent effectivement fort peu, et d'une quantité à peine saisissable par l'oreille. Il suffit pour cela de les réduire au même dénominateur. On trouve alors les rapports suivants :

On a pour équivalents de $\frac{19}{16}$ et $\frac{6}{5}$ $\frac{95}{80}$ et $\frac{96}{80}$, qui ne diffèrent que de $\frac{1}{80}$.

$\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$ donnent $\frac{85}{60}$ et $\frac{84}{60}$, qui ne diffèrent que d'un soixantième, ou d'une vibration sur 60.

$\frac{19}{12}$ et $\frac{8}{5}$, qui correspondent à $\frac{95}{60}$ et $\frac{96}{60}$, qui sont dans le même cas.

Et enfin $\frac{29}{16}$ et $\frac{9}{5}$, qui donnent $\frac{145}{80}$ et $\frac{144}{80}$, qui, comme dans le premier cas, auquel ils correspondent, ne diffèrent que d'un quatre-vingtième.

port $\frac{31}{16}$ pour représenter la sensible altérée de Berbiguier.

Voilà, Messieurs, un aperçu de ce qu'est la gamme chromatique à sons fixes. Ce que nous avons dit de la sensible altérée qui peut se reproduire au dessous de tous les tons entiers d'une gamme, et qui peut même en remplacer les demi-tons, nous a démontré par le sens de l'ouïe qui domine tout ce qui est relatif à la musique, car c'est par là seulement que nous pouvons l'entendre et la comprendre, que les demi-tons fixes sont loin de représenter la pensée intime de l'être inspiré, soit par la composition, soit par l'exécution.

Ce que nous avons pu déduire du tempérament et de la transposition, qui nous ont démontré de la manière la plus évidente que nous acceptons comme justes des sons qui se rapprochent seulement de la simplicité qui devrait les caractériser, nous conduit à admettre qu'il peut exister une gamme chromatique qui diffère de celle à sons fixes donnée par le piano ou par l'orgue.

Des musiciens théoriciens ont admis qu'il suffisait d'élever un ton dans le rapport de 24 à 25 pour produire un demi-ton, ou de baisser un ton dans le rapport de 25 à 24 pour produire le même intervalle en descendant. Cette assertion est vraie jusqu'à un certain point pour obtenir un des intervalles compris entre la tonique *ut* le ton suivant *ré;* mais elle est fausse lorsqu'elle s'applique à d'autres intervalles qui sont exprimés par des rapports différents, par exemple même aux intervalles de demi-ton qui existent dans la gamme diatonique naturelle; car les intervalles sont de $\frac{16}{15}$ et non de $\frac{25}{24}$.

Il y a encore à se demander si l'on n'a point confondu le ♯ avec le ♭ et *vice versa.*

Le DIÈZE, pour tous ceux qui l'ont défini, sert pour exprimer un demi-ton au dessus d'une note ou d'un son quelconque. Le BÉMOL, au contraire, sert pour diminuer le son d'un demi-ton, de telle manière, comme le savent d'ailleurs ceux qui possèdent la moindre notion de musique, que le *mi* ♯ est le *fa* naturel, et que le *fa* ♭ est le *mi* naturel; cela soit dit pour des instruments à sons fixes.

Il reste à savoir maintenant, par exemple, si *ut* ♯ est plus bas que *ré* ♭ ou s'il est plus haut, par exemple en représentant *ut* par 24, et *ré* par 27, si *ut* ♯ sera 25 ou 26 et si *ré* ♭ sera 26 ou 25.

Quand on élève un son d'un demi-ton, ce son appelant le son qui le suit immédiatement dans le même ordre de marche, cet appel n'ayant lieu que parce que le son élevé ne satisfait pas l'oreille qui demande un repos, ou un degré de la gamme facile à déterminer pour elle, comme le sont tous les intervalles de la gamme diatonique, il est probable que le *dièze* est plus élevé que le *bémol,* qu'il est dans le premier intervalle, immédiatement au dessus de la tonique, représenté par $\frac{26}{24}$ ou $\frac{13}{12}$, tandis que le bémol doit l'être par $\frac{25}{24}$, appelant la note située au dessous de lui.

L'intervalle suivant, compris entre le *ré* et le *mi,* pourrait être divisé de la même manière et donnerait *ré* ♯ $\frac{29}{24}$, tandis que *mi* ♭ serait $\frac{28}{24}$ ou $\frac{7}{6}$.

Entre le *fa*, et le *sol,* ainsi qu'entre le *sol* et le *la,* il existe des intervalles égaux, plus grands que les précédents, si on les considère au point de vue *arithmétique* et non géométrique. Ces intervalles sont égaux et parfaitement divisibles chacun en deux parties présentant un repos suffisant : $\frac{17}{12}$ et $\frac{19}{12}$ ou $\frac{7}{5}$ et $\frac{8}{5}$, qui, comme cela a été dit précédemment, peuvent leur être substituées.

Entre ces deux tons et les tons fixes de la gamme diatonique, ou peut aussi intercaler d'autres demi-tons, dont l'existence est rendue indispensable dans le cas où ils fonctionnent comme la 7[me] augmentée de Berbiguier.

Enfin la symétrie trouvée jusqu'à ce moment entre les deux parties de la gamme situées de chaque côté de la dominante exigerait que l'on intercalât à la fin de cette dernière partie encore quatre sons représentés par $\frac{43}{24}$, $\frac{44}{24}$ ou $\frac{11}{6}$, $\frac{46}{24}$ ou $\frac{23}{12}$ et $\frac{47}{24}$. Ces sons sont utilisables, et sont indispensables à l'exécu-

tion, même à la transposition; mais ils ne rentrent pas dans une gamme exécutée en émettant successivement les sons qui la constituent, soit en montant, soit én descendant, au moins pour la musique actuelle; car la musique de l'avenir les comprendra infailliblement.

En résumé le tableau n° 2 donne la gamme chromatique à sons fixes combinée avec celle à sons mobiles, représentée en nombres et en rapports géométriques; c'est à dire en fractions ordinaires.

Cette gamme peut paraître compliquée; car elle contient 28 sons distincts dans une seule octave, sans y comprendre la répétition de la tonique. Cependant elle est vraie et elle représente la musique telle qu'elle est pour le penseur et l'exécutant. La théorie fondamentale des intervalles musicaux me paraît aujourd'hui assez avancée pour ne laisser aucun doute à cet égard.

Qu'on exécute les diapasons qui la représentent, que l'on fasse un piano qui lui corresponde, ou plutôt un orgue dont les sons peuvent être soutenus, et l'on verra que ce nouvel instrument présentera des ressources inépuisables et pour le compositeur et pour l'exécutant ([1]).

Un instrument fondé sur des quarts de tons n'a aucune raison d'être et ne pourrait amener qu'une confusion inexprimable et dans l'exécution et dans la composition. Il éloignerait de la réalité; tandis que l'instrument fondé sur les principes qui viennent d'être indiqués, serait le véritable représentant de l'organisation humaine.

Si l'on ne veut point tenter l'effort que je viens de signaler à l'attention des hommes qui recherchent la perfection en toutes choses, il est une idée intermédiaire qui permettrait d'apporter une grande simplicité, non seulement dans la construction des

([1]) Pour réaliser cet instrument, que l'on fasse toutes les touches égales, plus étroites que celles du piano actuel, arrondies à la partie supérieure; que l'on teigne les touches représentant la gamme primitive avec des couleurs déterminées, et le résultat pourra être facilement atteint. — Un piano ordinaire dont on diminuerait le nombre des octaves, sans rien changer à celui des notes, pourrait être accordé selon les principes de la gamme chromatique de 28 sons.

instruments à sons fixes; mais même dans la notation de la musique. On aurait plus de facilité dans l'exécution, et il n'y aurait plus la moindre difficulté pour la transposition; mais le temps ne me permet pas de vous entretenir de cette pensée, ce sera pour une autre occasion.

Un habitant de Bordeaux, M. Anatole Loquin, qui a publié plusieurs travaux remarquables sur la théorie de la musique, est parvenu par la seule force de la pensée, à trouver que la gamme chromatique contenait 17 sons au lieu de 12 que l'on admet habituellement.

M. Loquin a surtout remarqué que certaines notes en appelaient d'autres, à tel point qu'elles se modifieraient sensiblement jusqu'à ce qu'elles les eussent atteintes.

Les notes fixes seraient principalement celles de la gamme diatonique, plus la médiante mineure, la sus-dominante mineure et le *za*. Soit en ut : *ut, ré, mi*♭, *mi, fa, sol, la*♭, *la, si*♭ et *si*. Notes qui correspondent aux gammes des tons majeurs et mineurs, réunies les unes aux autres.

Les notes variables seraient *ut*♯ et *ré*♭, *ré*♯, *fa*♯, *sol*♭, *sol*♯ et *la*♯.

Cela conduit à admettre qu'une gamme comprend les sons suivants :

Ut, ut♯, *ré*♭, *ré*, *ré*♯, *mi*♭, *mi*, *fa*, *fa*♯, *sol*♭, *sol*, *sol*♯, *la*♭, *la*, *la*♯, *za* et *si*.

Selon M. Loquin, la gamme chromatique ne possède réellement que 12 sons; mais suivant les circonstances, les intervalles de demi-tons se trouvent élevés ou baissés, et par conséquent différents de ceux qui constituent la gamme chromatique fixe.

La découverte de Berbiguier, ainsi que nous venons de le signaler, découverte consacrée par l'expérience, démontre qu'après la sensible ordinaire, il manque au moins un son, très attirable par la note supérieure, ou la tonique répétée à l'octave.

Le tableau suivant représente le résultat obtenu par M. Loquin.

TABLEAU GÉNÉRAL DE LA TONALITÉ MODERNE

SELON M. LOQUIN.

GAMME DIATONIQUE.	Gamme chromatique.	DEGRÉS DU TON MODERNE.	Numéros des degrés.	Attraction (1)
1 Tonique............	1	....	1	0
	2	Tonique haussée...........	2	B
		Sus-tonique baissée........	3	H
2 Sus-tonique.........	3	....	4	0
	4	Sus-tonique haussée........	5	B
		Médiante mineure..........	6	0
3 Médiante...........	5	....	7	0
4 Sous-dominante......	6	....	8	0
	7	Sous-dominante haussée.....	9	B
		Dominante baissée.........	10	H
5 Dominante..........	8	....	11	0
	9	Dominante haussée..... ...	12	B
		Sus-dominante mineure.....	13	0
6 Sus-dominante.......	10	....	14	0
	11	Sus-dominante haussée.....	15	B
		Sensible dure..............	16	0
7 Sensible............	12	....	17	0

(1) 0 veut dire sans attraction; B, attirée par en bas, c'est à dire par le son plus grave qui s'en rapproche le plus; H, attirée par en haut, ou par le son aigu le plus prochain.

Le tableau de la gamme générale (nº 2) comprend tous les sons relatifs à la musique. Ces sons étant produits par des vibrations, les vibrations pouvant être notées par les nombres qui les caractérisent, *ce tableau présente ce qui est et ce qui sera.* A moins de rechercher des intervalles presque insaisissables et par conséquent d'un effet nul dans la musique, on est contraint de reconnaître qu'il ne peut y avoir rien de bien important en dehors de lui. Or, il découle de l'examen de ce tableau : 1º qu'il y aurait des sons dits sans attraction, mais que nous devons cependant considérer comme des sons *attirants*, comme des centres vers lesquels convergent les sons voisins, comme la gamme tout entière converge autour de la tonique, et 2º que les sons *attirants* sont les sons de la gamme diatonique en y comprenant la *médiante mineure,* la *sous-dominante mineure,* et la *sensible dure* qui est le *za,* dont M. Loquin a reconnu la fixité par la toute-puissance de son organisation. Or, cette note appartient à la gamme diatonique. Il n'y a donc plus que la sixième et la treizième notes de la tonalité complète de M. Loquin qui échapperaient à cette règle. Or, l'examen du tableau de la gamme générale démontre que les deux sons qu'elles représentent peuvent tour à tour remplir des fonctions déterminées et différentes, qu'ils deviennent *sons fixes* dans des circonstances données; mais que dans la gamme générale, ils ne diffèrent en rien des autres demi-tons variables de la gamme chromatique et qu'ils peuvent être attirés comme ces derniers.

Examinons cette nouvelle idée qui vient de surgir : Des notes ou plutôt des sons attirés les uns par les autres. Évidemment deux sons isolés ne produiraient point cette attraction; mais si l'oreille a reconnu que l'un d'eux fait partie d'une gamme diatonique, elle reconnaît que l'autre est attiré vers un des sons de cette gamme : *Vers les sons dont les vibrations sont représentées par des rapports simples.*

En d'autres termes, ces notes sont formées par des rapports compliqués, mais très rapprochés de ceux de la gamme diatonique. C'est ce qui fait que l'oreille appelle le *son fixe*, et que le *son variable* tend réellement à s'identifier avec lui.

C'est pour cette raison que, dans la gamme chromatique complète, j'ai considéré l'*ut* ♯ comme étant plus élevé que le ré ♭. Cet *ut* ♯ appelle le *ré*, il le fait désirer, comme un repos dont on comprend l'existence et que tout chanteur saura trouver et exécuter à la première lecture d'un morceau (¹).

Si le compositeur passait à une autre note que celle qui est appelée, il produirait une véritable surprise, et c'est ce qui se présente quelquefois.

L'idée d'attraction fait naître celle de répulsion. Si, partant de cette idée, on cherchait les sons *qui se repoussent,* on arriverait à reconnaître que certains sons ne peuvent être introduits dans un chant ou dans l'harmonie sans que nous ne les considérions comme faux et en dehors du ton dans lequel on les aurait placés.

Il semble résulter de ce qui vient d'être exposé que, pour qu'un morceau conservât le caractère diatonique dans lequel il est écrit, il faudrait que les intervalles chromatiques ou de demi-tons fussent des dièzes en montant et des bémols en descendant, pourvu toutefois qu'ils fussent suivis de la note qui les appelle, comme dans une gamme chromatique, par exemple; mais il paraît aussi convenable de les représenter par les demi-tons fixes dans le cas contraire. D'OU LA NÉCESSITÉ DE REPRÉSENTER CHAQUE DEMI-TON PAR TROIS SONS DISTINCTS (²).

(¹) Ce résultat découle des définitions du *dièze* et du *bémol :* le premier sert pour *élever le son,* et le second pour *le baisser*. En élevant le son, on marche nécessairement vers un son plus élevé, et ce son attire le dièze, qui sert pour monter. En descendant, c'est la même chose qui a lieu, en sens inverse, pour le *bémol*. Il résulte forcément de ces définitions que, dans la gamme à sons variables le dièze est plus haut que le bémol qui lui correspond. L'un et l'autre sont représentés par un seul et même son dans la gamme chromatique fixe.

(²) Les trois sons variables des demi-tons chromatiques pourraient être notés ainsi : ♭ intervalle le plus grave, + intervalle médiant ou fixe, ♯ intervalle le plus élevé. Par exemple, entre UT et RÉ, on aurait : UT, *ré* ♭, *ut* +, *ut* ♯ et RÉ.

MÉLODIE

Ce que je viens de vous exposer serait bien incomplet, si je ne terminais cette séance par quelques considérations sur la mélodie, l'harmonie et la modulation.

Le peu de temps dont je puis disposer ne me permettra pas de développer ces sujets d'un ordre si élevé; mais je m'efforcerai de vous en présenter les points principaux.

La mélodie est le chant simple formé d'une suite de sons tels qu'ils sont donnés par l'inspiration. L'harmonie est représentée par un ensemble de sons simultanés, qui offrent entre eux des rapports déterminés, généralement simples, mais très variables.

L'effet produit sur notre organisation dépend de plusieurs causes, parmi lesquelles il importe de placer d'abord les qualités générales du son, telles que sa hauteur, son intensité, son timbre, reconnues et étudiées par les physiciens; mais pour la musique, il importe d'y ajouter la *durée* et l'*expression*, et, de plus, des qualités qui dépendent des rapports qu'ils ont entre eux, mais qui les caractérisent les uns à l'égard des autres, d'une manière toute spéciale. C'est ce que nous verrons bientôt en traitant de l'harmonie.

Quant à la succession des sons, elle dépend entièrement de l'*inspiration* ou de l'*invention*, si l'on peut employer cette expression.

Quelques instruments ne rendent qu'un seul son comme les caisses en général et les cymbales. Ceux-là, à part leur timbre spécial, ne peuvent donner que ce qui est relatif à la durée et à l'intensité du son ou, plus encore, au temps qui sépare les sons émis, puisque les sons donnés par ces instruments ne sont pas soutenables.

La durée des sons se rattache à la mesure et au rhythme que l'on emploie pour diviser les chants, mesure et rhythme qui les caractérisent tout autant que le chant considéré comme une suite d'intervalles musicaux peut le faire.

L'intensité permet encore d'obtenir des effets remarquables; mais la chose la plus difficile à obtenir, celle qui peut à peine être indiquée par les compositeurs, c'est l'*expression*. Elle

dépend du plus ou moins de sensibilité de l'exécutant. En dehors de la pureté des sons et de la netteté de l'exécution, elle produit des effets considérables. C'est elle qui fait qu'en général on éprouve tant de plaisir à entendre un *concerto*, quel que soit l'instrument sur lequel il est exécuté. Car celui qui ose se permettre d'en jouer un en public, comprend sa propre force et se trouve pour ainsi dire identifié avec l'instrument dont il fait usage.

En réduisant à des considérations mécaniques ce qui vient d'être dit, on trouve que l'on fait intervenir dans un chant le nombre relatif des vibrations qui produisent les sons sucessifs. Le temps de leur durée relative est le plus ou moins d'amplitude des vibrations qui les produisent. L'*expression* ne peut jusqu'à ce jour être rendue par des considérations de cet ordre. Certainement les éléments qui précèdent sont ceux sur lesquels elle s'appuie; mais elle a le caractère singulier qui excite notre attention, notre sympathie, notre enthousiasme, par les sensations inexprimables qu'elle fait naître en nous, par ces sons qui, ayant frappé notre oreille, semblent se distribuer dans tout notre être et en faire vibrer les parties les plus intimes.

La durée d'un chant se trouve divisée en parties égales que l'on nomme *mesures*. Les mesures sont elles-mêmes divisées en *temps*.

Les principaux diviseurs de la mesure sont 2 et 3. Quand le chant est fort lent et quand la mesure a une durée assez considérable, elle est divisée en 4.

Enfin, l'auteur de la *Dame Blanche* nous a donné un exemple de mesures alternatives de 2 et de 3 temps qui représentent une mesure plus longue à 5 temps, dans le morceau : *Déjà la nuit s'avance.*

Nous ne confondrons pas le *rhythme* avec la *mesure*. Cette dernière est formée d'intervalles de temps égaux; le rhythme correspond à la division des temps qui caractérisent un chant par leur durée. Pour avoir une idée du rhythme, tel que je le comprends, il suffit d'exécuter un chant avec un tambour : la variété des sons disparaît et le rhythme reste seul.

Le rhythme a une expression toute spéciale qui, s'ajoutant à celle des sons multiples de la musique, produit les plus grandes variétés et les plus grandes oppositions qui puissent caracté-

riser certaines pièces de musique. Il est surtout sensible dans la musique destinée à la danse.

On a distingué plusieurs sortes de chants ou de musique, selon les intervalles qui dominent dans un chant et qui existent entre les notes successives qui le constituent. On a ainsi trois genres principaux : 1° l'*enharmonique*, comme celui qui caractérise certaines tyroliennes; 2° le *diatonique* qui serait principalement caractérisé par une suite de sons de la gamme diatonique proprement dite, comme l'air de Richard Cœur-de-Lion. *(Une fièvre brûlante)*, et 3° enfin le genre *chromatique*, qui serait caractérisé par des intervalles de demi-tons. On aurait pu ajouter le genre *modulé* qui se ferait remarquer par de fréquents changements de tons.

Ces genres ne peuvent exister d'une manière absolue; car il arrive souvent que différentes sortes d'intervalles sont employés dans un chant si simple qu'il soit, et parce qu'enfin un auteur ne peut s'astreindre à se servir uniquement d'une seule espèce d'intervalles ou à le faire dominer dans un chant. C'est l'inspiration qui le guide et nul ne peut prévoir ce qu'elle peut donner.

Quoi qu'il en soit, il n'y a pas moins des morceaux de musique dans lesquels un des genres précédents domine. En exposant ces faits je désirais arriver à cette conclusion : *que, quel que soit un chant, les intervalles qui le caractérisent, et qui en général commencent avec les temps principaux marqués par le rhythme, sont ceux-là même qui représentent les notes harmoniques qui pourraient l'accompagner.*

En d'autres termes, la suite des sons qui représentent le chant, est formée par des intervalles qui doivent se trouver dans l'harmonie ou dans l'accompagnement du chant représentant l'harmonie.

Si ces notes harmoniques ne représentent point l'accord entier, elles en représentent une partie qui suffit pour le caractériser.

C'est ainsi que l'on peut, à la simple lecture d'un chant, comprendre les accords qui en formeraient l'accompagnement; mais, hors de là, celui qui entend un chant en sent facile-

ment la basse et peut le chanter; s'il est plus exercé, il comprend l'accompagnement tout entier et pourrait l'écrire.

On peut s'appuyer sur ces faits, non seulement pour trouver l'accompagnement qui convient à un chant, mais pour *varier* ce chant sans sortir du cadre dans lequel il a été conçu. Chaque note principale peut être représentée par ses harmoniques exprimées par trois ou quatre notes, soit en triolets ou en doubles croches. Ces notes peuvent être simplement répétées en diminuant la durée de chacune d'elles : on peut les représenter par des espèces de triolets faisant sentir la note sensible altérée. Pour une flûte seule, sur laquelle on possède une grande facilité d'exécution, un chant élevé peut être altéré avec quelques notes de la basse ou l'inverse, c'est à dire un chant grave avec quelques notes élevées, simples, *sensibilisées*, pardonnez-moi cette expression, ou cadensées. Tous ces modes peuvent être mêlés. Il en résulte une suite considérable de *variations*. C'est là le *contre-point fleuri*, la *fioriture* des Italiens, mot qui, en français, est plus souvent pris en mauvaise part qu'autrement.

En un mot les VARIATIONS *sont représentées par les notes principales d'un chant autour desquelles le musicien* FREDONNE *selon sa fantaisie.*

Toutes ces modifications de la musique sont d'un ordre véritablement inférieur: elles sont purement mécaniques et ne représentent rien de ce qui se rattache à l'inspiration, ou à l'invention qui est l'origine de toutes ces combinaisons qui dérivent d'ailleurs du chant primitif ou de la base sur laquelle elles reposent.

Mon intention a été uniquement de vous faire remarquer qu'un chant simple porte avec lui son harmonie et toutes les variations qui peuvent en découler.

Toutes ces modifications, toutes ces *fioritures*, peuvent permettre à un artiste de manifester son talent d'exécution; mais, malgré leur richesse et l'abondance des notes qui les constituent, elles ne peuvent produire en nous aucune de ces sensations si profondes, qui dérivent de l'audition d'un chant simple et bien conçu qui est l'expression réelle d'une pensée nette et profondément sentie.

HARMONIE

Il me reste à vous dire quelques mots de l'harmonie, sans laquelle le système que j'ai eu l'honneur de vous exposer demeurerait tout à fait incomplet.

Il ne suffit pas de posséder une gamme, il faut savoir s'en servir et pour exprimer un chant et pour exposer l'ensemble des sons qui peuvent être émis simultanément en produisant sur nous un effet agréable.

De même qu'il y a une véritable loi qui préside à la détermination de la suite des sons de la gamme, que cette suite est fondée sur la simplicité des rapports numériques des vibrations qui les représentent, de même il doit y avoir une loi qui préside à l'émission simultanée de plusieurs sons, loi sans laquelle le concours de ces sons pourrait n'être rien autre chose qu'un bruit désagréable.

Lorsqu'un corps sonore résonne, il n'est pas rare qu'il fasse entendre plusieurs sons à la fois. Cette simultanéité des sons est due aux divisions que le corps sonore éprouve et qui vibrent en se superposant, ainsi que cela a été dit en parlant des cordes.

Admettons qu'il soit effectivement question d'une corde; elle se divisera en 2, en 3, en 4 et même en 5, et fera entendre non seulement le son fondamental qu'elle peut donner, mais les sons plus aigus qui correspondent à ces divisions. Les nombres des vibrations étant en raison inverse des longueurs des cordes, il en résultera qu'aux vibrations données par corde entière, à la $\frac{1}{2}$, au $\frac{1}{3}$, au $\frac{1}{4}$ et au $\frac{1}{5}$ de cette corde, correspondront des vibrations dont les rapports numériques seront exprimés par 1 , 2 , 3 , 4 et 5. Or, ces nombres représentent dans le ton d'UT : *ut*, ut_1, sol_1, ut_2, et mi_2; ainsi que nous l'avons déjà vu lorsqu'il a été question des sons successifs donnés par un tube ouvert aux deux extrémités.

En réduisant ces sons à une même octave, ils deviennent

ut, mi, sol, et, avec répétition de l'octave, *ut, mi, sol, ut₁*. Ces sons peuvent être entendus simultanément; ils s'unissent parfaitement ensemble et forment ce que l'on appelle *l'accord parfait*. Exprimés en fractions ordinaires, ils deviennent, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$ et 2, ou $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ et $\frac{8}{4}$, qui indiquent que ces sons, ou plutôt les nombres des vibrations qui les représentent, forment une progression arithmétique incomplète, représentée par 4, 5, 6 et 8. Cette progression pourrait être complétée en y introduisant le *si* ♭ ou le *za*; mais il produirait un effet désagréable. Non que l'on ne puisse faire entendre simultanément les sons représentés par 5, 6 et 7, soit *mi*, *sol*, *si* ♭, qui, comme cela doit être, produisent un effet spécial et distinct de celui produit par l'accord parfait, puisqu'il n'est pas représenté par la même suite de rapports; attendu que dans le premier cas, cette suite est 4, 5, 6, tandis que dans le second, elle est 5, 6 et 7.

Pour ne point employer un langage qui serait vague pour bien des personnes, et qui, après tout, nous ferait sortir de la réalité, nous supposerons toujours que ce qui sera dit, s'appliquera au ton d'*ut*. Chaque note de ce ton peut porter un accord de l'ordre de celui qui vient d'être indiqué, ainsi que Gretry l'a démontré dans sa *méthode pour apprendre à préluder avec toutes les ressources de l'harmonie;* mais il y a cependant trois accords principaux, qui ont pour premières notes : *ut*, *sol* et *fa*, et qui nous donnent : *ut, mi, sol; sol, si, ré* et *fa, la, ut*.

Ces trois accords comprennent toutes les notes de la gamme diatonique et suffisent pour accompagner tel chant que l'on voudra, qui ne sortirait point d'une gamme de cette nature dans un ton donné.

On remarquera, en outre, que l'accord parfait principal contient la tonique et la dominante, que le second contient cette dernière, et que le troisième ne comprend que la tonique. Ces deux sons : la tonique et la dominante, les relient entre eux et les rapportent au ton d'*ut*, non qu'ils ne puissent servir pour en sortir.

Cherchons maintenant l'expression numérique de ces trois

accords. En admettant que la tonique *ut* soit représentée par 48 vibrations, nous aurons ce qui suit :

sol	72	diff. 12	ré	108	diff. 18	ut	96	diff. 16
mi	60		si	90		la	80	
ut	48	diff. 12	sol	72	diff. 18	fa	64	diff. 16

Or, quoique ces sons soient pris dans les notes d'une gamme accidentée, c'est à dire, formée par des intervalles inégaux, ils ne se présentent pas moins dans la même condition : *les différences entre les notes d'un même accord sont parfaitement égales.* Pour le premier accord, la différence est 12; pour le second, elle est 18, et, pour le troisième, elle est 16.

De plus, les nombres qui appartiennent à chacun de ces accords sont exactement entre eux, comme 4, 5 et 6. Le premier comme 4 fois 12, 5 fois 12 et 6 fois 12; le second comme 4 fois 18, 5 fois 18 et 6 fois 18, et enfin, le dernier, comme 16 successivement multiplié par 4, 5 et 6.

Si dans ces accords on répétait la note la plus grave, elle donnerait ut_2, sol_2 et fa_2; cette dernière serait pour les trois accords : 96, 144 et 128.

Or, il est facile de remarquer qu'entre la note la plus élevée de chaque accord et la répétition de la note la plus grave, il y a *juste le double de la différence observée dans la même série*, soit 24 pour le premier accord, 36 pour le second et 32 pour le troisième. Note représentée par 8, à la fin de la série simplifiée 4, 5, 6 et 8. Si l'on voulait remplir l'intervalle compris entre la troisième et la quatrième note, on tomberait sur le *za* comme cela vient d'être dit.

Voilà donc l'origine et la nature réelle de l'accord parfait majeur : il est représenté par des vibrations dont les nombres sont entre eux comme 4, 5, 6 et 8, et il y en a trois possibles dans une gamme diatonique simple, sans l'altérer en aucune manière. Ces accords, ainsi qu'on l'a vu, sont établis sur la que, la sous-dominante et la dominante.

Maintenant, sans sortir de la gamme diatonique du ton UT, si l'on cherche les accords que l'on peut établir sur les quatre notes restantes de cette gamme, il sera facile de voir que ces accords

ne sont plus les mêmes, que les intervalles sont inégaux, qu'ils ne peuvent plus être représentés par cette série si simple qui caractérise l'accord parfait, et qu'il n'en est même que deux sur quatre, ou la moitié, qui soient on peut dire identiques, à cela près de la hauteur de la note dans le ton auquel ils appartiennent. C'est ce que l'on verra dans les tableaux qui suivent.

Ne pouvant entrer dans tous les détails relatifs à l'harmonie, je me bornerai à présenter trois tableaux qui offrent à vos regards :

1° Les accords de tierce et de quinte avec la première note répétée à l'octave, donnés par la gamme diatonique en *ut;*

2° Les mêmes accords dans le ton d'*ut* mineur;

3° Enfin les accords dits de dominante, représentés par quatre notes distinctes au lieu de trois.

Chaque accord des deux derniers tableaux comprend la sensible èt la sensible dure. Il est bien entendu qu'une seule de ces notes doit entrer dans l'accord, et qu'elles n'ont été réunies que pour ne pas trop augmenter le nombre des tableaux.

I

Accords établis sur la gamme en ut *majeur.*

1

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ut$_2$	96	8	2
Sol	72	6	1
Mi	60	5	1
Ut	48	4	

2

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ré$_2$	104	54	14
La	80	40	8
Fa	64	32	5
Ré	54	27	

3

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Mi$_2$	120	20	5
Si	90	15	3
Sol	72	12	2
Mi	60	10	

4

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Fa$_2$	128	8	2
Ut$_2$	96	6	1
La	80	5	1
Fa	64	4	

5

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Sol$_2$	144	8	2
Ré$_2$	108	6	1
Si	90	5	1
Sol	72	4	

6

	Nombres.	Rapports.	Différences.
La$_2$	160	20	5
Mi$_2$	120	15	3
Ut$_2$	96	12	2
La	80	10	

7

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Si ♭$_2$	168	42	10
Fa$_2$	128	32	5
Ré$_2$	108	27	6
Si ♭	84	21	

8

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Si$_2$	180	90	26
Fa$_2$	128	64	10
Ré$_2$	108	54	9
Si	90	45	

La première colonne des nombres est établie avec ceux qui ont été adoptés pour représenter les diverses gammes, en admettant que la tonique ou *ut* est représentée par 48 vibrations.

La seconde colonne représente ces nombres ramenés à des rapports aussi simples que possible; la troisième en représente les différences.

II

*Accords établis sur la gamme d'*ut *mineur.*

1

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ut_2	96	32	8
Sol	72	24	5
Mi ♭	57	19	3
Ut	48	16	

2

	Nombres.	Rapports.	Différences.
$Ré_2$	108	54	16
La ♭	76	38	6
Fa	64	32	5
Ré	54	27	

3

Mi $♭_2$	114	38	10
Si ♭	84	28	4
Sol	72	24	5
Mi ♭	57	19	

4

Fa_2	128	32	8
Ut_2	96	24	5
La ♭	76	19	3
Fa	64	16	

5

Sol_2	144	12	3
$Ré_2$	108	9	2
Si ♭	84	7	1
Sol	72	6	

6

La $♭_2$	152	76	19
Mi $♭_2$	114	57	9
Ut_2	96	48	10
La ♭	76	38	

7

Si $♭_2$	168	41	10
Fa_2	128	32	5
$Ré_2$	108	27	6
Si ♭	84	21	

8

Si_2	180	90	26
Fa_2	128	64	10
$Ré_2$	108	54	9
Si	90	45	

III

Accords comprenant la sensible, *soit la septième, et la sensible dure ou la septième diminuée, dans le ton d'*ut *majeur. (Ces deux notes doivent être employées séparément.)*

1

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Si ♮	90	15	3
Si ♭	84	14	2
Sol	72	12	2
Mi	60	10	2
Ut	48	8	

2

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ut$_2$ ♯	102	51	11
Ut$_2$ ♮	96	48	8
La	80	40	8
Fa	64	32	5
Ré	54	27	

3

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ré$_2$ ♯	114	19	4
Ré$_2$ ♮	108	18	3
Si	90	15	3
Sol	72	12	2
Mi	60	10	

4

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Mi$_2$ ♮	120	60	12
Mi$_2$ ♭	144	57	9
Ut$_2$	96	48	8
La	80	40	8
Fa	64	32	

5

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Fa$_2$ ♯	138	69	15
Fa$_2$ ♮	128	64	10
Ré$_2$	108	54	9
Si	90	45	9
Sol	72	36	

6

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Sol$_2$ ♯	154	77	17
Sol$_2$ ♮	144	72	12
Mi$_2$	120	60	12
Ut$_2$	96	48	8
La	80	40	

7

	Nombres.	Rapports.	Différences.
La$_2$ ♮	160	80	16
La$_2$ ♭	154	77	13
Fa$_2$	128	64	10
Ré$_2$	108	54	12
Si♭	84	42	

8

	Nombres.	Rapports.	Différences.
La$_2$ ♯	168	84	20
La$_2$ ♮	160	80	16
Fa$_2$	128	64	10
Ré$_2$	108	54	9
Si	90	45	

IV

*Accords de septième dans le ton d'*ut *mineur.*

1

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Si ♮	90	30	6
Sol	72	24	5
Mi ♭	57	19	3
Ut	48	16	

2

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Ut$_2$	96	48	10
La ♭	76	38	6
Fa	64	32	5
Ré	54	27	

3

Ré$_2$	104	»	20
Si ♭	84	»	12
Sol	72	»	15
Mi ♭	57	»	

4

Mi ♭$_2$	114	57	9
Ut$_2$	96	48	10
La ♭	76	38	6
Fa	64	32	

5

Fa$_2$	128	32	5
Ré$_2$	108	27	6
Si ♭	84	21	3
Sol	72	18	

6

Sol$_2$	144	72	15
Mi ♭$_2$	114	57	9
Ut$_2$	96	48	10
La ♭	76	38	

7

La ♭$_2$	152	38	6
Fa$_2$	128	32	5
Ré$_2$	108	27	6
Si ♭	84	21	

8

La$_2$	160	80	16
Fa$_2$	128	64	10
Ré$_2$	108	54	9
Si ♮	90	45	

Auxquels on peut ajouter :

9

	Nombres.	Rapports.	Différences.
Si ♭	84	28	4
Sol	72	24	5
Mi ♭	57	19	3
Ut	48	16	

Il est facile de voir que tous les accords présentés par le premier tableau ne sont point identiques : tantôt les premières tierces sont majeures ; tantôt elles sont mineures ; les quintes même varient, ainsi qu'on le remarque dans le deuxième, le septième et le huitième accords. C'est surtout dans ce dernier que la différence est la plus accentuée. Les accords établis sur *ut*, *fa* et *sol*, sont semblables et *parfaits*. Dans ces accords, la somme des différences entre la tonique et la tierce, et cette dernière et la quinte, est égale à la différence qui existe entre la quinte et la tonique répétée à l'octave. Quoique les différences entre la tonique et la quinte ne soient point égales à celles qui existent entre la tierce et la quinte, dans le troisième accord établi sur le *mi*, et le sixième établi sur le *la*, la somme de ces différences ne présente pas moins l'égalité observée dans les accords 1, 4 et 5. Ce qui fait qu'elle existe pour cinq accords sur huit.

Dans le second tableau on ne trouve nulle part l'accord parfait majeur proprement dit. Les accords 7 et 8 sont les mêmes que ceux de la gamme majeure. Tous les autres en diffèrent d'une manière très notable : nulle part on ne trouve les mêmes rapports entre les nombres qui représentent les sons qui les produisent, que ces rapports soient envisagés au point de vue arithmétique ou au point de vue dit géométrique. Les accords établis sur la tonique *ut* et la quarte *fa* sont identiques, à la hauteur près. Les autres accords diffèrent essentiellement. On trouve encore que pour les accords 1, 4, 5 et 6, la somme des différences des deux premières tierces superposées est égale à la différence entre la quinte et la note principale répétée à l'octave. Les deux derniers accords, 5 et 6, diffèrent cependant des deux premiers et sont fort distincts l'un de l'autre.

Les accords du troisième tableau sont généralement formés par trois tierces superposées ; mais ces tierces sont très variables, et les différences entre les nombres représentant les notes superposées ne peuvent être les mêmes dans tous les cas. Cette égalité ne se présente même que pour le premier accord, en y faisant entrer le *si*♭. Dans les accords 2 , 3 , 4 , 5 et 6, on remarque deux tierces égales, au point de vue des différences observées entre les nombres des vibrations qui les pro-

duisent. Le huitième et dernier accord est, comme dans les cas précédents, celui qui présente le moins de concordance.

Dans la musique il faut de la variété, surtout dans l'harmonie. Les accords les plus durs, les moins attendus, peuvent être supportés lorsqu'ils expriment une pensée nette et saisissable ; mais il faut bientôt qu'ils nous ramènent à des rapports plus simples qui, comme les lumières qui éclairent une grande ville pendant la nuit, nous indiquent la voie dans laquelle nous nous trouvons.

Les musiciens distinguent essentiellement une deuxième espèce d'accords formés de quatre notes, et dont la quatrième ou la plus élevée, en les prenant dans l'ordre naturel de leur succession et sans les intervertir, dont la quatrième, disons-nous, est la septième, la ***sous-tonique*** ou la ***note sensible.***

Ces accords, comme les précédents, peuvent être établis sur toutes les notes de la gamme diatonique et même de la gamme chromatique.

Ces sortes d'accords, établis seulement sur les gammes diatoniques d'*ut* majeur et d'*ut* mineur, sont représentées dans les tableaux III et IV.

Si, dans les accords de septième terminés par la note véritablement sensible, on élève la basse de cet accord à l'octave, il en résulte qu'il n'existe qu'un demi-ton entre cette note et la suivante, et que l'intervalle d'un demi-ton peut entrer dans un accord.

Dans les autres accords du même ordre, dont on élève la basse à l'octave, l'accord comprend un intervalle d'un ton.

Les tons mineurs indiquent que l'on emploie l'accord de tierce mineure qui admet un intervalle d'un ton et demi, soit d'*ut* à *mi* ♭, dans le ton d'*ut* mineur. L'intervalle de la tierce majeure est des plus usités.

L'intervalle de quarte existe dans l'accord *fa*, *la*, *ut*, *fa*$_2$, entre *ut* et *fa*$_2$.

L'intervalle entre *ut* et *fa* # existe en *sol*, *ré*, *fa* #, *la*, *ut*, *ré*$_2$, *fa*$_2$ #, et a son équivalent, en *ut*, entre *fa* et *si*, de l'accord *sol*, *si*, *ré*, *fa*, etc.

Vient ensuite l'accord de quinte qui se répète si souvent *(ut-sol) — (fa-ut) — (sol-ré)*.

L'accord entre *ut* et *la*♭ existe dans l'accord parfait de *la*♭.

Celui entre *ut* et *la* se retrouve en *fa* et en *la mineur*.

Ceux entre *ut* et *si*♭; *ut* et *si* naturel, se rapportent aux accords de septième.

Or, il résulte de ce court examen, que ***tous les intervalles possibles peuvent entrer dans la constitution des accords.***

Ce serait une grande erreur de croire que toutes les combinaisons possibles de l'harmonie fussent comprises dans les accords dits parfaits et les accords de septième, répétés même en changeant l'ordre de succession des sons qui les constituent : ***toutes les notes représentées par les intervalles de demi-tons, comprises entre celles qui constituent l'accord parfait, peuvent servir pour constituer des accords que le compositeur emploie selon son inspiration.***

Prenons l'accord parfait d'*ut* pour exemple, soit : UT, MI, SOL, UT₂ répété à l'octave; on peut intercaler entre *sol* et *mi*₂ au dessus de *ut*₁, tous les demi-tons qui y sont compris. On peut en faire autant entre *mi* et *ut*₁, ainsi qu'entre *ut* et *sol*. La figure suivante donne une idée de cette intercalation.



Dans cet exemple, il y a des séries de notes qui sont répétées.

Si, laissant intactes les trois notes inférieures, on ne fait varier que la supérieure; si l'on opère de même sur chaque note sans

toucher aux autres et en évitant de les employer deux fois, on obtient le résultat suivant :

Modifications de l'accord parfait dans le but de rechercher tous les accords possibles.

Série supérieure, seule	8
Série moyenne, seule	7
Série inférieure, seule	6

Ce qui ne fait cependant que dix-neuf accords différents, parce que, dans chaque série, on retrouve l'accord parfait, et que l'on ne peut le compter qu'une seule fois.

Si l'on combine les accords de ces séries en les prenant deux à deux, et finalement toutes les trois ensemble, on finit par atteindre un nombre considérable.

Il faut remarquer en outre que chaque accord peut ne pas commencer toujours par la même note, que les accords de trois notes éprouvent ainsi trois changements de position, par exemple que *ut*, *mi*, *sol*, devient successivement *mi*, *sol*, ut_2; *sol*, ut_2, mi_2; que ceux de quatre notes en éprouvent quatre, et l'on verra ainsi que le nombre des accords possibles est très considérable. Il faut aussi remarquer que la valeur des intervalles change par la *transposition*. Il faudra aussi tenir compte des espaces compris entre les notes, qui peuvent varier d'une ou de plusieurs octaves et qui, dans chaque cas, produisent des effets différents; car on ne peut assimiler le son de la petite flûte à celui de la contre-basse, et l'on verra ainsi que, sans tenir compte du timbre, du rhythme, des piano, des forte et de l'expression, les ressources de l'harmonie sont absolument inépuisables.

On observe dans l'harmonie un fait bien remarquable et bien digne d'attirer l'attention des savants qui désirent en élucider la théorie.

Un chant peut être accompagné par un autre chant à une tierce en dessus, ou plus élevée que ce chant. Cela se présente souvent dans les duo à quelques modifications près.

Si la tierce est exécutée une octave plus bas, l'accompagnement est alors plus grave que le chant, et les tierces sont devenues des intervalles de sixième. Cependant l'harmonie est parfaitement conservée (1).

Dans ce cas les rapports, qu'ils soient géométriques ou arithmétiques, se trouvent changés. L'effet produit sur notre organisation n'est pas le même, ainsi que vous pouvez l'entendre par ce simple chant exécuté sur un organon dans ces deux conditions; mais, je le répète, l'harmonie est intacte et parfaitement conservée.

Cependant ce n'est là qu'un cas particulier; car un accompagnement quelconque, et si compliqué qu'il puisse être, conviendra à un chant qui pourra varier de deux octaves ou plus, et se trouver tantôt au dessus et tantôt au dessous de cet accompagnement, sans que l'harmonie soit dérangée, sans qu'elle présente le moindre intervalle faux. Ainsi un morceau accompagné par un piano peut être chanté par une femme, un baryton ou une basse, et aucun intervalle faux ne pourra être apprécié par l'oreille.

Le caractère du morceau aura changé, notre oreille aura su parfaitement distinguer les différentes voix qu'elle aura entendues, *mais l'harmonie sera demeurée intacte.*

Ne sait-on pas, d'ailleurs, qu'un accord quelconque peut être superposé sur lui-même, et que, dans un orchestre, un accord plaqué est répété à toutes les hauteurs, depuis les notes les plus graves de la contrebasse jusqu'aux plus aiguës de la petite flûte, sans que l'harmonie ait à en souffrir. Mais ce ne sont là que des faits qui s'ajoutent à ceux que je viens de signaler à votre attention et qui n'expliquent rien.

Ce fait m'a beaucoup préoccupé, et, malgré les difficultés qu'il semble présenter, je pense en avoir trouvé une explication satisfaisante.

Si l'on veut s'en rendre compte par les différences des nombres des vibrations qui caractérisent les sons, on trouve que celle de la note principale à la tierce supérieure et celle de la

(1) Dans des conditions spéciales, un chant peut être accompagné par une tierce en dessous ou par une sixième en dessus.

même note à la sixième inférieure sont successivement représentées pour les notes de la gamme diatonique du ton d'Ut par : *ut* 2 . 3 — *ré* 5 . 11 — *mi* 1 . 2 — *fa* 2 . 3 — *sol* 2 . 3 — *la* 1 . 2 et *si* 1 . 2 [1].

Il est facile de voir que les intervalles attribués à chaque note ne conservent pas les mêmes rapports, et qu'ils sont généralement représentés par 1 : 2 et 2 : 3, excepté par celui de *ré* qui l'est par 5 . 11.

L'effet produit par la tierce en dessus et la sixième en dessous n'étant pas le même, il n'y a rien d'étonnant de voir ces effets représentés par des chiffres différents; mais cela n'explique pas la conservation de l'harmonie.

Ce fait est général, il suffit de transposer un chant d'une octave ou de substituer une grande flûte à une petite, ou *vice-versa,* pour que tous les intervalles soient changés. La seconde devient une septième, la tierce une sixième, la quarte une quinte, et *vice-versa.* — Et cependant l'harmonie n'est pas troublée.

La seule explication qui m'ait paru avoir quelque importance repose sur ce que, lorsque l'on compare des sons, *ils se réduisent en leur plus simple valeur les uns à l'égard des autres. Conservant entre eux les caractères propres qui leur sont donnés par la gamme, ils deviennent simplement des multiples de 2, de 3, de 5 et de 7, et ne perdent rien de leur originalité relative ou de leur caractère, quel que soit leur degré d'acuité ou de gravité.*

Mais, je le répète et je crois devoir insister sur ce fait, le caractère numérique des sons, à cela près de leurs propriétés générales, ne peut être que relatif : un son isolé ne peut rien présenter de semblable.

Il résulterait de ce fait qu'un son peut, en passant à des octaves supérieures ou inférieures, conserver son caractère relatif fondamental. S'il est un multiple de 2, de 3, de 5 ou de 7, il restera toujours tel, quel que soit son degré d'acuité ou de gravité.

[1] Ces rapports sont ceux donnés par la tierce et la sixième de la note indiquée; ainsi, pour *ut,* les intervalles arithmétiques sont ceux qui sont indiqués par *mi* au-dessus, et *mi* au-dessous.

Le tableau suivant permettra de comprendre ce qui vient d'être exposé. Il représente la série des rapports géométriques de la gamme diatonique élevée ou abaissée de plusieurs octaves.

La cinquième ligne donne les rapports relatifs à l'unité prise comme tonique. Le *la* de la sixième colonne, coupée par cette cinquième ligne, correspond au diapason. Au-dessus est la même notation modifiée, en passant à des octaves supérieures; au-dessous, c'est l'inverse ou la notation modifiée, en passant à des octaves inférieures.

TABLEAU de la gamme diatonique exprimée en rapports géométriques à divers degrés d'acuité ou de gravité [1].

		Ut	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Za	Si
1	Trois octaves en dessus............	8	9	10	$\frac{32}{3}$	12	$\frac{40}{3}$	14	15
2	Deux octaves en dessus..............	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	7	$\frac{15}{2}$
3	Une octave en dessus................	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$
4	Gamme contenant le la du diapason...	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$
5	Une octave en dessous...............	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$
6	Deux octaves en dessous	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$
7	Trois octaves en dessous.............	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{64}$

Il est facile de voir que les fractions employées pour représenter les sons étant simplement divisées ou multipliées par 2 ou ses multiples, ce multiple ne variant que pour une ligne horizontale, elles conservent exactement les mêmes rapports

[1] Il est éminemment remarquable que la série des sons indiqués par la quatrième ligne, se trouvant portée à trois octaves au-dessus, reproduit exactement la série naturelle des nombres, telle qu'elle est donnée par un tuyau ouvert, à cela près de ceux représentant le *fa* et le *la* dans la gamme en ut. $\frac{32}{3}$ équivaut à 11 moins $\frac{1}{3}$, et $\frac{40}{3}$, à 13 plus $\frac{1}{3}$.

entre elles, et qu'elles ne diffèrent que par la manière dont elles sont exprimées.

Ce tableau permet de voir, et c'est là le plus important, que les numérateurs et les dénominateurs de chaque fraction ne cessent jamais de conserver les rapports qu'ils ont entre eux; que les premiers sont représentés successivement, en les réduisant à leurs facteurs premiers par 1 ou 2, 3, 5, 1 ou 2, 3, 5, 7 et 3×5 ou 15; que les dénominateurs le sont partout par 2 ou ses multiples, excepté pour le quatrième et le sixième son, correspondant au *fa* et au *la*.

Les rapports $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$ se réduisent à 4 et 5, le dénominateur 3 ne leur imprimant aucun caractère particulier, comme on le voit dans la gamme dont la tonique *ut* est représentée par 48 vibrations; le *fa* l'est par 64 et le *la* par 80. D'une autre part, on trouve encore, comme conséquence de ces relations, que $10\frac{2}{3} : 13\frac{1}{3}$, qui représentent *fa* et *la*, sont aussi entre eux comme 4 : 5.

Partant de cette observation, nous trouverions que les sons de la gamme diatonique sont représentés par des facteurs fondamentaux, qui sont les suivants :

Sons.	Facteurs premiers.
Ut	2
Ré	3
Mi	5
Fa	4
Sol	2×3
La	5
Za	7
Si	3×5

Ces chiffres ou ces facteurs premiers demeurent invariables *les uns à l'égard des autres*, et, quels que soient les nombres par lesquels on voudra les multiplier, ils donneront constamment des produits qui conserveront le caractère fondamental qui distingue chacun d'eux.

Le caractère fondamental de chaque son est donc conservé, et les relations que les sons ont entre eux le sont également, quel

que soit le degré d'acuité ou de gravité auquel on les élève ou on les abaisse.

Ces faits paraissent donc pouvoir expliquer comment l'harmonie demeure intacte, quelles que soient les octaves auxquelles on porte les sons.

Ce qui précède peut être résumé ainsi qu'il suit :

Les sons entendus d'une manière isolée ne présentent que les propriétés générales qui les caractérisent.

Entendus simultanément ou successivement, mais assez rapprochés pour devenir comparables, ils acquièrent un nouveau caractère.

Indépendamment de la hauteur relative, ils tirent ce caractère des nombres simples dont ils dérivent, tels que 2, 3, 5 et 7 [1].

C'est ce caractère relatif qu'ils conservent à toutes les hauteurs où l'on peut les porter : le changement qu'ils éprouvent en montant ou en descendant d'une ou de plusieurs octaves, ne faisant qu'introduire ou extraire des facteurs qui n'en changent nullement la relation.

La latitude que nous laisse notre organisation dans la comparaison des sons, permet que ce qui vient d'être dit puisse être appliqué à des sons *relatifs,* quel que soit le nombre *absolu* des vibrations qui les représentent. Cela vous paraîtra évident, si vous vous rappelez ce qui a été dit sur la gamme chromatique à sons fixes, le tempérament et la transposition, qui nous permettent d'accepter comme justes des sons qui sont loin de l'être.

Dans ce système d'idées, les accords dits parfaits, établis sur la gamme diatonique du ton *ut,* présenteraient les caractères suivants :

Sol 2×3	La 5	Si 3×5	Ut 2
Mi 5	Fa 4	Sol 2×3	La 5
Ut 2	Ré 3	Mi 5	Fa 4
Ré 3	Mi 5	Fa 4	Fa 4
Si 3×5	Ut 2	Ré 3	Ré 3
Sol 2×3	La 5	Si♭ 7	Si 3×5

[1] Ces nombres deviennent plus élevés pour représenter les demi-tons de la gamme chromatique fixe, soit 17 et 19.

Les nombres ou plutôt les facteurs qui représentent les accords précédents seraient les mêmes à telle hauteur et dans tel ton qu'on pût les faire entrer, en tenant compte, ainsi que cela a été démontré et vient d'être répété, de la latitude que nous laisse notre organisation pour apprécier les relations que les sons ont entre eux.

Pour acquérir la conviction que cette assertion est bien fondée, il suffit de remonter à l'origine des calculs qui donnent les nombres qui servent pour exprimer les sons d'une gamme diatonique.

Pour ce qui concerne la hauteur, si l'on consulte le tableau de la page 346, on verra que les rapports restent les mêmes, à tel degré d'acuité ou de gravité qu'on les porte.

Il en est encore de même pour la transposition, puisqu'un nombre étant donné pour représenter la tonique, les autres sons de la gamme doivent l'être par des nombres dont les rapports sont invariables, quelle que soit la manière de les formuler; soit :

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{15}{8} \quad 2,$$

ou

$$8 \quad 9 \quad 10 \quad 10\frac{2}{3} \quad 12 \quad 13\frac{1}{3} \quad 14 \quad 15 \text{ et } 16$$

qui sont identiques à la forme près, ou toute autre série du même ordre.

TA

donnant le nombre des vibrations correspondant à chaque note de la gamme diatoniq
jusqu'aux pl

L'*ut* le plus grave étant représenté par 32 vibrations et le diapason qui lui correspon
par 853 vibrations $\frac{1}{3}$.

	Ut	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Za	Si	Ut
1	4096	4608	5120	5461 $\frac{1}{3}$	6144	6826 $\frac{2}{3}$	7168	7680	819
2	2048	2304	2560	2730 $\frac{2}{3}$	3072	3413 $\frac{1}{3}$	3584	3840	409
3	1024	1152	1280	1365 $\frac{1}{3}$	1536	1706 $\frac{2}{3}$	1792	1920	204
4	512	576	640	682 $\frac{2}{3}$	768	853 $\frac{1}{3}$	896	960	102
5	256	288	320	341 $\frac{1}{3}$	384	426 $\frac{2}{3}$	448	480	51
6	128	144	160	170 $\frac{2}{3}$	192	213 $\frac{1}{3}$	224	240	25
7	64	72	80	85 $\frac{1}{3}$	96	106 $\frac{2}{3}$	112	120	12

Un orchestre comprend, dans son ensemble, les 7 séries de sons, ou les sept octaves superpos de ces tableaux. Le *la* de la quatrième gamme du deuxième tableau est, ainsi que cela est ind celui du diapason donnant 870 vibrations par seconde, et aussi celui donné par la deuxième du violon à vide, ou le *la* grave de la flûte en Ré. Les trois *la* qui lui sont superposés sont comp dans l'étendue des sons d'une petite flûte en Ré. Le *la* de la cinquième ligne est le *la* grave d violon et celui donné par la première corde du violoncelle à vide. Celui de la sixième ligne, ou octav grave, est compris dans les sons que peut rendre ce dernier instrument, et il représente le son de première corde, ou le *la* de la contrebasse. Enfin, le dernier *la*, ou celui de la septième ligne, est deuxième note diatonique donnée par cette basse.

Il résulte encore de ces observations que le troisième *la* de la petite flûte en Ré, qui est le son

UX

, dans toute l'étendue d'un orchestre, depuis les sons les plus graves de la contrebasse *petite flûte.*

Le *la* du diapason normal étant représenté par 870 vibrations.

Ut	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Za	Si	Ut_2
4176	4698	5220	5568	6264	6960	7308	7830	8352
2088	2349	2610	2784	3132	3480	3654	3915	4176
1044	$1174\frac{1}{2}$	1305	1392	1566	1740	1827	$1957\frac{1}{2}$	2088
522	$587\frac{1}{4}$	$652\frac{1}{2}$	696	783	870	$913\frac{1}{2}$	$978\frac{3}{4}$	1044
261	$293\frac{5}{8}$	$326\frac{1}{4}$	348	$391\frac{1}{2}$	435	$456\frac{3}{4}$	$489\frac{3}{8}$	522
$130\frac{1}{2}$	$146\frac{13}{16}$	$163\frac{1}{8}$	174	$195\frac{3}{4}$	$217\frac{1}{2}$	$228\frac{3}{8}$	$244\frac{11}{16}$	261
$65\frac{1}{4}$	$73\frac{13}{32}$	$81\frac{9}{16}$	87	$97\frac{7}{8}$	$108\frac{3}{4}$	$114\frac{3}{16}$	$122\frac{11}{32}$	$130\frac{1}{2}$

plus aigu qu'elle puisse donner, est représenté par 6960 vibrations par seconde, et que le *sol* le plus grave de la contrebasse l'est par 97 vibrations $\frac{7}{8}$, soit par 98 vibrations.

L'*ut* immédiatement au-dessous du *sol* serait représenté par 65 vibrations et $\frac{1}{4}$. Le plus inférieur de tous le serait par 32 vibrations $\frac{5}{8}$, voisin de 32 vibrations, nombre qui avait été adopté par tous les musiciens avant que l'on fixât le nouveau diapason. On voit, dans le premier tableau, qu'en partant de l'*ut* représenté par 32 vibrations, on trouve que le *la* du diapason qui lui correspond l'est par 853 vibrations et $\frac{1}{3}$.

Les deux tableaux précédents permettront de faire l'application des principes qui viennent d'être exposés. Tous deux présentent les nombres des vibrations qui correspondent aux sons de la gamme diatonique en *ut* majeur compris dans toute l'étendue d'un orchestre; mais, pour l'un d'eux, le premier, on a admis que les sons dérivaient de l'*ut* fondamental de 32 vibrations, auquel correspond un diapason ou un *la* exprimé par 853 vibrations et $\frac{1}{3}$; tandis que, pour le second, les sons dérivent du diapason fixé à 870 vibrations actuellement admis en France.

Les nombres des vibrations ne peuvent être les mêmes; mais ils conservent à toutes les hauteurs les rapports qu'ils ont entre eux, puisque ce sont ces mêmes rapports qui ont servi pour les trouver au moyen du calcul. Par exemple, tous les sons de la série du *Ré* sont, à ceux de la série de l'*Ut* qui leur correspondent, comme 9 est à 8, ou comme des multiples de 3 sont à des multiples de 2.

Si l'on divise chaque série verticale par le nombre qui lui correspond, soit par les nombres 8, 9, 10 — 12 — 14, 15, pour l'*ut,* le *ré,* le *mi,* le *sol,* le *si* ♭, et le *si* dit *naturel,* on trouve des quotients égaux pour une même gamme et des quotients qui varient du simple au double en montant, ou d'un nombre à sa moitié en descendant. Ces nombres déterminent la hauteur du son, mais n'en caractérisent nullement les rapports fondamentaux, rapports qui sont exprimés par les facteurs de la série précédente. Pour une gamme entière, comprenant le *fa* et le *la,* il faut employer la série commençant par 24, pour avoir des nombres entiers.

La première série du deuxième tableau présente même ce caractère remarquable, auquel on ne pouvait s'attendre en fixant le diapason à 870 vibrations, que, si on divise tous les nombres qui la représentent par 174, on trouve la série des nombres 24, 27, 30, 32, 36, 40, 42, 45 et 48, qui sont exactement la moitié de ceux qui ont été choisis pour représenter la gamme chromatique, et qui suffisent parfaitement pour la gamme diatonique.

Si l'on divise cette même série par 174 multiplié par 3 ou

par 522, on trouve la série plus simple qui lui correspond : 8, 9, 10, $10\frac{2}{3}$, 12, $13\frac{1}{2}$, 14, 15 et 16, qui est la série supérieure du tableau de la page 346.

Dans tous les cas, quoique les accords changent de nature lorsqu'une partie des sons qui les forment passe à d'autres octaves, ce ne sont pas moins des octaves qui jouent des rôles sinon identiques, au moins aussi semblables que possible. On sait, d'ailleurs, qu'il n'est pas toujours facile de distinguer des sons qui n'offrent qu'une octave de différence lorsque leur timbre n'est pas le même.

Pour ce qui concerne les fractions de vibrations, il n'y a pas lieu de s'en occuper : ou elles sont insensibles, ou notre oreille ne divise nullement le temps en secondes qui permettent d'avoir ces fractions.

L'examen des accords et des nombres qui les expriment, indique bien nettement que notre oreille admet des *accords croisés* ou des *accords binaires,* qui peuvent être *chiffrés* d'une manière fort simple, combinés avec d'autres accords, non moins simples, mais dont les sons sont dans d'autres rapports, et que nous avons ainsi le concours de deux actions simultanées et distinctes.

Par exemple, l'accord établi sur le son MI donne pour les nombres les plus simples par lesquels il puisse être exprimé : *mi* 30, *sol*# 38, *si* 45, *ré*# 57. Dans ces quatre nombres : *mi* et *si* sont exprimés par des multiples de 5; *sol*# et *ré*# le tout par des multiples de 19.

L'accord *ut, mi, sol, si,* représenté par les nombres 8, 10, 12 et 15, a trois premiers chiffres multiples de 2; le troisième et le quatrième, multiples de 3; le quatrième et le cinquième, multiples de 5.

L'accord établi sur le *fa* est exactement dans le même cas.

L'accord établi sur le *ré* est plus compliqué que les précédents; il ne contient que deux sons, le deuxième et le quatrième qui se relient par un même facteur, 17, excepté le facteur 2 que l'on rencontre partout.

L'accord de septième, établi sur le *si*, est plus compliqué et plus dur que tous les autres ; il est représenté par 45, 57, 68 et 84, qui donnent $3 \times 3 \times 5 = 45$; $3 \times 19 = 57$ et $3 \times 4 \times 7 = 84$. Le son représenté par 68 est relié aux précédents par 84, comme un multiple de 2 : $2 \times 2 \times 17 = 68$. Leurs facteurs fondamentaux sont très distincts les uns des autres : 5, 19, 17 et 7.

Il est éminemment probable que ces accords formés de systèmes croisés exercent sur nous une influence réelle : au premier degré, des sons simples ; au second, les associations de ces sons formant des accords élémentaires ; au troisième, harmonie des systèmes élémentaires qui fonctionnent simultanément et sont reliés entre eux par ce qu'ils ont de commun : *un simple facteur numérique.*

Il est encore probable que ces systèmes de sons, en agissant sur les fibrilles nerveuses élémentaires qui sont excitées par les vibrations sonores, font naître des mouvements de deux espèces : l'un propre aux fibrilles, l'autre à leur ensemble. Chacune d'elles doit exécuter des mouvements ondulatoires dans sa longueur et des mouvements vibratoires à son extrémité libre. Ces derniers me paraissent devoir être analogues à ceux décrits par l'extrémité libre d'une tige vibrante encastrée à l'autre extrémité, et dessinant dans l'espace des figures comparables à celles projetées par les appareils de M. Lissajoux. Les mouvements d'ensemble doivent être représentés par des lignes ondulatoires, superposées, et donnant naissance à des intersections ou à des nœuds mobiles. Ces mouvements doivent être ainsi transmis à notre être intime, sur lequel j'aurai l'occasion de m'expliquer en d'autres circonstances.

Il est éminemment probable qu'un jour viendra où l'anatomie et la physiologie confirmeront ces prévisions.

Dans ce qui précède, deux observations relatives à la théorie de la musique ont été exposées : la première est que les nombres qui représentent la suite des sons qui forment une gamme soit diatonique, soit chromatique, est une véritable série arithmétique qui m'a conduit à proposer l'introduction d'un son de

plus dans la gamme diatonique, je me suis efforcé ensuite de rechercher les mêmes relations dans l'harmonie; la seconde est que le fait de la transposition de la musique à différentes hauteurs et par octaves, nous a conduits à rechercher ce qu'il y a de plus simple dans les rapports numériques des vibrations qui représentent les sons et d'arriver à les considérer comme des multiples des nombres élémentaires et premiers : 2 , 3 , 5 7 , 17 et 19, dans la gamme chromatique à sons fixes.

Ces deux points de vue théoriques paraissent essentiellement distincts et semblent, au premier abord, s'exclure l'un par l'autre; car, quelle relation peut-il y avoir entre des différences numériques et les facteurs fondamentaux de nombres relatifs?

Cependant cette relation existe, puisque les deux faits sont évidents et se rencontrent concurremment dans la gamme diatonique, attendu que cette gamme est donnée par des rapports géométriques et qu'elle présente les différences qui ont été signalées à votre attention.

Ces relations ont lieu dans la gamme, dans le chant et forcément dans l'harmonie. Dire comment elles sont enchaînées l'une à l'autre : on y parvient facilement en considérant qu'elles sont d'un ordre purement mathématique. Ce point de vue, qui repose sur des faits que l'on ne peut mettre en doute, réduit la partie physiologique de la musique à la plus grande simplicité, et nous permet de comprendre comment elle réagit sur notre organisation, de manière à être saisie et appréciée avec une grande facilité, puisque tout se réduit, pour notre être intime, à comparer les vibrations par leurs différences et par les facteurs élémentaires des rapports numériques qui les représentent.

Ce qui précède a dû permettre de comprendre qu'un chant quelconque comporte avec lui une harmonie qui dépend non seulement des sons qui le constituent, mais encore de la relation de ces sons ou de la manière dont ils se suivent, par la raison très évidente que certains sons en appellent d'autres.

Il n'est point question ici de sons absolus, ou tels qu'ils

seraient s'ils étaient pris isolément, mais de sons relatifs à un ton donné, soit à une note tonale qui sert à le déterminer.

Il est facile de reconnaître qu'un chant étant donné, on peut lui ajouter un accompagnement. Cet accompagnement pourra être complet et être formé avec tous les sons qui font partie de l'harmonie de chaque note, ou bien il n'en emploiera qu'une partie, comme cela est indispensable lorsqu'une voix en accompagne une autre.

Il faut comprendre encore qu'une même note d'un chant peut être accompagnée non seulement par les notes différentes d'un même accord, mais même par des accords différents, pourvu que ces accords, partant de celui qui les précède, rentrent normalement dans celui qui les suit, et que tous conviennent au chant.

Par exemple, dans le ton d'UT, celui que nous prenons toujours pour exemple, le son LA, peut être accompagné par les accords LA, UT, MI, SOL; FA, LA, UT; RÉ, FA, LA, UT; et même SI, RÉ, FA, LA, selon que ces accords seront amenés par la combinaison admise et pourront se résoudre dans l'accord suivant.

Ce qui a été dit de la modulation pourra être appliqué à ce cas.

Si l'on joint à la diversité des sons qui peuvent entrer dans un accompagnement, la manière de les employer en tenant compte de leur durée, de l'emploi d'accords plaqués ou superposés et d'arpéges ou de batteries, pouvant appliquer à un accompagnement tout ce qui a été dit des variations que l'on peut exécuter sur un thème, on voit que le thème le plus simple peut recevoir une infinité d'accompagnements et souvent fort distincts les uns des autres.

Il faut ajouter enfin que le chant, ainsi que l'accompagnement, admettent non seulement les sons d'une gamme majeure ou mineure, mais même les demi-tons qui peuvent être pris en dehors de cette gamme; et pour cela, il n'y a que le goût et l'inspiration qui puissent servir de guide : *ce n'est point avec des chiffres que l'on fait de l'art.*

Si la musique peut être représentée par une série de nombres, si toutes les conditions de la mélodie et de l'harmonie sont dans ce cas, il ne s'en suit pas qu'en écrivant des nombres à la

suite les uns des autres on puisse faire un chant supportable.

Il en est de même pour l'harmonie : un accompagnement n'a de valeur réelle qu'autant qu'il a été conçu par celui qui a fait le chant, ou par un musicien s'inspirant de ce même chant et appliquant sa pensée à l'instrument ou à l'orchestre qui doit l'accompagner.

Sur ce sujet, l'opinion des auteurs a beaucoup varié, et les principes que l'on a posés sont souvent et très heureusement en défaut avec la réalité ou avec la musique écrite et acceptée par tout le monde.

Les uns vous disent, s'ils disposent d'un orchestre bien étendu ou complet : Ne laissez aucun vide; que chaque note d'un accord soit représentée par un son déterminé.

C'est ainsi que l'on a fait de la bonne musique; mais que l'on a pu aussi en faire de la mauvaise; qu'un chant a été étouffé par ceux qui l'ont accompagné, lorsqu'ils ne devraient avoir d'autre mission que celle de le faire ressortir.

Or, pour cela je dirai d'abord qu'il faut se tenir à distance du chant, pour que d'autres sons ne viennent pas se confondre avec lui; que celui-ci soit respecté dans tous les cas, et qu'aucun accompagnateur n'ait la prétention de se faire valoir et de se faire entendre au détriment de celui qui chante.

Ce qui vient d'être dit est une vérité de premier ordre, qui n'est malheureusement presque jamais mise en pratique. Cela a lieu surtout à l'Opéra de Paris, où l'orchestre semble avoir été créé pour obtenir une vocifération au lieu d'un chant, et qui met régulièrement hors d'état de service, après un petit nombre d'années, le chanteur qui a eu la malencontreuse idée de paraître sur ce théâtre monstrueux, où le mauvais goût l'emporte sur la nature et la raison.

Il en a encore été ainsi de certaines musiques militaires, dont le nombre réglementaire des exécutants est de 50 : il semble souvent qu'il y en a 49 qui n'ont d'autre mission que d'empêcher d'entendre l'instrument chantant.

Ces écarts de l'imagination et de l'art font que l'on préfère un chanteur qui s'accompagne avec goût, à l'aide d'une simple guitare, et qui permet à notre esprit de se reposer au lieu de

se fatiguer, à ces orchestres forts, très forts, beaucoup trop forts pour plaire à qui que ce soit, au seul point de vue de l'accompagnement, bien entendu.

Quelle erreur de croire que toutes les parties d'un accompagnement doivent toujours être reliées entre elles de manière à ne pas laisser le moindre vide!

Cela peut constituer un genre spécial d'harmonie, qu'il est bon d'employer quelquefois; mais cela ne peut être une règle générale.

Les sons qui composent un tout harmonique peuvent, en certains cas, se diviser en trois parties nettement distinctes pour notre oreille : un dessus, un médium et une basse. Ces parties peuvent chanter seules, tour à tour, deux à deux, même toutes trois ensemble. Un beau chant accompagné d'une basse qui chante également tout en l'accompagnant, un médium nettement séparé qui relie ces parties entre elles, produisent l'effet le plus puissant, le plus parfait, le plus émouvant; mais, après tout, ce genre ne saurait être unique.

L'art doit jouir de la plus grande liberté; celui qui, comme tant d'autres l'ont fait, voudrait lui imposer des lois ou même de simples règles aujourd'hui, serait demain mis en défaut et ne se trouverait plus à sa hauteur.

Jusqu'à présent il n'a été question que d'un chant que l'on accompagne; mais est-ce là toute la musique, quoique ce soit celle d'un grand nombre de compositeurs français et même italiens? — Non, bien certainement, mais c'est un genre dans la musique; genre qui a sa valeur et auquel appartiennent des œuvres du premier mérite. Y a-t-il rien de plus gracieux que les chants de Boïeldieu, d'Auber et de Rossini?

L'harmonie comprend autre chose que ce qui vient d'être dit. Les compositions des auteurs allemands nous ont révélé un genre nouveau, large et profond.

Si le chant est le résultat d'une inspiration, il peut en être de même de l'harmonie; mais il faut pour cela une organisation spéciale, que le travail, si assidu qu'il soit, ne peut donner. Il faut embrasser et comprendre dans une seule pensée toute

l'harmonie, il faut l'entendre en soi et pouvoir l'écrire. Ce n'est plus un chant dont on cherche l'accompagnement; non, c'est l'harmonie tout entière qui se révèle à son auteur. Beethoven, Meyerbeer et Weber ont surtout excellé dans ce genre. Mais si l'on peut comparer des génies de cette valeur, on peut dire que Weber est celui qui les a tous dépassés.

Permettez-moi de citer un fait pour appuyer mon assertion.

Le *Freyschütz* ou le *Robin des Bois* de cet incomparable auteur a d'abord été joué à Paris, sur le théâtre de l'Odéon, où l'on avait rarement joué des opéras, cela n'ayant eu lieu que pour des représentations à bénéfice.

La musique de cet opéra produisait un effet tellement spécial, tellement riche d'harmonie, tellement puissant, que l'on s'accordait généralement à dire que la salle devait y être pour beaucoup... J'ai entendu jouer cet opéra sur le petit théâtre du Vaudeville de Paris, situé rue Vivienne, en face de la Bourse; je l'ai entendu à Bordeaux.... partout l'effet a été le même!

Une instrumentation exceptionnellement bien choisie, une harmonie parfaite, complète, distançant les parties, permettant de les entendre toutes et de les apprécier, mais ne laissant rien à désirer : c'est là le maximum du beau et de la perfection.

A côté de cette musique, des œuvres qui paraissent parfaites, mais qui ont été composées dans une tout autre voie, peuvent à peine être supportées; elles semblent maigres, faibles et dénuées de cette ampleur qui fait de la musique allemande un véritable océan d'harmonie. Cependant il manque quelquefois à cette musique un chant qui la caractérise et permette qu'elle se fixe dans la mémoire.

Rossini, qui vient de mourir et qui a lui-même exercé une influence si légitime sur les amateurs de bonne musique, a si bien senti la différence qui existe entre la musique allemande et la musique que lui-même a composée, qu'il a fondé un prix pour la musique chantante, en faisant remarquer que l'on s'éloigne trop de cette source musicale; mais à chacun son œuvre. La musique, l'harmonie allemande, est une œuvre de progrès, une œuvre grandiose et qui laissera de grands souvenirs dans l'histoire de l'art, si de nouveaux génies, possédant cette capacité musicale, n'apparaissent plus.

MUSIQUES NATIONALES

J'ai parlé de la musique française, de la musique italienne et de la musique allemande. Cela nous conduit à nous demander si les peuples ou plutôt les nations ont des musiques spéciales. On peut répondre à cela qu'il n'y a pas le moindre doute.

Si ce n'est le *God save the King* ou *Queen,* que les Anglais répètent sur tous les tons, on connaît peu d'œuvres musicales émanées de ce peuple. Je n'ai pas souvenir que l'on ait joué en France un seul opéra composé par un anglais. Sous le rapport du génie musical, les Anglais sont donc à peu près stériles : leur musique est le mutisme. Les Français ont une musique simple, quelquefois gracieuse, mais qui admet la chanson, voire même la gaudriole. Celui qui a suivi cette musique depuis le théâtre de la foire Saint-Germain de Paris jusqu'à nos jours, sera forcé de reconnaître que notre véritable genre est la chanson, la chansonnette gaie ou même bachique, ce qui est d'ailleurs fort excusable, puisque Bacchus nous a gratifiés de tous ses dons en nous livrant les plus abondants et les meilleurs vignobles du monde entier. Puis sont venus de petits opéras, généralement construits d'après des principes bien arrêtés, soit par Rameau, soit par Rousseau, malgré la discussion qui s'était élevée entre ces deux maîtres de la musique d'un autre siècle. Si la musique française a atteint un niveau plus élevé, elle le doit, sans aucun doute, à l'apparition de quelques génies supérieurs, mais aussi à l'éducation qui a élevé le genre au degré le plus haut qu'il ait atteint dans ces dernières années.

Les Espagnols ont une musique tout à la fois gaie et gracieuse, quelquefois lascive, fortement rhythmée, fortement accentuée, qui nous a donné le *fandango*, la *cachucha* et une foule de *boléros.*

Les Italiens ont une musique riche et fleurie. L'organisation de ce peuple lui a permis d'atteindre un haut degré dans les productions musicales. Mais aucun peuple n'a atteint les Allemands; s'ils ont rarement les chants gracieux des Français, les chants brillants des Italiens, ils ont la belle, la grande, la

vaste, la puissante harmonie qui, au point de vue musical, les a élevés au dessus de toutes les nations.

Nous avons donc le droit de dire que l'invention de la musique, que le génie musical, varie avec les peuples et qu'il peut servir pour les caractériser, tout aussi bien que toutes les œuvres de l'art.

J'aurais désiré pouvoir vous entretenir de l'instrumentation, des sensations si diverses qu'elle fait naître en nous par les qualités spéciales des sons rendus par chaque nature d'instrument et vous dire comment elle vient en aide à la pensée du compositeur pour produire des effets déterminés.

Mais il aurait fallu pour cela vous entretenir du *timbre* des sons, et le temps dont je pouvais disposer ne m'a pas permis de le faire.

Je voulais profiter de cette circonstance pour vous parler des travaux éminemment remarquables de M. Helmotz, qui est parvenu à analyser tous les sons et même à nous faire connaître la nature spéciale des voyelles; mais ce sera pour une autre occasion.

MODULATIONS

Dans la conférence que j'ai faite le 16 mars 1869, à la Faculté des sciences, mon intention était, après avoir établi les principes sur lesquels repose la musique, de parler de la mélodie, des modulations et de l'harmonie. Mais je n'ai pu qu'effleurer ce sujet, et le temps m'a manqué pour exposer ce qui est relatif aux modulations.

Je reconnais la nécessité d'en entretenir mes lecteurs. Après tant de travaux et tant de difficultés, c'est une tâche ardue que j'entreprends; cependant je n'hésite point à le faire. Puisque je possède une méthode nouvelle, certaine et facilement intelligible, celle de représenter les conditions fondamentales de la musique par des nombres ou par leurs rapports, il faut en faire l'essai : si la méthode est bonne, elle surmontera toutes les difficultés qui se présenteront; si elle est fausse, elle succombera.

Moduler, c'est passer d'un ton dans un autre.

L'usage est de commencer un morceau dans un ton déterminé et de le finir dans le même ton, ou au moins dans le ton mineur reposant sur la même tonique, si le commencement est majeur, ou dans le ton majeur si le commencement est mineur.

Si le chant a peu d'étendue, rien de plus simple qu'il en soit ainsi; mais, lorsqu'il doit se faire entendre pendant un temps assez long, il deviendrait *monotone* s'il ne changeait de ton. Ici vous voyez que le mot monotone, qui veut dire un seul ton, se trouve parfaitement à sa place.

Avant de rechercher comment on peut changer de ton en satisfaisant aux exigences de notre organisation, ou plutôt de notre sens intime dont elle n'est que l'instrument, il importe d'abord de définir ce que l'on entend par *ton*. Le *ton* est donné par la hauteur de la gamme dans laquelle un morceau est écrit ou exécuté. Il comprend tout à la fois ce qui appartient au chant comme ce qui appartient à son accompagnement, ou, d'une manière plus générale, ce qui se trouve compris dans la mélodie et dans l'harmonie.

S'il n'y avait d'autre instrument que la voix, le ton serait

donné uniquement par la hauteur de la tonique ou par le nombre des vibrations qui la représentent; mais il n'en peut être de même avec la plupart des instruments. Ces instruments sont toujours plus ou moins à sons fixes, et la tonique ne peut être représentée que par une des douze notes de la gamme chromatique fixe. Or, il résulte de la construction des instruments et de la notation musicale, que ce changement modifie tout à la fois l'exécution et la notation.

Les intervalles de la gamme diatonique sont parfaitement définis, et nous avons même vu qu'ils changent quelquefois d'une manière très sensible en passant d'une tonique à une autre.

Il y a sept sons dans la gamme diatonique ordinaire, huit dans celle que je propose d'adopter, et il y en a douze dans la gamme chromatique, d'où il résulte qu'il y a douze tons possibles. On pourrait en admettre un plus grand nombre, parce que l'on peut distinguer le *ré* ♯ du *mi* ♭; le *fa* ♯ et le *sol* ♭; le *sol* ♯ et le *la* ♭; le *la* ♯ et le *si* ♭; mais il n'y a pas lieu de le faire, les sons fixes étant les seuls qui paraissent pouvoir servir pour établir les tons musicaux. Les demi-tons variables *ne sont que des sons de passage,* et ne peuvent servir de tonique pour établir une gamme.

Ne devant nous occuper que d'une gamme fixe, ces sons se confondent les uns avec les autres. Je ne vous dirai rien non plus du *si* ♯ et de l'*ut* ♭, et des tons caractérisés par des doubles dièzes et des doubles bémols.

Sans cela, nous tomberions dans une complication inextricable et inutile, puisque les tons ainsi caractérisés rentrent dans les autres tons que nous admettons. En résumé, il existe douze tons majeurs et autant de tons mineurs, et il ne peut y en avoir d'autres dans la condition où nous nous plaçons.

Dans la musique écrite, chaque ton, excepté celui d'UT *majeur* et de LA *mineur,* est caractérisé par des *modificateurs,* et par là j'entends des *dièzes* ou des *bémols,* qui sont ajoutés à chaque portée immédiatement après la clé. Tant qu'aucun de ces modificateurs n'apparaît, il est évident que le morceau reste dans le même ton; car le ton est déterminé par les sons compris dans la gamme à laquelle il appartient.

Une gamme diatonique majeure est caractérisée par une

suite d'intervalles déterminés, tels qu'on les rencontre dans l'exemple suivant :

Intervalles.	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	
Gamme majeure.	ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut

En tout, douze demi-tons.

On remarquera que la première tierce est composée de deux tons entiers, qui constituent la tierce majeure, qui est un des caractères du ton majeur.

Les intervalles de la gamme mineure ne sont point tous disposés de la même manière :

Intervalles.	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
Gamme mineure.	La	si	ut	ré	mi	fa	sol #	la

En tout, douze demi-tons.

Le premier demi-ton est baissé vers la tonique et la première tierce est mineure. C'est cet intervalle qui caractérise essentiellement le ton mineur.

Il y a encore cette différence bien remarquable entre le ton majeur et le ton mineur, qu'il y a aussi un demi-ton entre la dominante (cinquième note) et la sus-dominante, et de plus, ce qui ne se rencontre pas dans la gamme majeure, ***un intervalle d'un ton et demi*** entre la sus-dominante et la septième ou la sous-tonique.

Cet intervalle n'existerait pas si l'on adoptait la septième diminuée, qui, selon les observations que j'ai présentées dans ma conférence, doit exister dans la gamme. Au-dessus du *fa* ou au dessous du *sol #*, dans l'exemple donné, il y aurait un son, celui du *sol* dit naturel.

C'est l'absence de ce son dans la gamme, qui fait que les musiciens sont embarrassés pour établir la gamme mineure descendante : les uns l'y introduisent et les autres ne l'y mettent pas.

En outre de la répartition des sons qui vient d'être indiquée, il faut remarquer que la tonique a pour caractéristique de n'être distancée que d'un demi-ton de la note qui lui est immé-

diatement inférieure ou de la septième, que le ton soit majeur ou mineur. Cette septième, à cause de cela, porte le nom de *sensible*. Elle caractérise effectivement le ton, et elle semble appeler la tonique, qui vient terminer une phrase commencée.

L'ordre des tons et des demi-tons étant déterminé et invariable pour le ton majeur, comme pour le ton mineur, il en résulte que l'on ne peut passer d'un ton dans un autre, ou prendre pour tonique une note quelconque d'une gamme donnée, autre que la tonique elle-même, sans déplacer les intervalles, pour qu'ils soient dans l'ordre voulu et qu'ils aient la valeur qui leur convient.

Cela n'offre de difficultés que pour la musique écrite et pour l'instrumentation; car la voix exécute une gamme majeure ou une gamme mineure, à telle hauteur que son étendue le permet, sans s'occuper des changements de tons : il suffit que les intervalles soient ceux qui ont été indiqués.

Il est indispensable d'ajouter que ce qui a été dit sur les intervalles qui caractérisent les gammes majeures et mineures s'applique aussi à l'harmonie. En effet, la somme des demi-tons qui représentent un intervalle diatonique, change avec la valeur réelle des notes du ton. Par exemple, la tierce caractéristique des tons majeurs et mineurs n'est pas la même : *ut, mi,* et *ut, mi* ♭, sont fort différents l'un de l'autre, et exercent sur notre organisation des effets tout à fait distincts.

Les accords de seconde, de quarte et de quinte, établis sur la tonique, sont les mêmes dans un même ton majeur ou mineur; les autres accords, de tierce et de sixième, sont différents. On trouverait des similitudes ou des différences du même ordre en prenant, pour base des accords, les autres notes de la gamme; ce qu'il est facile de juger, en comparant les deux gammes suivantes, qui sont dans le même ton, mais dont l'une est majeure et l'autre mineure :

Gamme majeure.	ut	ré	mi	fa	sol	la	si
Gamme mineure.	ut	ré	mi ♭	fa	sol	la ♭	si

Si l'on compare le ton majeur avec le ton mineur, établis sur la même base, on voit qu'ils diffèrent par la tierce et la sixième, qui sont baissées d'un demi-ton dans le ton mineur.

Si, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, nous prenons le ton d'*ut* pour terme de comparaison et pour point de départ, nous trouvons que les modulations peuvent être opérées dans les conditions suivantes :

On passe immédiatement, et sans aucune préparation, d'*ut* majeur en *fa* et en *sol* majeurs, en *la* et en *ut* mineurs.

Les accords parfaits de *fa* et de *sol majeurs* existent dans le ton d'*ut* naturel. La septième ou note sensible du ton de *fa*, soit *mi naturel,* existe même dans le ton d'*ut;* il suffit donc de baisser le *si* d'un demi ton pour régulariser la gamme en *fa.*

On ne trouve pas dans la gamme en *ut* la sensible du ton de *sol,* mais on l'obtient en élevant le *fa* naturel d'un demi-ton ou en le transformant en *fa* ♯, et cette seule altération suffit.

L'accord parfait de *la mineur* existe dans le ton d'*ut : la, ut, mi.* Il suffit d'y introduire la note sensible en élevant le *sol* d'un demi-ton, soit en le transformant en *sol* ♯.

Pour passer d'*ut majeur* en *ut mineur,* il se présente un cas un peu plus compliqué, il faut baisser deux notes d'un demi-ton, la tierce et la sixième ou le *mi* et le *la,* qui deviennent alors *mi* ♭ et *la* ♭. Mais les deux tons ont la même tonique et la même note sensible *si* naturel.

Ces quatres tons *fa, sol, la mineur* et *ut mineur,* sont les seuls dans lesquels on puisse passer directement du ton d'*ut* sans aucune espèce de préparation intermédiaire.

L'inverse de ces passages a lieu sans autre modification ou altération des sons : on passe directement de *fa* ou de *sol,* et de *la mineur* ou d'*ut mineur,* en *ut majeur.*

On peut généraliser et dire que l'on passe directement d'un ton majeur dans les tons représentés par sa *quarte* et sa *quinte* conservés à l'état de tons majeurs, dans le ton mineur établi sur la sixième note et dans le ton mineur correspondant au ton majeur et qui conserve la même tonique.

Si l'on examine ce que nous venons d'obtenir, on voit que

l'on passe directement d'un ton dans un autre lorsque ce résultat peut être obtenu en n'altérant qu'une seule note, ou en passant *du majeur au mineur, et l'inverse, en conservant la même tonique et la même note sensible, mais en altérant deux notes.*

Si la gamme diatonique contenait la septième dure ou diminuée, soit le *si* ♭ dans le ton d'UT, on pourrait passer directement d'*ut* en *si* ♭, et cela aurait lieu d'autant plus facilement, que la gamme d'*ut* contiendrait l'accord parfait du ton de *si* ♭, soit *si* ♭, *ré, fa.*

On dira peut-être : mais puisque le *si* ♭ doit entrer dans la gamme d'*ut,* qu'il y soit ou qu'il n'y soit pas, c'est comme s'il y était pour notre organisation. Cela est vrai, mais n'ayant point l'habitude de l'y comprendre, il y aurait peut-être une transition trop brusque pour certaines personnes.

Quoi qu'il en soit, cette remarque devait être faite, et il en est de même pour tous les tons quels qu'ils soient, chacun d'eux devant comprendre la septième diminuée dans sa gamme diatonique.

Si l'on voulait passer du ton d'*ut* dans un autre ton présentant deux altérations, deux dièzes ou deux bémols, il serait indispensable d'employer un ton intermédiaire. Par exemple, pour passer d'*ut* en *ré* ou en *si bémol,* tons qui sont caractérisés par deux dièzes ou deux bémols, il faut passer par le ton de *sol*, caractérisé par un seul dièze pour arriver en *ré*, ou par le ton de *fa* pour arriver en *si bémol.*

Effectivement le ton de *ré* est à l'égard du ton de *sol,* ce que celui-ci est à l'égard du ton d'*ut;* tous deux sont représentés par la quinte de la tonique. Quant au *si bémol,* il est la quarte du ton de *fa*, comme le *fa* est la quarte du ton d'*ut.*

Si le ton dans lequel on désire passer, présente trois altérations des intervalles de la gamme à l'égard du ton à transposer, il faut passer par deux tons intermédiaires.

Pour arriver en *la,* on passerait donc par *sol* et *ré*, et pour passer du ton d'*ut* dans le ton de *mi bémol,* on passerait par les tons de *fa* et de *si bémol*, caractérisés par un et deux bémols.

On voit donc par ce qui précède que, *quel que soit le ton dont on part, il faut autant de tons intermédiaires pour arriver dans*

un ton donné qu'il y a d'altérations des sons de la gamme primitive, MOINS UNE — puisqu'une seule altération n'exige aucun ton intermédiaire, quel que soit le ton que l'on quitte pour passer dans un autre.

La disposition des caractéristiques des tons, connue de tous les musiciens, est indiquée dans le tableau des tons majeurs et des tons mineurs. Ce tableau permettra de comprendre ce qui vient d'être exposé (V. tableau des tons majeurs et mineurs).

D'après ce qui vient d'être dit et en consultant le tableau précédent, on voit que pour passer le plus rapidement possible d'*ut* en *si majeur*, il faut passer par quatre tons : *sol, ré, la* et *mi*. Pour passer de *ré* en *mi majeur,* il ne faut qu'un intermédiaire.

L'inverse a également lieu pour passer de *si* en *ut* et de *mi* en *ré*.

Les passages d'*ut* en *la bémol* ou de *ré bémol* en *si bémol,* se feraient de la même manière.

On voit dans le même tableau que le ton de *fa* ♯ se confond avec celui de *sol* ♭, et que l'on pourrait passer sans transition de *fa* ♯ en *ré* ♭, et de *sol* ♭ en *si naturel*.

Ce qui précède démontre qu'il y a deux voies pour passer d'un ton diézé dans un ton bémolisé, ou l'inverse. Cela peut avoir lieu en avançant vers la droite du tableau précité en suivant une ligne et de rétrograder sur l'autre ligne, ou de rétrograder sur la première ligne jusqu'en *ut* et d'avancer ensuite sur la droite de la deuxième portée jusqu'au ton donné.

Les moyens qui viennent d'être signalés sont simples et faciles à suivre ; mais il n'y a point qu'eux : les tons mineurs permettent de prendre une autre route. Par exemple, on passerait d'*ut* en *la majeur* en prenant pour unique intermédiaire le ton de *la mineur*. On pourrait aussi passer du ton d'*ut* en *mi bémol,* en prenant *ut mineur* pour intermédiaire.

En combinant ensemble les différents passages qui ont été indiqués, on peut simplifier ou amplifier les modulations à volonté.

En général, celui qui compose suit son inspiration, et ne s'occupe pas des moyens que je viens d'indiquer.

Il pourra même arriver qu'il passe d'un ton à un autre sans suivre aucune des indications qui précèdent, et cela, pour produire un effet déterminé, une espèce de surprise.

Nous verrions sans étonnement un dialogue dont chaque acteur chanterait dans un ton différent, mais qui se réuniraient finalement en un seul et même ton pour permettre un duo.

Il n'y aurait rien d'extraordinaire qu'une partie chantât en *ut* et l'autre en *la mineur*, pour se réunir ensemble dans l'un des deux tons. Cinq parties pourraient chanter séparément et alternativement en *ut*, en *sol*, en *fa*, en *la mineur* et en *ut mineur*, pour se réunir toutes dans le ton d'*ut*.

Il faudrait être musicien et avoir l'oreille exercée pour s'apercevoir de cette singulière distribution du chant.

Il serait plus difficile d'admettre qu'une partie chantât en *ut majeur* et l'autre en *mi bémol*, pour se réunir toutes deux dans le ton d'*ut mineur*.

Enfin, rien ne s'oppose à ce que l'on passe directement d'un ton quelconque à un autre ton quelconque; mais alors il y aurait discontinuité du chant et de l'harmonie, et il n'y aurait plus de modulations à proprement parler.

Si l'on résume ce qui précède, on trouve :

1° Que l'on passe *directement* d'un ton dans un autre par l'altération d'une seule note; que cela ne peut avoir lieu que pour les toniques établies sur la quarte et la quinte du ton primitif, qui donnent des tons majeurs, que le ton de départ soit majeur ou mineur; par la sixième du ton, qui donne un ton mineur si le ton est majeur, et qui produit un ton majeur si le ton primitif est mineur;

2° Qu'il y a une exception pour les tons qui passent directement du majeur au mineur sans changer la tonique, ou l'inverse; que pour obtenir ce résultat, il faut altérer deux notes du ton : la tierce et la sixième;

3° Que le plus court chemin pour passer d'un ton dans un autre, lorsqu'il y a deux ou un plus grand nombre de dièzes ou de bémols à la clé, est de passer par autant de tons, moins un, qu'il y a de signes d'altération (dièzes ou bémols);

4° Que l'on peut passer des tons diézés aux tons bémolisés, ou l'inverse, en avançant ou rétrogradant, pour rencontrer le ton

de *fa* ♯, qui se confond avec celui de *sol* ♭, ou par le ton d'*ut;*

5° Qu'en combinant les divers moyens qui ont été indiqués pour abréger le nombre des tons par lesquels on peut passer pour simplifier les modulations, on peut les étendre et les varier pour ainsi dire à l'infini.

On voit, par le résumé des règles qui président aux modulations, que les principes généraux qui servent de base à la musique y trouvent une application complète. C'est toujours et partout la simplicité des rapports qui domine, et que l'on a suivie instinctivement, si l'on peut employer une telle expression, avant d'en avoir trouvé les règles. D'une série de rapports simples et déterminés, on passe à une autre série du même ordre, s'en éloignant le moins possible, afin que notre sens intime ne soit point froissé par des transitions qui feraient cesser l'harmonie des séries numériques, éminemment remarquables, qui produisent les gammes diatoniques majeure et mineure.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Dans cette Conférence, je me suis efforcé de démontrer que les sons pouvaient être représentés par les nombres des vibrations qui les caractérisent; que la gamme diatonique est due à une suite de rapports simples établis entre les nombres correspondant aux sons qu'elle comprend. La suite de ces nombres présente ce caractère singulier, qu'elle offre une espèce de série arithmétique qui est équilibrée de chaque côté de la dominante. Toutefois, ce résultat ne peut être obtenu qu'en admettant qu'il manque une note dans la gamme diatonique, et que cette note est la sensible dure qui existait dans le plain-chant. Cette remarque nous a permis d'établir deux espèces de gammes chromatiques : l'une à sons fixes, celle qui est donnée par tous les instruments qui sont aussi à sons fixes, et l'autre à sons variables, qui appartient à la voix et aux instruments qui peuvent donner tous les sons possibles compris entre les limites qu'ils ne peuvent franchir. La gamme chromatique à sons fixes et celle à sons variables me paraissent devoir exister l'une et l'autre. Les demi-tons fixes peuvent être soutenus, et jouissent d'une indépendance analogue à celle des sons de la gamme diatonique. Les demi-tons variables, au contraire, ne représentent que des sons transitoires ou de passage, qui ne paraissent devoir exister que lorsqu'ils conduisent aux sons fixes de la gamme diatonique qui en sont les plus rapprochés, soit en montant, soit en descendant.

La conservation de l'harmonie, lorsque les parties sont exécutées à des octaves de différentes hauteurs, transposition qui change la nature des accords, puisque les quintes peuvent devenir des quartes, les sixièmes des tierces, et les septièmes des secondes, ou l'inverse, m'a paru pouvoir être expliquée par la considération des facteurs premiers des rapports qui existent entre les vibrations qui représentent les sons d'une gamme déterminée. Ces facteurs premiers sont donnés par la série naturelle des nombres 8, 9, 10 — 12 — 14, 15 et 16; série qui se réduit à 2, 3, 5, 4, 3, 5, 7 et 3×5 ou 15, en interposant 4 entre 10 et 12, et 5 entre 12 et 14.

Ces nombres caractérisent les sons les uns à l'égard des autres, à tel degré d'acuité ou de gravité qu'on les porte.

On a pu voir que les principes qui guident le compositeur dans les modulations sont d'une simplicité extrême, et qu'ils consistent à n'altérer qu'un son ou deux au plus pour passer d'un ton dans un autre.

Enfin, j'ai insisté sur ce fait que la théorie sert pour permettre de comprendre la musique et même pour en expliquer une foule de difficultés plus apparentes que réelles; qu'elle permet de relier les faits observés avec notre organisation ou notre constitution anatomique la plus intime; mais qu'elle ne peut, en aucun cas, conduire à composer de la musique.

Ce résultat ne peut être obtenu que par l'inspiration ou le génie des compositeurs.

FIN.

TABLE ANALYTIQUE

LES ANIMAUX

VOIENT-ILS LES MÊMES RAYONS LUMINEUX QUE NOUS?

PAR PAUL BERT

Professeur de Physiologie à la Faculté des Sciences de Paris.

Lorsque les vibrations éthérées dont le centre est un corps progressivement chauffé arrivent à se succéder avec une rapidité telle que leur longueur d'onde est d'environ huit cents millionièmes de millimètre, elles deviennent susceptibles, si elles entrent en rapport avec notre rétine, d'impressionner celle-ci, et cette impression transmise à l'encéphale donne lieu à une sensation que nous appelons lumineuse. Si les vibrations deviennent de plus en plus rapides, nous les percevons avec une netteté et une acuité d'abord de plus en plus grande : le maximum a lieu quand la longueur d'onde atteint environ six cents millionièmes; puis, l'intensité de l'impression qu'elles exercent va en diminuant, et, aux environs de trois cents millionièmes de millimètre, elles paraissent cesser de pouvoir mettre en action soit la rétine, soit le cerveau.

La question peut être présentée sous une forme plus connue. Lorsque les charbons de la lampe électrique sont portés à une très haute température, ils deviennent incandescents, lumineux; ils émettent alors des rayons dont la longueur d'onde est très différente, mais qui cheminent ensemble. Les disperse-t-on par l'emploi d'un prisme, ils s'étalent en une longue bande à laquelle on a donné le nom de spectre. Or, comme chacun le sait, il y a dans ce spectre trois régions successives, que l'on désigne sous les noms de région ou spectre *calorifique, lumineux* et *chimique*. Sans insister, plus que je n'ai le droit de le faire, sur

ce qui appartient au domaine de la physique, il faut bien que je relève ces expressions, qui ont introduit dans l'esprit de beaucoup de personnes les idées les plus fausses; on se figure assez volontiers, par exemple, que les rayons chimiques du spectre sont les seuls qui puissent opérer les transformations chimiques qui sont sous l'influence de la lumière, tandis que cette expression veut simplement dire : rayons dont on n'a pu constater la présence qu'en leur faisant opérer certaines transformations chimiques.

Ces erreurs sont plus importantes pour nous en ce qui concerne les rayons dits lumineux. Il ne manque pas de gens qui croient que les rayons, que nous voyons dans le spectre, ont une propriété de *luminosité* particulière, qui les différencie complétement des autres; mais les physiciens sont aujourd'hui unanimes pour repousser cette manière de voir. Ces rayons ou, pour parler plus exactement, ces ondulations ne diffèrent de celles qui les précèdent ou les suivent que par une vitesse, et, conséquemment, par une force vive différente. Si, pour les unes, cette force vive est capable à un plus haut degré de donner naissance, par exemple, au courant d'une pile thermo-électrique, ou encore d'impressionner les terminaisons de nos nerfs cutanés, de produire, comme on dit, de la chaleur; si, pour les autres, elle est capable à un plus haut degré de modifier certains équilibres moléculaires, de décomposer, par exemple, le chlorure d'argent, d'exciter chez les animaux, comme je l'ai montré par des expériences encore inédites, la formation du pigment cutané; si, enfin, pour toute une série intermédiaire, elle peut, par voie physique (transformation en chaleur, en électricité, etc.) ou par voie chimique, ébranler notre rétine, et donner naissance aux diverses sensations lumineuses, ces effets si différents sont en rapport non avec une forme d'onde ou une périodicité différente, mais simplement avec une durée différente des vibrations éthérées. Le fait d'être lumineux dépend donc bien moins de la nature du rayon agissant que de la nature de la rétine réagissante, et surtout que de la région centrale du système nerveux à laquelle se trouve transmis l'ébranlement rétinien. Faites tomber sur l'extrémité de nos nerfs cutanés un ensemble suffisant de rayons pris dans la région visible du spectre, là où les vitesses sont les moindres, dans le rouge, en un mot, et vous n'éprouverez, quelque intensité que vous donniez à votre

source lumineuse, qu'une sensation de chaleur; sur la rétine, au contraire, la sensation, d'ordre spécial, sera dite lumineuse. Or, les rayons sont les mêmes; qu'y a-t-il donc de changé?

Il y a de changé la terminaison nerveuse d'abord. Aucun fait ne prouve qu'un rayon lumineux amené sur la surface de section d'un nerf optique produirait une sensation lumineuse. Au moins, lorsque ce rayon tombe sur la continuité même des fibres nerveuses (comme dans la papille du nerf optique), il paraît à peu près inactif. Non que l'ébranlement du nerf optique ne soit suffisant; tous les faits de lumière subjective, et notamment les phosphènes par pression, sont là pour le prouver. Mais il est fort possible que la force vive si minime des rayons lumineux ait besoin, pour donner naissance à un ébranlement du nerf, d'un lieu spécial où puissent, grâce à de délicates dispositions, s'opérer des transformations auxquelles je faisais allusion tout à l'heure. Je signale ici en passant ce sujet d'expériences curieuses et difficiles.

Il y a de changé ensuite la nature du centre nerveux. En admettant, et cela est fort probable, que l'ébranlement du nerf optique est identique en nature avec celui d'un nerf de sensibilité quelconque, il est certain que ces ébranlements ne se différencient, quant aux notions qu'ils nous apportent, que par le lieu des centres nerveux où ils se rendent. En d'autres termes, la loi des *énergies spécifiques* de J. Müller doit être transportée des conducteurs nerveux aux centres nerveux eux-mêmes.

Ou, pour parler plus clairement, les nerfs sont des conducteurs indifférents, capables de transmettre toutes les excitations qui parviennent à les ébranler; mais, suivant le centre impressionné, nous avons telle ou telle sensation. Si, par exemple, la section du nerf optique donne une sensation lumineuse, ce n'est pas en vertu d'une propriété spéciale du nerf, mais bien à cause de la région des centres nerveux auquel il aboutit.

Il nous est donc parfaitement permis de penser que cette relation qui existe entre les vibrations de certaines longueurs d'onde et notre appareil rétinien, n'existe pas chez tous les animaux. Il est fort possible, en effet, j'ose même dire qu'il est très vraisemblable, *à priori*, que certains rayons, capables d'impressionner notre œil, ne puissent pas impressionner l'œil d'autres animaux, surtout si ces animaux sont fort éloignés de nous et par leur constitution anato-

mique générale et par la structure de leur œil. Il est très vraisemblable, en outre, que certains rayons, que nous ne percevons pas à l'état lumineux, puissent parfaitement être perçus par d'autres animaux. En un mot, il se peut que certains animaux ne voient pas les rayons du spectre que nous voyons, et en voient d'autres que nous ne voyons pas.

Je laisse, pour le moment, de côté ce qui a rapport aux limites exactes de l'étendue que nous pouvons voir dans le spectre, limites qui ont été si extraordinairement reculées du côté du violet par les expériences toutes récentes de M. Mascart, et je veux rendre compte à la Société d'expériences entreprises pour résoudre la question ci-dessus énoncée, question qui présente un grand intérêt, non seulement au point de vue de la philosophie naturelle, mais spécialement au point de vue de la physiologie humaine.

J'ai pensé à utiliser, pour faciliter l'expérience, le phénomène si remarquable de *venir à la lumière*, que présentent beaucoup d'animaux, et surtout d'animaux aquatiques. Ne pouvant songer à passer en revue tous les types du règne animal, j'ai voulu m'adresser à des animaux aussi différents que possible de nous par la constitution générale de leur corps, et dont l'œil fût, quant à sa structure, aussi différent que possible du nôtre.

Il fallait, en outre, que ces animaux eussent des mouvements rapides, afin qu'on fût clairement averti de l'influence qu'exerçait sur eux la lumière.

J'ai fait choix de petits animaux extrêmement communs dans nos eaux douces, les Daphnies puces, petits crustacés presque microscopiques de l'ordre des Cyclopes. L'œil unique et médian de ces animaux appartient au type des *yeux composés lisses* (Milne-Edwards); il est constitué par un ensemble de cônes (cristallins?), placés derrière une cornée commune, laquelle ne présente pas les facettes des yeux des articulés supérieurs. Ces petits animaux recherchent beaucoup la lumière, et se précipitent vers elle avec une activité des plus curieuses.

J'en plaçai un grand nombre dans un vase de verre bien noirci, et où la lumière ne pouvait pénétrer que par une fente étroite. Puis, je les soumis, avec l'assistance de M. Bourbouze, préparateur de physique à la Faculté, à l'action des divers rayons du spectre de la lumière électrique.

Mes Daphnies erraient, dispersées d'une manière à peu près égale dans toute l'étendue du vase obscur, lorsque, soudain, je fis tomber sur la fente un rayon coloré, un rayon vert. Aussitôt, elles s'agitèrent, se groupèrent toutes dans la direction de la traînée lumineuse, et un très grand nombre s'en vint se heurter, montant et descendant sans relâche, contre la paroi qui recevait la lumière. Un écran étant alors interposé, elles se dispersèrent à nouveau. Or, un semblable résultat fut obtenu pour toutes les régions du spectre visible. Le rouge, le jaune, le bleu, le violet même, attiraient les Daphnies. Seulement, il fut facile de remarquer qu'elles accouraient beaucoup plus rapidement au jaune ou au vert qu'à toute autre couleur, et que même, si à ces rayons on faisait succéder immédiatement les rayons violets, un certain nombre des animaux s'éloignaient momentanément de la fente lumineuse; je reviendrai plus loin sur l'importance de ces faits.

Mais voici un premier point établi : les Daphnies voient tous les rayons lumineux que nous voyons nous-mêmes.

Passons au second point. Au lieu de faire tomber sur la fente l'extrémité éclairée en rouge du spectre, allons un peu au-delà, et amenons cette région invisible où, précisément, la pile thermo-électrique nous donnerait le maximum de chaleur. (Je dois dire ici, et les physiciens comprendront l'importance de cette remarque, que notre prisme disperseur était un excellent prisme en flint-glass.) Pour nous, la fente est dans l'obscurité; sera-t-elle lumineuse pour les Daphnies? Non, aucune ne se dérange, et elles se répandent indifféremment dans toute l'étendue du vase. Mais si je fais un peu tourner le prisme, si j'amène sur le bord de la fente une mince ligne colorée, aussitôt le spectacle change, elles s'empressent toutes, grattent la paroi, et se disputent l'étroit espace par où pénètre la lumière. Je détourne un peu celle-ci, aussitôt chaque animal reprend son allure indifférente. Enfin l'ultra-violet me donne les mêmes résultats, mais non avec la même netteté, et cela se comprend, puisque la visibilité du spectre ne cesse pas brusquement du côté du violet comme elle le fait du côté du rouge, mais se dégrade et diminue insensiblement.

Voici donc un second point établi : les Daphnies ne voient aucun des rayons lumineux que nous ne voyons pas nous-mêmes.

Ainsi, ce que je considérais comme très possible, comme très

vraisemblable même *à priori,* ne s'est pas confirmé. Les limites de visibilité du spectre sont les mêmes, sensiblement, pour ces animaux et pour nous. Or, en tenant compte des différences plus haut signalées touchant la structure de l'œil et le type zoologique, nous en arrivons, en renonçant à notre proposition primitive, et généralisant les résultats obtenus chez les Daphnies, à dire :

Nous devons admettre, jusqu'à preuve contraire, que tous les animaux voient les rayons lumineux que nous voyons nous-mêmes, qu'ils n'en voient pas d'autres, ou, pour mieux dire, qu'il n'y a de lumineux, pour les animaux, que ceux que nous appelons ainsi.

Voilà pour la philosophie naturelle; mais quel parti tirerons-nous de ces expériences au point de vue de la physiologie humaine? Et d'abord, pourquoi ne voyons-nous pas certains rayons du spectre? Ce peut être pour trois raisons : 1° parce que ces rayons sont réellement invisibles, c'est à dire incapables d'ébranler notre rétine; 2° parce que, dans le spectre, leur intensité est trop faible, et qu'il en est d'eux comme de la lumière blanche par trop atténuée; 3° parce qu'ils sont interceptés par les milieux réfringents de notre œil, ce qui nous ramène à la seconde raison.

Pour les rayons ultra-violets, la question d'intensité domine; en augmentant celle-ci, nous pouvons arriver à voir jusqu'à des vibrations dont la longueur d'onde n'est que de deux cent vingt millioniëmes de millimètre (Mascart). Je ferai cependant observer que cette visibilité n'est peut-être possible qu'à cause de la fluorescence considérable des milieux de l'œil, qui allonge les ondes lumineuses; dans tous les cas, il est à remarquer qu'aucune sensation colorée nouvelle n'a ainsi été obtenue.

Quant aux rayons ultra-rouges, il est probable qu'ils sont réellement invisibles, et qu'au-delà d'une longueur d'environ huit cent dix millioniëmes de millimètre (Helmholtz), les ondes éthérées sont incapables d'exciter notre rétine. Il est bien vrai que les milieux transparents de l'œil en interceptent la plus grande partie; mais il résulte des expériences de Franz (1) qu'une très notable proportion les traverse encore, et cependant notre rétine ne nous en avertit pas. Il est à désirer, cependant, qu'on dispose des expériences

(1) *Ueber die Diathermasie der Medien des Auges* (Poggendorff's Ann. vol. 115, p. 226; 1862).

spéciales dans le but d'augmenter considérablement l'intensité de la source des rayons ultra-rouges, et de voir alors si notre œil en percevra l'existence.

Mais à défaut de ces expériences directes, nos recherches sur les Daphnies fournissent à l'étude de cette question un appoint qui n'est pas à négliger; car, puisque les limites de visibilité semblent être les mêmes pour nous et pour des animaux dont l'œil sans liquides est si différent du nôtre, ne trouvons-nous pas là une raison de plus pour supposer que le rôle des milieux de l'œil est tout à fait secondaire, et que la visibilité tient à l'impressionnabilité de l'appareil nerveux lui-même?

Nous en arrivons donc à établir un rapport constant et très remarquable entre une certaine région du spectre et la matière nerveuse; entre la force vive de certains rayons, et l'impressionnabilité de cette matière, d'où résulte la transmission, la sensation, la perception, autant de manières d'être de cette force vive. Mais, avant d'en arriver à cette formule générale, reprenons les expériences avec nos Daphnies; elles ne nous ont pas tout donné.

Je disais tout à l'heure que les rayons jaunes attiraient beaucoup plus vite les Daphnies que ne font les rayons bleus ou violets. Le docteur Krishaber, qui assistait à ces expériences, me donna l'idée de faire tomber le spectre tout entier sur un vase à glaces parallèles, afin de mieux voir comment mes animaux se comporteraient en présence des divers rayons. Je pris donc une cuve dont la longueur avait environ deux fois la longueur du spectre au lieu où elle l'interceptait; le spectre tombait au milieu de la cuve, dont les deux extrémités se trouvaient ainsi dans l'obscurité.

Or, les Daphnies qui peuplaient l'eau de la cuve ne tardèrent pas à se grouper d'une manière extrêmement curieuse. L'immense majorité se plaça dans le jaune, le vert, l'orangé; c'était une agitation, un grouillement extraordinaires. Une assez grande quantité se voyaient encore dans le rouge, un certain nombre dans le bleu, quelques-unes, de plus en plus rares, à mesure qu'on s'éloignait, dans les régions plus réfrangibles du violet et de l'ultra-violet; au-delà du rouge, au-delà de l'ultra-violet, dans les régions invisibles, en un mot, on n'en trouvait que d'isolées, en promenade accidentelle. En un mot, la région la plus lumineuse du spectre, était, pour ces Daphnies, la même que pour nous. Ces animaux se

comportaient comme l'auraient fait une masse d'hommes qui, éclairés par un spectre immense, et voulant lire un livre, par exemple, s'approcheraient tous du jaune et s'éloigneraient du violet.

L'appréciation si diverse de l'intensité des diverses couleurs, question qui préoccupe tant les physiologistes et les physiciens, n'est donc pas particulière à notre espèce ni en rapport avec une propriété particulière des milieux réfringents de notre œil ou une structure particulière de notre rétine elle-même. Elle est générale, elle est la même chez les êtres les plus différemment constitués; elle est, par suite, probablement la même chez tous les animaux.

Ainsi donc ce sont, chez tous les animaux, les rayons d'une même force vive qui occasionnent la sensation lumineuse maximum; ces rayons correspondent à la région orangé-jaune-vert du spectre; le pouvoir éclairant, bien connu de cette région, agit donc sensiblement avec la même intensité relative chez tous les animaux.

La méthode d'expériences que j'ai employée, prête, je le sais, à des objections sérieuses. En effet, j'ai pris des animaux aquatiques, et mes observations ont été faites dans l'eau. Or, l'eau intercepte, comme on le sait, la plus grande partie des rayons calorifiques obscurs; le verre lui-même les arrête en assez forte proportion. Je pourrais répondre que mes vases étaient en verre mince et que mes animaux se tenaient, dans certains cas, si près de la paroi, que la couche d'eau que la lumière avait à traverser était presque nulle. Mais je préfère déclarer que je tenterai de reproduire ces expériences, dans une campagne prochaine, en me mettant à l'abri de ces causes d'erreur.

Je renoncerai donc aux animaux aquatiques, et choisirai certains insectes aériens; j'espère que l'étude de divers animaux qui fuient la lumière avec presque autant d'ardeur que les Daphnies la cherchent, me fournira des résultats intéressants, et dont je m'empresserai de faire part à la Société.

Quoi qu'il en soit, les faits que j'ai ci-dessus rapportés peuvent être résumés dans les formules suivantes, que j'énonce seulement sous la réserve des observations précédentes :

A. — Tous les animaux voient les rayons spectraux que nous voyons.

B. — Ils ne voient aucun de ceux que nous ne voyons pas.

C. — Dans l'étendue de la région visible, les différences dans le pouvoir éclairant des différents rayons colorés sont les mêmes pour eux et pour nous.

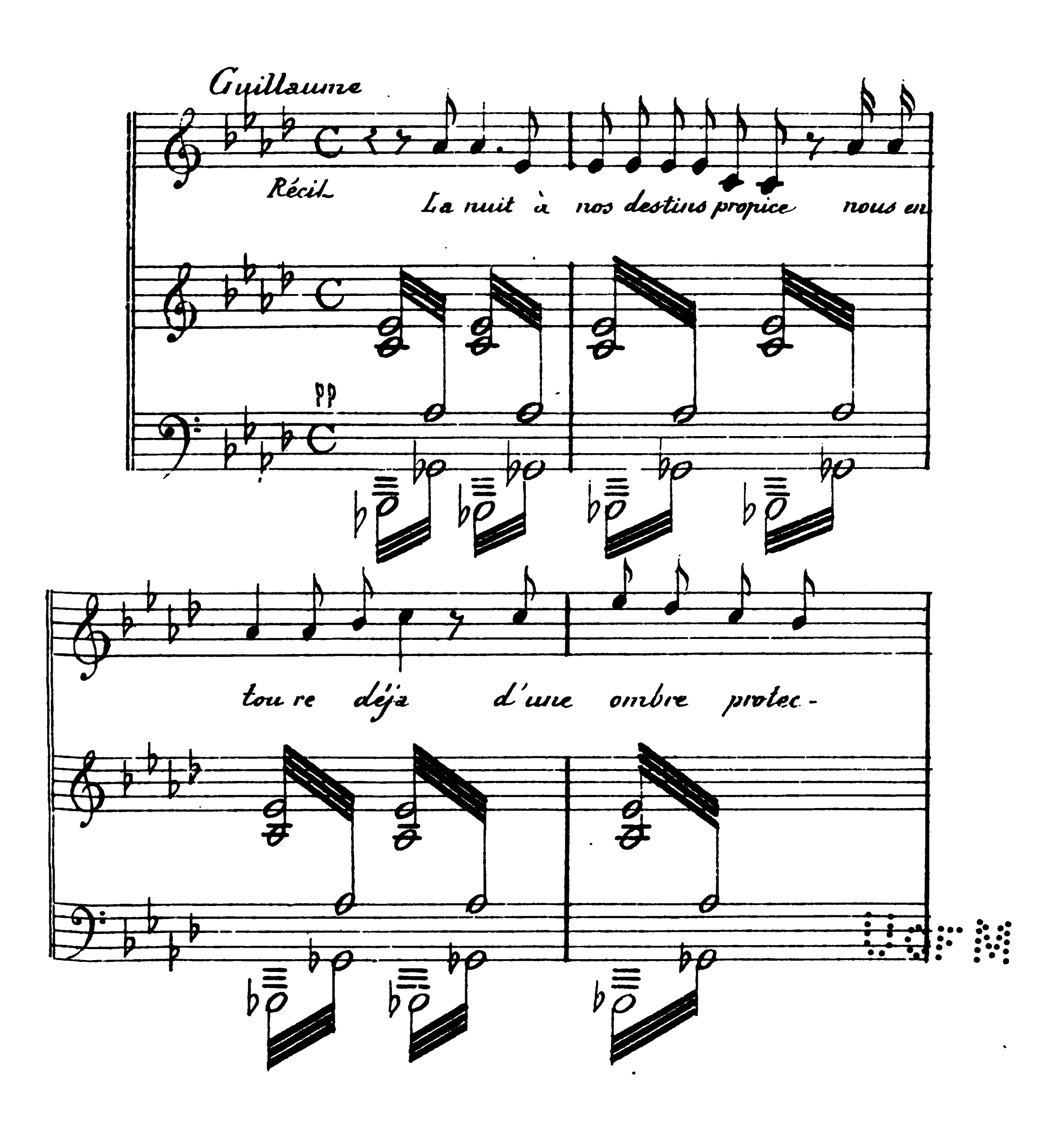
En d'autres termes, il existe entre la force vive de certaines vibrations éthérées, d'une part, et, d'autre part, la constitution de la matière nerveuse, envisagée soit dans certaines de ses terminaisons périphériques, soit dans certains centres nerveux, des rapports tels, que cette force vive puisse se transformer en impressions et donner naissance à des sensations et à des perceptions identiques pour chaque vibration prise en particulier.

Paris, février 1870.

FRAGMENT DE GUILLAUME-TEL

(Rossini)

Ton de LA b. (Sensible dure: Sol b).



FRAGMENT DES HUGUENOTS

(Meyerbeer)

Ton de LA (Sensible dure : Sol naturel)



EXEMPLES

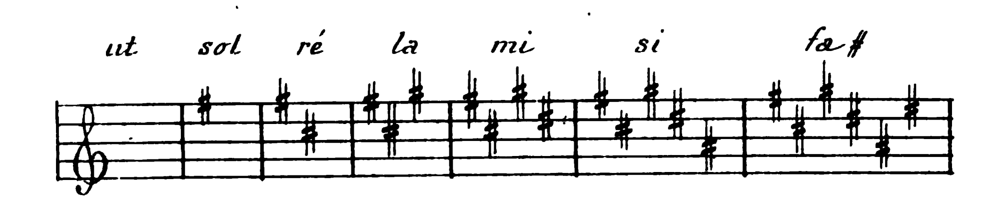
DE DEMI-TONS ALTÉRÉS

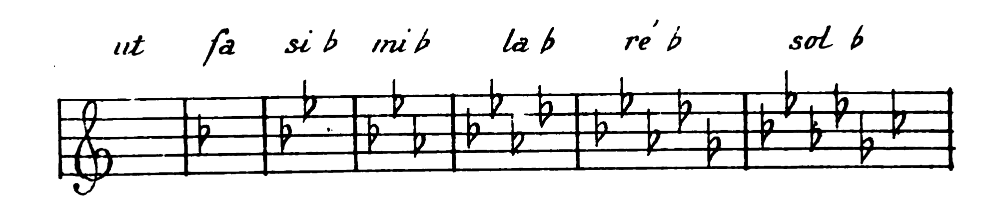
tirés de la Méthode de Berbiguier

P. 235



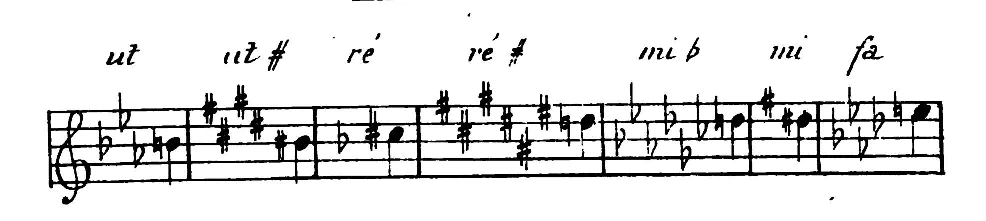
Tons Majeurs





Tons Mineurs

avec l'indication de la septième ou de la sensible qui les caractérise.





UE

NS

; le

JE DE 12

ɪNS TOUS LES TONS

; les uns réduits à le même dénominateur.

	1	9	**10**	11	**12**	**1₂**
Fa #	**68**	108	**114**	120	**128**	**136**
		$\frac{27}{17}$	$\frac{57}{34}$	$\frac{30}{17}$	$\frac{32}{[illegible]}$	**2**

Tableau n° 2.

ÉNÉRA

RAPPORTS GÉOMÉTRI

natique à sons vavris entre la sensible dure
n tonique.

Les rapports géométriqnateurs pour les exprimer. Ces dénominateurs se correspondent dans l'és de simplicité des rapports qu'ils concourent à exprimer.

Sol		♭		×			Si		♭	×	#		Ut_2
72	73	74	75	76	8	89	90	91	92	93	94	95	96

SUR UNE FORMULE DE GAUSS

PAR M. F. FRENET.

On connaît l'importance de la formule donnée par Gauss pour exprimer le produit des rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface. Elle est, sans contredit, un des instruments analytiques les plus précieux de la géométrie. Seulement, le grand nombre de termes qu'elle contient la rend peu commode pour la mémoire et permet difficilement de l'appliquer dans toute sa généralité. On se propose de la présenter, sans restriction aucune, sous une forme réunissant à la fois la concision et la symétrie.

Considérons un point m appartenant à une surface rapportée à trois axes rectangulaires. On peut supposer que les coordonnées x, y, z, de ce point sont des fonctions de deux variables indépendantes u et v, regardées elles-mêmes comme les *coordonnées curvilignes* du point. Ces nouvelles coordonnées, on le sait, déterminent sur la surface une infinité de courbes formant deux séries distinctes : pour la première, u est variable, v demeure constant ; c'est l'inverse pour la seconde. En un point quelconque de la surface, il passe une courbe de chaque espèce ; nous désignerons respectivement par mA et mB celles qui sont relatives au point m.

Si l'on représente généralement par f' la dérivée par rapport à u d'une fonction quelconque f des variables u et v, par $f_{,}$ la dérivée de cette fonction par rapport à v, on a les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} dx = x'du + x_{,}dv, \\ dy = y'du + y_{,}dv, \\ dz = z'du + z_{,}dv, \end{cases}$$

d'où

$$(2)\qquad ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

en posant

$$(3)\quad \mathrm{E} = x'^2 + y'^2 + z'^2,\quad \mathrm{F} = x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,},\quad \mathrm{G} = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2.$$

Les formules (1) et (2) s'appliquent en particulier aux lignes mA et mB; et si l'on désigne respectivement par ds_u et ds_v les éléments de ces courbes relatifs au point m, on a les équations

$$ds_u = \sqrt{\mathrm{E}}du,\quad ds_v = \sqrt{\mathrm{G}}dv,$$

et aussi

$$(5)\qquad \frac{dx}{ds_u} = \frac{x'}{\sqrt{\mathrm{E}}},\quad \frac{dy}{ds_u} = \frac{y'}{\sqrt{\mathrm{E}}},\quad \frac{dz}{ds_u} = \frac{z'}{\sqrt{\mathrm{E}}},$$

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds_v} = \frac{x_{,}}{\sqrt{\mathrm{G}}},\quad \frac{dy}{ds_v} = \frac{y_{,}}{\sqrt{\mathrm{G}}},\quad \frac{dz}{ds_v} = \frac{z_{,}}{\sqrt{\mathrm{G}}}.$$

Les équations (5) déterminent les cosinus directeurs de la tangente en m à la courbe mA, c'est à dire les cosinus des angles que cette tangente fait avec les axes des x, des y et des z. Nous convenons d'ailleurs, pour abréger, de conserver toujours ce même ordre, en énonçant les trois cosinus qui définissent une direction quelconque. Les équations (6) déterminant aussi les cosinus directeurs de la tangente à la courbe mB, ceux de la normale à la surface seront, pour une direction de cette normale convenablement choisie,

$$(7)\qquad \frac{y'z_{,} - z'y_{,}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}},\quad \frac{z'x_{,} - x'z_{,}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}},\quad \frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}.$$

Si, à l'exemple de Gauss, on désigne par $\frac{1}{K}$ le produit des rayons de courbure principaux de la surface, et qu'on pose en outre $\sqrt{EG - F^2} = \mu$, la formule en question peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad 4\mu^4 K = {} & E(E_{,}G_{,} - 2F'G_{,} + G'^2) \\
& + F(E'G_{,} - E_{,}G' - 2E_{,}F_{,} + 4F'F_{,} - 2F'G') \\
& + G(E'G' - 2E'F_{,} + E_{,}^2) \\
& - 2(EG - F^2)(E_{,,} - 2F'_{,} + G'').
\end{aligned}
$$

La transformation projetée est fondée sur le calcul des ***rayons de courbure géodésique*** ρ_u et ρ_v des lignes mA et mB. Or, en général, pour un point d'une courbe appartenant à une surface donnée, le rayon de courbure géodésique est égal au rayon de courbure ordinaire divisé par le cosinus de l'angle du plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface en ce point. Si donc ω_u est l'angle de la contingence de la courbe mA au point m, φ_u l'angle des deux plans dont on vient de parler, il en résulte

$$(9) \qquad \rho_u = \frac{ds_u}{\omega_u \cos \varphi_u} = \frac{\sqrt{E}\,du}{\omega_u \cos \varphi_u},$$

et une expression analogue pour ρ_v.

Pour calculer ρ_u, désignons par l, m, n, les cosinus directeurs définis par les équations (5). On aura

$$(10) \qquad l = \frac{x'}{\sqrt{E}}, \quad m = \frac{y'}{\sqrt{E}}, \quad n = \frac{z'}{\sqrt{E}}.$$

D'autre part, on sait que les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur de la courbe mA au point m ont pour expressions

$$\frac{mdn - ndm}{\omega_u}, \quad \frac{ndl - ldn}{\omega_u}, \quad \frac{ldm - mdl}{\omega_u}.$$

Or, on déduit des équations (10)

UE

NS T

; les

Tableau n° 1.

JE DE 12

NS TOUS LES TONS

; les uns réduits à le même dénominateur.

	1	9	10	11	12	12
Fa #	68	108	114	120	128	136
		$\frac{27}{17}$	$\frac{57}{34}$	$\frac{30}{17}$	$\frac{32}{17}$	2

$$m\,dn - n\,dm = \frac{y'dz' - z'dy'}{E},$$

$$n\,dl - l\,dn = \frac{z'dx' - x'dz'}{E},$$

$$l\,dm - m\,dl = \frac{x'dy' - y'dx'}{E}.$$

D'où, en tenant compte des expressions (3) et (7) et profitant de la symétrie, qui permet de ne pas écrire tous les termes,

$$\begin{aligned}\mu E \omega_u \cos\varphi_u &= (y'dz' - z'dy')(y'z_{,} - z'y_{,}) + \cdots \\ &= x_{,}[(x'^2 + y'^2 + z'^2)dx' - x'(x'dx' + y'dy' + z'dz')] + \cdots \\ &= E(x_{,}dx' + y_{,}dy' + z_{,}dz') - \frac{F}{2}\,dE.\end{aligned}$$

Si l'on remplace, dans cette équation, $\omega_u \cos\varphi_u$ par sa valeur $\frac{\sqrt{E}\,du}{\rho_u}$ tirée de (9), il vient

$$\frac{\mu\sqrt{E}}{\rho_u} = x_{,}\frac{dx'}{du} + y_{,}\frac{dy'}{du} + z_{,}\frac{dz'}{du} - \frac{F}{2E}E'.$$

Or, le trinome

$$x_{,}\frac{dx'}{du} + y_{,}\frac{dy'}{du} + z_{,}\frac{dz'}{du}$$

s'exprime facilement au moyen des quantités E et F. On tire en effet de la deuxième équation (3)

$$x_{,}\frac{dx'}{du} + y_{,}\frac{dy'}{du} + z_{,}\frac{dz'}{du} + x'\frac{dx_{,}}{du} + y'\frac{dy_{,}}{du} + z'\frac{dz_{,}}{du} = F'.$$

On a, d'ailleurs, par la nature même des coefficients x', y', z', $x_{,}$, ...,

$$\frac{dx_{,}}{du} = \frac{dx'}{dv}, \quad \frac{dy_{,}}{du} = \frac{dy'}{dv}, \quad \frac{dz_{,}}{du} = \frac{dz'}{dv},$$

d'où

$$x'\frac{dx_{,}}{du} + y'\frac{dy_{,}}{du} + z'\frac{dz_{,}}{dv} = \frac{1}{2}E_{,};$$

par suite,

$$x_{,}\frac{dx'}{du}+y_{,}\frac{dy'}{du}+z_{,}\frac{dz'}{du}=\mathrm{F}'-\frac{1}{2}\mathrm{E}_{,},$$

ce qui donne enfin

$$(11)\qquad 2\mu\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_u}=2\mathrm{F}'-\mathrm{E}_{,}-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{E}'.$$

Un calcul tout à fait semblable pour la courbe $m\mathrm{B}$ conduirait à la relation

$$(12)\qquad 2\mu\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{\rho_v}=-\left(2\mathrm{F}_{,}-\mathrm{G}'-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}\cdot\mathrm{G}_{,}\right).$$

Lorsqu'on suppose $\mathrm{F}=0$, comme on fait le plus souvent, les deux équations précédentes se réduisent à

$$\frac{2\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{G}}}{\rho_u}=-\mathrm{E}_{,},\qquad \frac{2\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_v}=\mathrm{G}',$$

et la formule de Gauss peut alors s'écrire

$$\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}}=\frac{d}{dv}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_u}-\frac{d}{du}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{\rho_v},$$

relation remarquable donnée par M. Puiseux.

Dans le cas général, l'expression

$$\frac{d}{dv}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_u}-\frac{d}{du}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{\rho_v},$$

qui vient de celle-ci

$$\frac{d}{dv}\cdot\frac{1}{2\mu}\left(2\mathrm{F}'-\mathrm{E}_{,}-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{E}'\right)+\frac{d}{du}\cdot\frac{1}{2\mu}\left(2\mathrm{F}_{,}-\mathrm{G}'-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}\cdot\mathrm{G}_{,}\right),$$

conduit à un résultat qui mérite également d'être signalé. En effet, si l'on examine avec soin le développement des calculs indiqués dans cette dernière expression, que nous désignerons

par M, on trouve que la différence $2\mu K - 2M$ peut être mise sous la forme très simple

$$(13)\quad \frac{d}{du}\left(\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{dv}\log\frac{\sqrt{EG}}{F}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{du}\log\frac{\sqrt{EG}}{F}\right).$$

On déduit immédiatement de là

$$2\mu K = \frac{d}{du}\cdot\frac{1}{\mu}\left(F_{,} - G' + F.\frac{d}{dv}\log\sqrt{\frac{E}{G}}\right)$$
$$+\frac{d}{dv}\cdot\frac{1}{\mu}\left(F' - E_{,} + F.\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{G}{E}}\right),$$

ou bien

$$(14)\quad 2\mu K = \frac{d}{du}\cdot\frac{1}{\mu}\left(F.\frac{d}{dv}\log F\sqrt{\frac{E}{G}} - G'\right) + \frac{d}{dv}\cdot\frac{1}{\mu}\left(F.\frac{d}{dv}\log F\sqrt{\frac{G}{E}} - E_{,}\right).$$

Cette équation est précisément celle que l'on se proposait d'établir; on voit qu'elle remplit toutes les conditions de la transformation annoncée.

On peut d'ailleurs s'assurer, par un calcul direct, qu'elle coïncide avec la formule de Gauss. Pour le faire voir, multiplions les deux membres par $2\mu^3$; le second membre peut alors être considéré comme un trinôme $A + B + C$, dans lequel on a

$$A = \mu^3\,\frac{d}{du}\cdot\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{dv}\log\frac{E}{G} + \mu^3\,\frac{d}{dv}\,\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{du}\log\frac{G}{E},$$
$$B = 2\mu\mu'\,(F_{,} - G') - 2\mu\mu_{,}\,(F' - E_{,}),$$
$$C = 2\mu^2\,(2F'_{,} - G'' - E_{,,}).$$

Cela posé, si l'on tient compte de la formule

$$2\mu\,d\mu = G\,dE + E\,dG - 2F\,dF,$$

on trouve

$$2\mu^3.\frac{d}{du}\,\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{dv}\log\frac{E}{G} = 2GE_{,}F' - 2EF'G_{,} + FE'G_{,}$$
$$- FE_{,}G' + \frac{EF}{G}G'G_{,} - \frac{FG}{E}E'E_{,}.$$

La considération de la symétrie permet de déduire de là, sans calcul, la valeur de

$$2\mu^2 \frac{d}{dv}\frac{F}{\mu}\cdot\frac{d}{du}\log\frac{G}{E},$$

ce qui donne immédiatement pour A l'expression

$$E(F_{,}G' - F'G_{,}) + F(E'G_{,} - E_{,}G') + G(E_{,}F' - E'F_{,}).$$

On a, d'autre part,

$$2\mu\mu'(F_{,} - G') = E(F_{,}G' - G'^2) + F(2F'G' - 2F'F_{,}) + G(E'F_{,} - E'G'),$$

et, par suite,

$$2\mu\mu'(F' - E_{,}) = G(E_{,}F' - E_{,}^2) + F(2E_{,}F_{,} - 2F'F_{,}) + E(F'G_{,} - E_{,}G_{,}),$$

d'où :

$$B = E(G'^2 - F_{,}G' - F'G_{,} + E_{,}G_{,}) + F(4F'F_{,} - 2F'G' - 2E_{,}F_{,}) + G(E_{,}^2 - E_{,}F' - E'F_{,} + E'G').$$

En ajoutant à C les valeurs trouvées pour A et pour B, on voit que le trinôme A + B + C est identique au second membre de l'équation (8), et c'est ce qu'il fallait démontrer.

L'équation (14) peut encore être présentée sous une autre forme, qui mérite d'être signalée. Observons, en effet, qu'en désignant par ω l'angle des courbes mA et mB, on a

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{GE}};$$

d'où :

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{F}{\mu}\frac{d}{du}\log\frac{\sqrt{EG}}{F}, \qquad \frac{d\omega}{dv} = \frac{F}{\mu}\frac{d}{dv}\log\frac{\sqrt{EG}}{F}.$$

Il suit de là que l'expression (13) est égale à $2\frac{d^2\omega}{du\,dv}$, et qu'on a par suite

$$2\mu K = 2M + 2\frac{d^2\omega}{du\,dv} = \frac{d}{dv}\frac{2\sqrt{E}}{\rho_u} - \frac{d}{du}\frac{2\sqrt{G}}{\rho_v} + 2\frac{d^2\omega}{du\,dv},$$

ou bien :

$$2\mu K = \frac{d}{dv}\left(\frac{d\omega}{du} + \frac{2\sqrt{E}}{\rho_u}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{d\omega}{dv} - \frac{2\sqrt{G}}{\rho_v}\right).$$

Ce résultat renferme comme cas particulier la formule élégante de M. Puiseux.

Observons, enfin, que si l'on pose

$$\rho_u = \frac{ds_u}{d\tau_u}, \qquad \rho_v = \frac{ds_v}{d\tau_v},$$

$d\tau_u$ et $d\tau_v$ désignant ce qu'on peut appeler les *angles de contingence géodésique* des courbes mA et mB au point m, la dernière équation se ramène à cette forme très simple :

$$\mu K = \frac{d^2(\omega + \tau_u - \tau_v)}{du\,dv}.$$

RECHERCHES

SUR LA GÉNÉRATION

DES MOLLUSQUES GASTÉROPODES

PAR J.-M. PEREZ,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

---

§ I. — De la fécondation.

La génération des Mollusques Gastéropodes est un des points de la physiologie animale qui ont le plus exercé la sagacité des naturalistes, et, malgré les nombreuses recherches dont elle a été l'objet (1), cette difficile question est encore bien loin d'être complètement élucidée.

Depuis le fait établi par von Siebold et par Laurent, de la production simultanée des ovules et des spermatozoïdes dans un seul et même organe, la *glande hermaphrodite*, diverses tentatives ont été faites pour expliquer l'utilité de la copulation chez des animaux où les deux éléments de la génération se trouvent primitivement mélangés.

Meckel, dans ce but, alla même jusqu'à nier la réalité de ce mélange, regardant la glande hermaphrodite comme formée de deux glandes unisexuées, distinctes, invaginées l'une dans l'autre, ainsi que leurs conduits excréteurs. L'interprétation de Meckel, adoptée d'abord par beaucoup d'anatomistes, a été infirmée par toutes les recherches récentes.

(1) Voir l'historique très bien fait par M. Baudelot, dans ses *Recherches sur l'appareil générateur des Mollusques Gastéropodes. (Annales des Sciences naturelles*, 4e série, t. 19.)

Gratiolet émit l'opinion que le spermatozoïde demeurait sans action sur l'ovule dans la glande hermaphrodite et dans le conduit excréteur commun, et que l'inertie de l'agent fécondateur devait être attribuée à l'imperfection de son développement. Il essaya d'établir, en effet, que le spermatozoïde subit dans la poche copulatrice une métamorphose, au terme de laquelle seulement il devient apte à la fécondation.

Mais ce que Gratiolet prenait pour des spermatozoïdes métamorphosés, n'est autre chose que des infusoires, ainsi que l'a démontré Baudelot, dont l'excellent travail sur l'appareil générateur des Gastéropodes a définitivement fait justice de l'hypothèse anatomique de Meckel, aussi bien que de l'hypothèse physiologique de Gratiolet. S'autorisant de ce fait, que, chez les divers animaux, l'œuf n'est, en général, fécondé qu'au terme de sa maturation, Baudelot attribue à l'immaturité de l'ovule sa non-fécondation, dont Gratiolet trouvait la cause dans l'imperfection du spermatozoïde. Cette manière de voir semble être tout à fait plausible. Mais quelle est la destination du sperme déposé dans la poche copulative au moment du rapprochement? A défaut de faits positifs, Baudelot s'en réfère à la supposition déjà émise par Lacaze-Duthiers, relativement à la fécondation du Pleurobranche, et que ce savant anatomiste, avec une sage réserve, a formulée dans les termes suivants :

« La fécondation a-t-elle lieu pendant l'accouplement, ou » bien le sperme déposé dans la poche copulatrice est-il versé » au moment de la sortie des œufs, et de leur passage dans » cette annexe femelle qui les entoure de mucosités?

» A toutes ces questions, il n'est possible de répondre » qu'hypothétiquement. Mais, très probablement, si le même » animal ne peut se suffire, le sperme déposé dans la poche » copulatrice doit féconder les œufs à mesure qu'ils sortent. » Très probablement aussi, un accouplement doit suffire à » plusieurs pontes et à plusieurs fécondations [1]. »

Ainsi, le sperme déposé au moment du rapprochement dans la poche copulatrice, séjournerait plus ou moins longtemps

[1] *Histoire anatomique et physiologique du Pleurobranche orange.* (*Ann. des Sc. nat.*, 4e série, t. 11.)

dans cette cavité, attendant, pour les féconder au passage, les œufs mûrs qui, plus tard, descendront de l'oviducte.

Des faits assez nombreux, que j'ai observés chez des Arions et des Hélices, m'ont démontré que, chez ces animaux, les choses ne se passent point de la sorte.

En examinant le contenu de la poche copulatrice d'une Limace rouge *(Arion rufus)*, six heures après l'accouplement (11 septembre), je trouvai le spermatophore ouvert et presque complètement vide. Le sperme qui en était sorti formait un amas pelotonné, irrégulier, occupant la région inférieure du réservoir séminal, de manière à obstruer l'orifice du canal excréteur. En saisissant cette masse spermatique avec des pinces, j'entraînai à la suite un épais faisceau de spermatozoïdes, qui était profondément engagé dans le canal de la poche, d'où je le vis distinctement sortir. Ce fait, qui me surprit beaucoup, m'engagea à visiter l'intérieur du vestibule : j'y trouvai encore une assez grande quantité de spermatozoïdes bien vivants.

Était-ce un accident? Était-ce une phase normale et inconnue de la génération que je venais de surprendre? — J'avais rencontré mon Arion en état d'accouplement; peut-être avais-je hâté le terme de cet acte en inquiétant l'animal; le spermatophore avait pu se rompre et laisser échapper son contenu avant d'atteindre sa destination, la poche copulatrice.

Afin de savoir à quoi m'en tenir, j'ai examiné les organes génitaux de divers Gastéropodes, tous capturés en état de copulation [1]. J'ai eu soin de sacrifier les différents sujets après des intervalles inégaux depuis le moment de leur capture, et par suite de leur accouplement. Si le spermatozoïde abandonne normalement la poche copulatrice pour se transporter en d'autres points de l'appareil génital, je devais, de la sorte, pouvoir le suivre pas à pas, pour ainsi dire, dans cette migration.

Dans le compte-rendu qui va suivre des résultats de mes observations, j'ai éliminé toutes celles qui, pour diverses cau-

[1] Je dois à M. Ch. Kirsch, mon élève, d'avoir pu observer un nombre considérable d'Hélices accouplées, qu'il s'est appliqué à rechercher et à recueillir avec un zèle empressé dont j'ai plaisir à le remercier ici.

ses, ne m'ont pas paru présenter un caractère suffisant de certitude. Mais je m'empresse d'ajouter que je n'ai eu garde de comprendre dans cette suppression les données qui, bien que certaines, n'en étaient pas moins d'une interprétation difficile ou gênante pour la théorie que la généralité des faits me conduisait à admettre. La simplicité et l'évidence n'y pouvaient gagner qu'au préjudice de l'exactitude.

1° *Arion rufus,* ouvert 30 heures après l'accouplement. 14 octobre. — Poche copulatrice remplie d'un liquide trouble, légèrement coloré en brun; renfermant encore le spermatophore, peu altéré, mais complètement vidé, et une quantité de sperme assez considérable, accumulée dans le fond inférieur de la poche, contre l'orifice du canal. Tout le canal lui-même est rempli d'un bout à l'autre par un cordon épais et continu de spermatozoïdes parfaitement agglutinés. Dans le vestibule, au fond des replis de la paroi, rampent plusieurs traînées de spermatozoïdes, dont un faisceau a pénétré jusqu'à environ 2 millimètres dans l'intérieur de l'oviducte.

— Cette première observation déjà reproduit point par point celle qu'il s'agissait de contrôler. Le fait que celle-ci m'avait montré n'était donc point accidentel, et la supposition qu'il avait fait naître était justifiée. Bien plus, non seulement du sperme sort de la poche copulatrice peu après l'accouplement, mais la présente observation semble même indiquer que ce sperme se dirige vers l'oviducte.

2° *Helix nemoralis.* 15 avril. Deux individus accouplés sont violemment séparés, et les spermatophores extraits aussitôt. — Quelques heures après, les deux sujets sont disséqués. Pas de sperme dans la poche copulatrice, qui ne contient que la matière brune ordinaire et des infusoires fort vifs. Rien dans le canal de la poche, ni dans la région infra-prostatique de l'oviducte.

— Cette expérience n'est que la contre-épreuve des faits précédents.

3° *Helix aspersa.* Accouplée le 15 avril; sacrifiée seulement quatre jours après, afin de voir ce qu'est devenu le sperme qui, peu de temps après l'accouplement, a dû sortir de la poche copulatrice. — Le spermatophore est presque complètement

dissous dans la poche; on en voit les débris au milieu d'une masse blanchâtre composée de spermatozoïdes emmêlés, plus ou moins altérés. Dans le canal de l'oviducte (région infra-prostatique) se trouve une traînée de sperme. Je négligeai de porter l'investigation plus haut, jusque dans la région prostatique.

— La vacuité du canal de la poche, la présence de sperme dans la partie inférieure de l'oviducte, s'expliquent par la date déjà ancienne de l'accouplement. Le sperme sorti de la poche avait eu le temps de parcourir toute la longueur de son canal où il n'y en avait plus; mais il s'en trouvait encore dans le bas de l'oviducte, soit qu'il fût là, parvenu au terme de sa migration, soit qu'il fût encore en train de la poursuivre, ce que les faits ultérieurs permettront de décider.

On pourrait se demander si le sperme trouvé dans l'oviducte, au lieu de provenir de la poche copulatrice, ne pourrait pas appartenir à l'individu même et ne serait pas descendu de sa glande hermaphrodite le long de la portion boursoufflée de l'oviducte. Mais ce que nous avons déjà vu plus haut ne laisse pas, je crois, de probabilité à cette supposition.

Remarquons enfin l'état d'altération déjà sensible du sperme resté dans la poche, fait important que nous constaterons encore plus d'une fois dans la suite de ces observations, et qui montre bien que le sperme n'attend point dans cette cavité le moment opportun pour la fécondation des ovules.

4° *Helix nemoralis*. De quatre sujets accouplés le 15 avril, trois sont ouverts le 21. — Chez aucun d'eux le spermatophore n'a pénétré jusque dans la poche copulatrice; il s'est arrêté dans le canal propre de la poche, l'extrémité du nodus située à quelques millimètres de ce réservoir.

A. Sur l'un des sujets, le spermatophore est presque intact, à peine ramolli à la surface. En le pressant, le sperme s'en échappe abondamment. Pas de traces de spermatozoïdes dans la poche copulatrice, ni dans le canal accessoire, ni dans l'oviducte, ce qu' explique parfaitement l'état de conservation du spermatophore.

B. Le spermatophore est notablement altéré. Il contient encore une certaine quantité de sperme dans son intérieur;

mais il en existe beaucoup tout autour de lui, diffus dans toute la longueur du canal, mais non en traînées régulières. Dans la région infra-prostatique de l'oviducte, je ne pus en découvrir, mais du fond de la partie prostatique, j'en ai extrait une grosse masse pelotonnée, mêlée de débris d'épithéliums. Plus haut, dans l'oviducte, je n'ai point trouvé de spermatozoïdes.

C. Spermatophore dans le même état que chez le sujet précédent. Du sperme dans la région infra-prostatique de l'oviducte. Pas de sperme dans la poche copulatrice.

— Les trois dernières observations semblent montrer que le spermatophore se dissout bien plus difficilement dans le canal de la poche copulatrice que dans la poche elle-même. Dans la poche, en effet, le spermatophore est déjà ouvert un petit nombre d'heures après la copulation, et, dès le lendemain, il est considérablement altéré. Quand il est resté dans le canal, au contraire, nous voyons qu'au bout de six jours il peut être si peu altéré qu'il n'est pas encore ouvert. Ces faits sembleraient indiquer que l'arrêt du spermatophore dans le canal de la poche copulatrice n'est point normal; il est possible que, dans les trois cas indiqués, cet arrêt fût la conséquence de quelque trouble apporté dans la copulation, par le fait de la capture et du transport des hélices, bien que toutes les précautions eussent été prises pour ne les point inquiéter, et que leur séparation eût été spontanée.

Un fait important à noter est l'absence de sperme dans la poche copulatrice des trois sujets. En faut-il conclure que les spermatozoïdes devenus libres dans le canal de la poche peuvent bien descendre le long de ce conduit vers le vestibule, comme s'ils venaient de la poche elle-même, mais qu'ils ne remontent point vers le réservoir spermatique? Si naturelle que cette interprétation paraisse, si conforme qu'elle soit d'ailleurs à ce fait dès ce moment démontré, je crois, que le sperme n'est point tenu en réserve dans la poche copulatrice pour servir plus tard à la fécondation, nous verrons cependant (observation n° 10) qu'il n'est pas possible de l'admettre d'une manière absolue.

5° *Helix aspersa.* Accouplée le 2 mai, sacrifiée le 3. — Cette observation est une des plus intéressantes. Le canal accessoire

de la poche copulatrice attira tout d'abord mon attention par l'existence de ces dilatations ou nodosités signalées par Baudelot, comme indiquant la présence d'un spermatophore. L'ouverture du canal montra en effet un spermatophore déjà sensiblement altéré et à peu près vide de son contenu. Des traînées de sperme existaient dans toute la longueur du conduit, si ce n'est dans le tiers supérieur, occupé seulement par les débris du nodus.

Le canal propre de la poche copulatrice contenait aussi du sperme dans toute sa longueur, et en quantité variable suivant la région. Enfin la poche elle-même en renfermait une masse considérable. Mais, chose importante à noter, j'y constatai aussi la présence de la portion flagellaire d'un spermatophore.

La partie inférieure ou infra-prostatique de l'oviducte contenait du sperme en grande quantité; il y en avait encore dans la partie dilatée ou prostatique, jusqu'à une hauteur de 15 millimètres environ.

— Le spermatophore se trouvant dans le canal accessoire, il y a lieu de se demander comment le canal propre de la poche était gorgé de sperme; comment il y en avait également une grande quantité dans la poche elle-même. Le sperme de la poche, celui de son canal, provenaient-ils du canal accessoire? La supposition serait à la rigueur admissible; mais si l'on considère que le sperme de la poche et celui du canal propre, ajoutés à celui que contenaient le canal accessoire et l'oviducte, formaient, en somme, une masse de beaucoup supérieure à celle que peut contenir le spermatophore, on conçoit sans peine que tout ce sperme ne pouvait avoir une même origine. Selon toute probabilité, il provenait de deux accouplements distincts.

Je présume donc que le sperme de la poche copulatrice et celui du canal propre venaient d'un accouplement antérieur, datant au plus de deux ou trois jours avant celui qui avait porté le spermatophore dans le canal accessoire. Cette interprétation est d'ailleurs corroborée par ce fait, sur lequel j'ai appelé l'attention : l'existence, dans la poche copulatrice, de débris de la partie flagellaire d'un spermatophore, partie qui résiste beaucoup plus longtemps que le nodus à la dissolution. On

conçoit de la sorte que la plénitude du canal propre, au moment de la dernière copulation, ait pu empêcher le spermatophore dé pénétrer dans ce conduit, et l'ait fait passer dans le canal accessoire.

Pour ce qui est du sperme contenu en abondance dans la région infra-prostatique de l'oviducte, il pouvait provenir de l'un et de l'autre accouplement à la fois, mais vraisemblablement du dernier pour la plus grande part. Celui de la région boursoufflée de l'oviducte ne pouvait guère appartenir qu'au précédent, si même il ne remontait pas à un autre plus ancien encore.

6° *Helix aspersa.* Accouplée le 2 mai avec la précédente, sacrifiée le 9. — Poche copulatrice sans traces évidentes de sperme; une simple couche blanchâtre assez mince autour de la matière brune, un peu plus épaisse du côté de l'orifice du canal. Pas de débris certains du spermatophore. Rien dans le canal de la poche ni dans le tube latéral. Rien non plus dans la portion infra-prostatique de l'oviducte ni plus haut, autant, du moins, que j'aie pu le constater. Rien, en un mot, qui eût pu révéler qu'un accouplement avait eu lieu sept jours auparavant. — Que conclure de cet état des organes génitaux? Est-ce que le sperme aurait pu disparaître complètement en huit jours? La chose est possible sans doute, car nous verrons plus bas un exemple à peu près semblable (n° 8 B); il faut remarquer toutefois que la dissolution du sperme dans la poche est d'ordinaire beaucoup plus lente.

7° *Helix aspersa.* Accouplée le 12 mai.

Ce sujet se trouvait, au moment où il me fut apporté, dans un état fort surprenant. Rentré dans sa coquille, il portait sous lui deux spermatophores à l'un desquels tenait encore un corps blanchâtre, qui n'était autre chose qu'un pénis arraché par sa base. L'autre spermatophore, à moitié libre, tenait à l'animal par sa partie flagellaire engagée dans l'orifice génital. Le spermatophore qui portait le pénis arraché, au contraire, avait son extrémité nodale dans cet orifice, tandis que sa portion flagellaire était libre au dehors.

Après avoir extrait les deux spermatophores, j'examinai attentivement celui qui portait le pénis arraché, et je constatai

qu'il remplissait complètement la cavité de cet organe jusqu'au fond de l'extrémité du flagellum.

La présence insolite de ces deux spermatophores, autant que leur situation, indiquaient évidemment qu'un accident quelconque était venu troubler et interrompre l'accouplement de notre hélice, dont le partenaire, malheureusement, ne me fut point apporté. Une séparation brusque et violente avait dû se produire au moment où chaque hélice avait son spermatophore engagé par le nodus dans l'organe femelle de l'autre. L'un de ces spermatophores, celui du sujet que j'avais sous les yeux, cédant d'abord à la traction, s'était en partie dégagé de l'intérieur de son pénis, puis retenu par l'extrémité flagellaire enroulée, il avait complètement retiré son nodus du corps de l'autre hélice. Le spermatophore de celle-ci, retenu par le nodus dans l'organe femelle de la première, n'avait pu, d'autre part, glisser dans l'intérieur du pénis. Le pénis avait dès lors été arraché à sa base et entraîné tout entier à l'extérieur avec son flagellum, après rupture du canal déférent et du muscle rétracteur. Et il était arrivé de la sorte que l'hélice que j'avais en ma possession portait deux spermatophores tenant à l'orifice génital, l'un par l'extrémité flagellaire, l'autre par le nodus; le second revêtu presque en entier par le pénis qui l'avait produit.

— Ce sujet ne fut disséqué que le 16 mai, soit 4 jours après l'accouplement.

La poche copulatrice contenait, dans le fond, la matière brune ordinaire; vers le bas, une assez grande quantité de matière blanchâtre au milieu de laquelle une matière d'un blanc pur ayant tout à fait, à l'œil nu, l'aspect du sperme, mais composée, au microscope, de fines granulations arrondies, brillantes, agglutinées entre elles par une matière visqueuse assez tenace. Ces granulations formaient, par places, des agglomérations plus ou moins globuleuses nettement limitées. C'était là, à n'en pas douter, un résidu de sperme désorganisé. On distinguait, du reste, au milieu de cette substance, de rares débris mal définis de spermatozoïdes. L'animal s'était donc déjà accouplé une autre fois quelque temps avant le jour de sa capture. Ce sperme altéré ne pouvait en effet avoir rien de commun avec le dernier accouplement, dont les conséquences

avaient été forcément nulles, les deux spermatophores ayant été enlevés par moi lorsque l'hélice me fut apportée.

8° *Helix aspersa.* Deux sujets trouvés le 12 mai dans la matinée, apportés plusieurs heures après; on voyait sous chacun d'eux 1 centimètre et demi environ de l'extrémité du spermatophore enroulée, qui acheva de pénétrer peu à peu dans l'orifice génital.

A. Un des sujets est disséqué le 19 mai. — Poche copulatrice, canal propre, engorgés par de la matière brune. Celle qui est contenue dans la poche forme une masse énorme qui, coupée en deux, se montre vivement colorée en rougeâtre à l'intérieur.

Le canal accessoire est d'un diamètre extraordinaire, distendu en certains points par de la matière brune, identique à celle de la poche. Le microscope fait voir çà et là, au milieu de cette substance, des débris de spermatophore jaunis ou brunis, des épithéliums altérés, colorés de la même façon, enfin du sperme, surtout dans la moitié inférieure du tube; le fond aveugle en est entièrement dépourvu.

L'oviducte est comme atrophié, et coloré en roussâtre. La cause de cet aspect m'est absolument inconnue. La région infra-prostatique contient une certaine quantité de sperme. Vers le quart inférieur de la région prostatique, je parviens à découvrir à grand peine quatre ou cinq spermatozoïdes.

— L'absence de sperme dans la poche copulatrice et dans son canal propre, l'état de réplétion de ces organes, la nature du contenu du canal accessoire, indiquent que l'accouplement du 12 mai avait porté le spermatophore dans le canal accessoire, qui avait dû en recevoir au moins un autre encore antérieurement. Le sperme qui se trouvait dans les régions inférieures de l'oviducte provenait donc du canal accessoire, et non de la poche copulatrice.

Cette observation, comme celle du n° 5, montre nettement que lorsque le canal propre obstrué ne peut livrer passage au spermatophore, ce corps passe dans le canal accessoire.

B. Deuxième sujet, ouvert le 21 mai. — Pas de sperme dans la poche copulatrice, ni dans son canal, ni dans le tube latéral. Mais il s'en trouve un peu dans le bas de l'oviducte.

— Dans cet individu, le spermatophore avait dû arriver dans la poche copulatrice, bien qu'il me fût impossible d'en trouver des débris évidents dans cette cavité; le canal accessoire était, en effet, absolument vide. — Quant au sperme resté dans la poche, il avait déjà disparu complètement. Nous avons déjà constaté un fait semblable (nº 6). Nous aurons à revenir sur cette donnée importante.

9º *Helix aspersa*. Deux individus, accouplés le 14 juillet, séparés avec effort : le fouet du spermatophore reste à l'extérieur.

A. Sujet examiné le 16 juillet. Poche copulatrice très petite, contenant très peu de matière brune, laquelle est enveloppée d'une couche de matière blanchâtre. Celle-ci, composée de débris manifestes de spermatophore et de spermatozoïdes altérés, dont la queue est amincie d'une manière très sensible et remarquable par sa transparence, indice d'une dissolution déjà avancée. Pas d'infusoires.

Le canal propre de la poche ne contient pas de sperme.

Le canal accessoire est distendu par places par des grumeaux transparents qui s'écrasent et diffluent dès qu'on les saisit pour les isoler au dehors. Pas de spermatozoïdes dans toute la longueur. Mais il s'en trouve dans la portion infra-prostatique de l'oviducte.

— Les dilatations variqueuses du canal accessoire m'avaient fait supposer qu'un spermatophore se trouverait contenu dans ce canal; je fus donc assez surpris de n'en pas rencontrer le moindre débris. Je suis néanmoins convaincu que la matière gélatineuse qui produisait ces varicosités n'était autre chose que le résidu d'un spermatophore presque entièrement dissous, et provenant d'un accouplement déjà ancien. Quant au spermatophore introduit par le dernier accouplement, il était entré dans la poche copulatrice, où ses débris étaient faciles à reconnaître.

B. Sujet sacrifié le 17 juillet, soit trois jours après l'accouplement. — Poche copulatrice peu volumineuse encore, contenant pourtant un peu plus de matière brune que celle du sujet précédent, avec des débris confus de spermatophore et un nombre immense de têtes de spermatozoïdes sans traces des

filaments. Ces têtes sont plongées au milieu d'une matière finement granuleuse, parsemée de corpuscules plus volumineux. (Fig. 4.)

Le canal de la poche, le canal latéral, ne contiennent pas de sperme.

Il n'y en a point non plus dans la région infra-prostatique de l'oviducte. Mais un peu plus haut, dans le fond du cul-de-sac inférieur de la région prostatique, se trouve un amas de spermatozoïdes. Il s'en trouve encore plus haut, à 1 centimètre environ de ce cul-de-sac.

10° *Helix aspersa.* Deux individus accouplés le 24 juillet à 8 heures du matin.

A. L'un d'eux, sacrifié le lendemain, 25, à 3 heures de l'après-midi. Cet individu est très petit; sa coquille n'a point la bouche faite encore, et rien n'indique qu'elle soit sur le point de se former. On sait que l'achèvement de la bouche est généralement considéré comme caractérisant l'âge adulte. Cette hélice, cependant, n'en était point à son premier accouplement, ainsi qu'on va le voir. — L'appareil génital tout entier est d'un volume médiocre. La glande albuminipare est longue seulement de 7 à 8 millimètres, et sa largeur n'excède pas 2,5 millimètres; elle est légèrement jaunâtre. L'exiguïté de cet organe me frappa d'autant plus, qu'un développement énorme, au contraire, est, dit-on, son état ordinaire à l'époque des amours.

Mais ce ne sont là que les moindres des singularités que présente cette hélice.

La poche copulatrice, large de 3,2 millimètres, d'aspect blanchâtre, est distendue par une matière d'un blanc sale, qui n'est autre chose que du sperme. Ce sperme est évidemment mort. Les spermatozoïdes, en faisceaux lâchement enchevêtrés à la surface, plus pressés et plus compactes dans l'intérieur de la masse, non seulement sont immobiles, mais en outre ils présentent des signes certains d'altération : les filaments sont amincis, très pâles, à contours mal arrêtés; plusieurs ont perdu leurs têtes que l'on voit çà et là au milieu de quelques infusoires bien vivants. Je ne parviens à constater que des débris douteux du nodus d'un spermatophore.

Le canal de la poche est gorgé, dans toute sa longueur, de spermatozoïdes très vifs, en longs faisceaux.

Le canal accessoire contient encore du sperme vivant, avec des débris bien évidents d'un spermatophore.

La région du canal propre de la poche, inférieure à l'insertion du canal accessoire, est fortement distendue : en ce point se trouve le nodus altéré, baigné de sperme.

La portion infra-prostatique de l'oviducte contient encore du sperme, toujours vivant, mais pas en quantité bien considérable. Il s'en trouve aussi un grumeau, visible à l'œil nu, à une certaine distance du fond du cul-de-sac de la région prostatique.

Jusque là, rien d'extraordinaire. Mais dans ce conduit très court, qui part du point de confluence de l'oviducte avec le canal de la poche, existait encore une quantité considérable de sperme. Il y en avait dans le vestibule; il y en avait à la base de l'appareil mâle, dans la gaîne du pénis; plus haut encore, tout autour de l'extrémité invaginée du pénis lui-même. En outre, un cordon de sperme bien lié, assez cohérent pour résister à la traction, était engagé dans l'orifice pénien lui-même, d'où je le retirai en partie avec des pinces. Le pénis, ouvert longitudinalement, montra une certaine quantité de sperme dans sa partie la plus dilatée, jusque vers le niveau de l'orifice du canal déférent.

— Il s'agit maintenant d'expliquer les faits que nous venons de constater. Négligeons d'abord l'appareil mâle, pour nous occuper seulement de l'appareil femelle. Ici l'interprétation ne présente aucune difficulté.

La poche copulatrice, le canal accessoire, contiennent, l'une et l'autre, des débris de spermatophore et du sperme. L'hélice s'était donc accouplée deux fois au moins. Le spermatophore, dans la poche copulatrice, est à peine reconnaissable, et le sperme y est très sensiblement altéré; le spermatophore du canal accessoire, au contraire, est peu modifié, et le sperme qui le baigne est vivant. Le spermatophore et le sperme de la poche copulatrice provenaient donc de l'accouplement le plus ancien; le spermatophore et le sperme du canal accessoire du plus récent, de celui qui s'était accompli la veille. Remarquons que, le nodus de ce dernier spermatophore se trouvant dans la

partie du canal propre sous-jacente à l'insertion du canal accessoire, cette partie inférieure du canal propre et le canal accessoire faisaient, dans le cas qui nous occupe, l'office d'un canal unique.

Mais d'où provenait le sperme contenu dans les autres parties du canal propre, jusqu'à la poche copulatrice? Était-il sorti de la poche, comme nous l'avons toujours vu jusqu'à l'heure? Je pense qu'on ne saurait l'admettre. L'ensemble des faits observés chez les sujets où les choses se passent normalement nous montre que le sperme issu de la poche peu après l'accouplement, pour passer dans l'appareil femelle, ne séjourne pas longtemps dans le canal; il ne peut s'y trouver encore, et surtout dans le voisinage de la poche, lorsque celui qui est resté dans ce réservoir a eu le temps de s'altérer d'une manière sensible. L'état de destruction assez avancé des spermatozoïdes, dans la poche copulatrice, nous indique donc que ceux qui en avaient dû sortir peu après le premier accouplement, avaient depuis longtemps disparu du canal. Le sperme vivant qui s'y trouvait avait dû, par conséquent, refluer de la base de ce tube, qui contenait le nodus, vers la poche copulatrice. Un peu plus tard, il aurait vraisemblablement atteint cette cavité, où j'aurais alors trouvé quelques spermatozoïdes vivants, circonstance qui aurait singulièrement embrouillé les choses, et rendu peut-être toute explication impossible pour moi.

Voici donc ce qui avait dû se produire lors du dernier accouplement. Le nodus s'était arrêté tout à la base du canal propre de la poche, engagé en partie dans le canal accessoire. Là donc avait dû s'épancher toute la masse spermatique, et, vu le médiocre volume des organes, elle avait dû se répandre de là dans toutes les voies ouvertes, plus encore sans doute par un effet de pression, que par suite de la progrèssion normale des spermatozoïdes. De là donc venait tout le sperme vivant contenu, non seulement dans le canal propre, le canal accessoire, la portion infra-prostatique de l'oviducte, mais encore dans les régions inférieures de l'appareil génital.

La présence de sperme dans l'appareil mâle est plus difficile à expliquer. Trois hypothèses sont possibles : ou bien notre jeune hélice n'avait pas formé de spermatophore lors du dernier

accouplement, le sperme n'avait pu ainsi sortir de la cavité du pénis pour passer dans l'organe femelle de l'autre individu, et était obligé de s'écouler lentement dans le vestibule; ou bien l'accouplement s'était accompli selon les règles, un spermatophore avait été produit et émis au dehors, et le sperme contenu dans le pénis s'y était accumulé depuis cet accouplement, descendu de la glande hermaphrodite par le canal déférent; ou enfin la même cause qui avait chassé le sperme apporté par la dernière copulation de l'organe femelle dans le vestibule, l'avait encore poussé plus loin jusque dans l'appareil mâle.

La première supposition ne peut être admise. En effet, ainsi que nous le verrons plus bas, le sujet avec qui notre hélice s'était accouplée, et qui fut disséqué quelques jours plus tard, avait reçu un spermatophore.

En second lieu, le sperme du pénis était-il venu de la glande hermaphrodite postérieurement au dernier accouplement, pour fournir à un accouplement futur? Bien que la présence de quelques rares spermatozoïdes dans le canal déférent semble prêter quelque appui à cette hypothèse, elle n'est pas exempte de graves difficultés. Remarquons d'abord que ce n'est point de la sorte que les choses se passent d'ordinaire : je n'ai jamais vu, ni personne que je sache, du sperme s'accumulant dans le pénis, en dehors du temps de la copulation, pour y attendre la formation du spermatophore. C'est la seule fois qu'il me soit arrivé d'y en rencontrer, en pareille circonstance, sur environ 150 hélices que j'ai examinées. L'état même du sperme que contenait le pénis s'oppose à cette interprétation. Il était en effet manifestement diffus dans la cavité du pénis et autour de la gaîne et ne présentait point cet arrangement en forme de long écheveau ployé sur lui-même, qu'affecte le sperme dans l'intérieur du spermatophore (Baudelot), disposition que, du reste, nous essaierons d'expliquer plus loin. De plus, ce sperme était animé de mouvements très vifs, ce qui n'a pas lieu non plus dans le sperme enfermé dans le spermatophore. Enfin, s'il eût été destiné à un accouplement ultérieur, s'il se fût trouvé là normalement, il aurait dû rester et séjourner dans l'organe formateur du spermatophore et non passer dans le vestibule et même plus loin.

La présence de sperme dans l'intérieur du pénis ne saurait donc être, en aucun cas, un phénomène physiologique normal. Venait-il néanmoins, par suite d'une cause inconnue, mais accidentelle, de la glande hermaphrodite, et était-il en train de s'écouler vers le vestibule au moment où l'hélice fut disséquée? On pourrait à la rigueur l'admettre. Mais faire intervenir dans l'explication une nouvelle anomalie, ne me semble pas nécessaire, quand il en existe déjà une première, qui a pu amener toutes les autres. Il se peut très bien que la plénitude des régions inférieures de l'organe femelle et du vestibule ait obligé une certaine quantité de sperme à remonter dans la gaîne du pénis et dans le pénis lui-même. Nous arrivons ainsi à cette conséquence qui, *à priori*, pourrait paraître bizarre, que le sperme contenu dans le pénis n'est pas du sperme de notre hélice. Telle me paraît être cependant l'explication la plus simple et la plus naturelle des faits présentés par cette singulière observation.

Nous avons noté la présence d'une certaine quantité de sperme dans l'intérieur de la portion infra-prostatique de l'oviducte. Il provenait certainement du second accouplement, et c'était là peut-être le seul phénomène normal qu'il y ait eu dans cet acte et dans ses conséquences. — Quant au sperme pelotonné trouvé dans la partie boursoufflée de l'oviducte, et qui n'était nullement en rapport avec la traînée que contenait le tube inférieur, il provenait probablement de la première copulation.

B. Sujet accouplé avec le précédent, le 24 juillet, sacrifié le 27. Il est de taille ordinaire; la bouche est faite.

La poche copulatrice renferme des débris d'un spermatophore et quelques spermatozoïdes isolés, morts, mais bien entiers, au milieu d'une matière concrète, blanchâtre, paraissant être un résidu de sperme altéré.

Le canal propre de la poche paraît absolument vide; en examinant attentivement le contenu, obtenu par le râclage, je découvre cependant un spermatozoïde au milieu de cellules épithéliales.

Le canal accessoire, à partir de 2 centimètres du fond, contient des débris de spermatophore (partie flagellaire) et du sperme vivant.

La région infra-prostatique de l'oviducte ne me montre pas de sperme. La portion boursoufflée est énormément distendue, surtout vers le bas, et je m'attends à y trouver des œufs. Il n'y a qu'une matière fluide, visqueuse, chargée de grumeaux de granulations blanches, opaques. Sur toute la longueur, jusque vers le niveau de la glande de l'albumine, existent de longs faisceaux de spermatozoïdes. Jamais encore je n'avais trouvé de sperme ni si haut dans l'oviducte, ni en aussi grande quantité.

Le pénis, le canal déférent, sont entièrement vides, comme à l'ordinaire.

— La matière concrète et les restes d'un spermatophore, que contenait la poche copulatrice, indiquent un accouplement assez ancien. Le sperme vivant du canal accessoire et le spermatophore moins altéré, indiquent un accouplement plus récent, celui du 24 juillet.

Le sperme que contenait dans toute sa longueur la portion prostatique de l'oviducte, provenait du canal accessoire. Depuis l'époque déjà éloignée du dernier accouplement, le faisceau de sperme en migration avait eu le temps de franchir la portion infra-prostatique, qui était restée vide. Nous avons vu cependant (n°s 3, 4 C, 8 A et B), que la progression du sperme n'est pas toujours aussi rapide.

Les quelques spermatozoïdes morts, mais sans désorganisation encore évidente, qui se trouvaient dans la poche copulatrice avec du sperme depuis longtemps détruit, ne pouvaient dater de la même époque que ce sperme désorganisé. Étaient-ils venus du canal accessoire en même temps que d'autres spermatozoïdes passaient de ce tube dans l'oviducte? Il est possible qu'au moment de cette migration, une bifurcation se soit produite dans le faisceau descendant, à sa sortie de l'orifice du canal accessoire, et que l'une des deux branches s'étant déviée, ait remonté le long du canal propre jusque dans la poche copulatrice. Si c'est bien là, en effet, ce qui a eu lieu, ce qu'il n'est pas malheureusement possible d'établir d'une manière positive, il serait démontré que la poche copulatrice a la propriété de détruire le sperme beaucoup plus promptement que le canal accessoire.

11° *Helix aspersa.* Accouplée le 27 juillet, sacrifiée le 28.

La poche copulatrice, assez volumineuse, contient une grande masse de matière brune. A sa base, contre l'orifice du canal propre, est une grande quantité de sperme avec des débris du nodus. La première partie du canal contient un gros faisceau de sperme, en continuité avec celui de la poche. Ce faisceau paraît arrêté dans sa descente par un corps rigide, qui n'est autre chose qu'un dard; fait important et point unique, sur lequel nous aurons à revenir dans une autre partie de ce travail. Au delà de ce dard, c'est à dire à 1 centimètre et demi à peu près de lá poche, est un gros bouchon de sperme avec quelques fragments de la partie flagellaire du spermatophore. Plus bas, point de sperme.

Le sperme de la poche copulatrice, celui de son canal, m'ont paru encore vivants.

Le canal accessoire ne contenait pas de sperme. Il n'y en avait pas non plus dans la partie inférieure de l'oviducte, ce qui devait être, attendu que le sperme en train de descendre dans le canal de la poche n'avait pas encore dépassé la région supérieure de ce conduit.

Les observations qui viennent d'être rapportées sont loin de présenter cette uniformité qui satisfait l'esprit et lui impose une conclusion aussi naturelle que certaine. Un fait néanmoins domine l'extrême variabilité des résultats accessoires, et se distingue par sa généralité, sinon par sa constance. Ce fait est la migration du sperme dans l'intérieur de l'appareil femelle, après la copulation. Contrairement à l'opinion généralement professée, le sperme n'est point destiné à séjourner dans la poche copulatrice, pour féconder les œufs au moment de leur descente dans le vestibule. Peu de temps après la copulation, le spermatophore rompu a laissé échapper son contenu dans la poche; une partie de ce contenu, généralement la plus petite, pénètre dans le canal propre de ce réservoir, le descend dans toute sa longueur, jusqu'à l'orifice vestibulaire de l'oviducte; il s'introduit enfin dans ce dernier conduit, où on le retrouve plus tard, à une hauteur plus ou moins grande.

Le reflux du sperme dans l'oviducte, son ascension dans ce

conduit à la rencontre des ovules, me semblent suffisamment établis par les faits exposés plus haut. J'irai toutefois au devant d'une objection qui pourrait à la rigueur être faite. Ne pourrait-on pas admettre que le sperme trouvé dans la partie prostatique de l'oviducte, et même plus bas, vînt du canal excréteur de la glande hermaphrodite plutôt que de la poche copulatrice? On conçoit, en effet, que les œufs, lors de leur descente dans un conduit qui leur est commun avec le sperme, en puissent entraîner une certaine quantité. Et en effet cette possibilité a été déjà énoncée par Baudelot entre autres. Mais le fait lui-même n'a point été constaté, car malheureusement on ignore encore d'une manière absolue comment et en quelles circonstances s'opère la descente des ovules dans la partie supérieure de l'oviducte. Par contre, il est facile de constater, ainsi qu'on l'a vu plus haut, que le sperme passe de la poche ou du canal accessoire dans l'oviducte, et l'on peut suivre toutes les phases de cette migration. En regard d'une simple hypothèse se pose donc un fait positif. De plus, alors que je trouvais du sperme dans l'oviducte, il m'a toujours été impossible, malheureusement, d'y découvrir un œuf, malgré le vif désir que j'en avais, car le but que je m'étais tout d'abord proposé, en commençant ces recherches, était précisément d'observer le développement de l'œuf depuis sa sortie de la glande hermaphrodite jusqu'à sa maturation dans l'intérieur de l'oviducte.

Le sperme que l'on trouve, après l'accouplement, dans le canal de la poche ou dans les régions inférieures de l'oviducte, n'est point dilué, ses éléments ne sont pas dissociés dans un liquide. Au contraire, ce sperme est encore plus cohérent, plus parfaitement lié que dans le canal excréteur de la glande hermaphrodite. Il affecte la forme d'un cordon d'inégal diamètre, qui résiste assez à la traction pour qu'on puisse souvent, dans une dissection à la loupe, l'isoler en parfaite continuité, sur une longueur plus ou moins considérable. Il arrive même plus d'une fois qu'on peut saisir, dans la partie inférieure du canal de la poche, un gros faisceau de spermatozoïdes engagé par son extrémité dans l'orifice de l'oviducte. La chose est particulièrement facile chez les Arions, à cause de la brièveté et de la largeur du canal de la poche; j'ai pu quelquefois, chez ces

animaux, sans trop de précautions, dégager dans toute sa longueur un épais cordon de sperme s'étendant depuis la poche copulatrice jusque dans l'oviducte.

Ce sperme sorti de la poche copulatrice ne diffère en rien, par la forme de ses éléments, de celui qui remplit le canal excréteur de la glande hermaphrodite. Mais tandis que, dans ce dernier conduit, les spermatozoïdes sont toujours immobiles, ceux que l'on rencontre soit dans le canal de la poche copulatrice, soit dans l'oviducte, sont constamment animés de mouvements plus ou moins vifs, que l'on voit même persister quelques instants dans l'eau. Ils paraissent d'ailleurs moins sensibles à l'action de ce liquide; ils ont moins de tendance à s'enrouler, à se ployer sur eux-mêmes en se tordant en double spirale, effet que l'eau produit presque instantanément sur les spermatozoïdes de la glande hermaphrodite ou de son canal efférent.

Le transport du sperme de la poche copulatrice dans l'oviducte étant un fait établi, il vient naturellement la question de savoir quel en est le mécanisme. Il n'est autre que la progression même des spermatozoïdes. Remarquons tout d'abord que la poche copulatrice ne saurait jouer aucun rôle actif dans ce phénomène : bien que Semper (1) dise y avoir reconnu des fibres musculaires, la flaccidité constante de ses parois témoigne suffisamment de son inertie. C'est tout au plus si l'on peut admettre que la pression des organes voisins sur les parois de la poche favorise l'expulsion d'une certaine quantité de sperme. Mais l'étude microscopique du sperme issu de ce réservoir ne laisse aucun doute sur la réalité de sa progression active.

Nous avons déjà vu que le sperme que l'on trouve dans le canal de la poche ou dans le bas de l'oviducte forme des traînées plus ou moins épaisses, mais très cohérentes. Il est des points, vers son extrémité surtout, où le faisceau spermatique est très ténu, et composé d'un petit nombre seulement de spermatozoïdes. Cette partie plus amincie montre souvent très

(1) Semper, *Beiträge zur Anat. und Physiol. der Pulmonaten. Zeitschr. f. wiss. Zool.* Band VIII, 1856.

bien que les spermatozoïdes, loin d'être irrégulièrement enchevêtrés, sont comme enlacés les uns dans les autres, les têtes paraissant généralement tournées dans le même sens, ce que l'on reconnaît à la manière dont quelques-unes se détachent sur les côtés du faisceau (fig. 1).

Mais c'est surtout dans l'oviducte que leur arrangement est facile à reconnaître. Le sperme que l'on rencontre quelques jours après l'accouplement dans la région prostatique, y forme ordinairement des sortes d'écheveaux si grêles, qu'ils peuvent ne contenir que trois ou quatre spermatozoïdes au même niveau (fig. 2). On voit alors parfaitement que ces filaments, enroulés en spirale les uns autour des autres, ont tous la tête d'un même côté. L'eau qui les tue, les saisit et les fixe dans la disposition qu'ils affectent pendant leur progression commune. En les observant dans le sang du mollusque, on voit plus ou moins longtemps persister leurs mouvements, qui consistent en une sorte de frémissement ondulatoire de peu d'amplitude, se propageant d'avant en arrière. C'est grâce à ces vibrations, assez faibles du reste, qu'ils se déplacent et progressent.

Le sang beaucoup trop visqueux des Hélices ou des Limaces est peu propre cependant à cette étude. Si l'on veut observer directement, et d'une manière très nette, le mode de progression des spermatozoïdes, il n'y a qu'à prendre du sperme dans le conduit efférent de la glande hermaphrodite d'un Planorbe, et l'examiner dans le sang de cet animal. On verra presque aussitôt, de divers points de la masse spermatique, se détacher des faisceaux, qui s'allongent rapidement, émettent de nouveaux fascicules, et forment ainsi des courbes multipliées plus ou moins élégantes, dont l'aspect se modifie constamment (fig. 3). Quelques-unes de ces courbes se contournent au point de se fermer, et l'anneau vivant qui en résulte tourne lentement sur lui-même, jusqu'à ce qu'une ou plusieurs branches s'en détachent et le déforment ou le rompent. Cependant, à mesure qu'ils s'allongent, les faisceaux s'amincissent. Si l'on porte son attention sur leur extrémité, dont la progression est très active, on est témoin d'un spectacle fort remarquable. On dirait que les spermatozoïdes qui forment cette extrémité, agités d'un vif tremblottement, tordus en spirale les uns sur

les autres, font effort pour se dépasser mutuellement; on voit trois ou quatre têtes, dont tantôt celle-ci, tantôt celle-là, dépasse les autres d'une longueur ou deux, pour être dépassée à son tour et laissée en arrière. En même temps, tout le faisceau animé s'agite et se tord, ramenant par instants en arrière l'extrémité amincie, qui pourtant, en définitive, toujours s'allonge et s'étend plus loin.

Ces faits montrent très bien comment s'opère la progression des spermatozoïdes. Le tremblottement ondulatoire dont ils sont animés ne s'opère point dans un plan; il contourne leurs longues queues en spirales, qui, par le seul fait de leur juxtaposition, s'enchevêtrent et obligent les filaments spermatiques à se tordre en faisceau. Ainsi agrégés, chacun d'eux trouve sur ceux qui l'entourent un appui pour se porter plus loin, et nécessairement aussi, par moments, un obstacle. Ainsi s'explique comment un spermatozoïde arrivé à l'extrémité du faisceau, tantôt s'élance en avant des autres, tantôt, l'instant d'après, se laisse devancer.

Nous pouvons maintenant, grâce aux données qui précèdent, nous rendre compte de toutes les particularités que présente la migration du sperme. Devenus libres dans la poche copulatrice par la rupture du spermatophore, les zoospermes s'animent au contact du fluide que renferme cette cavité, et leurs mouvements, aveuglément dirigés en tous sens, en amènent un plus ou moins grand nombre à donner dans l'orifice du canal propre. Une fois engagés dans ce conduit, ils le parcourent désormais dans toute sa longueur, en vertu de la tendance qu'ils ont à s'agencer en faisceau. L'obstacle opposé par les parois du tube sert à diriger la progression de ce faisceau, qui ne peut point là, comme dans un espace libre, se dissocier en courbes divergentes, mais simplement en traînées parallèles plus ou moins déliées, que l'on voit souvent ramper au fond des plis longitudinaux dont le canal de la poche est sillonné dans sa région inférieure. Grâce à ces plis, il évite, en le contournant, l'orifice du canal accessoire, qui fait une saillie marquée dans le canal propre (fig. 6 *a*). Dans le vestibule, d'autres plis convergeant vers l'orifice de l'oviducte, l'amènent naturellement dans ce canal (fig. 6 *b*). Ainsi s'opère la migration du sperme dans les

circonstances ordinaires. Un certain nombre de conditions sont nécessaires, on le voit, pour en assurer la régularité et porter le sperme jusque dans la partie supérieure de l'oviducte. On comprend donc qu'en certains cas, le faisceau puisse être dévié de la direction utile, et nous en avons vu précédemment un exemple (nº 10).

Quand le spermatophore a été déposé dans le canal accessoire, les choses se passent de la même façon. Les spermatozoïdes qui prennent la direction descendante arrivent dans le canal propre, et la saillie obliquement inférieure de l'orifice de débouchement du premier tube dans le dernier, les porte dans la direction du vestibule, d'où ils passent, comme précédemment, dans l'oviducte. Il pourrait arriver néanmoins que le faisceau descendant s'égarât en totalité ou en partie, et refluât vers la poche. Le cas doit être très rare. L'observation nº 10 nous a cependant montré cette anomalie, compliquée même de beaucoup d'autres.

La sortie des spermatozoïdes de la poche et leur passage dans l'oviducte, résultant uniquement de leur progression active, on ne doit point s'étonner qu'il n'y ait nulle constance, ni dans leur entrée dans le canal propre, ni dans la durée de leur migration, ainsi que les observations nous l'ont montré. Indépendamment des conditions de température ou autres qui peuvent influer sur la vitalité de ces éléments, leur marche est subordonnée à une foule d'accidents que l'on conçoit sans peine. Il peut même se faire qu'en certains cas il ne sorte point de sperme de la poche copulatrice, et c'est peut-être ainsi qu'il nous faut expliquer la vacuité du canal de la poche et de l'oviducte dans le sujet nº 6.

Nous avons déjà vu qu'une partie du sperme apporté par le spermatophore ne sort point de la poche copulatrice. Cette partie est même généralement la plus grande. Le détail des observations rapportées plus haut fait assez pressentir le sort ultérieur qu'elle éprouve. Tout le sperme qui reste dans la poche ne tarde point à s'altérer et à se détruire. Dans les temps chauds, cette destruction paraît être assez rapide. L'observation 9ᵉ, faite sur deux Hélices accouplées en juillet, nous fait voir, le surlendemain de l'accouplement, les spermato-

zoïdes déjà très sensiblement altérés; leur queue amincie est en train de se dissoudre (sujet A); le jour suivant, sur l'autre sujet (B), les queues sont complètement dissoutes, et il ne reste plus que les têtes, déjà atteintes elles-mêmes (fig. 4). Il est digne de remarque que ni l'une ni l'autre de ces Hélices ne contenait, dans la poche copulatrice, un seul de ces microzoaires auxquels Gratiolet attribuait tant d'importance dans sa théorie de la métamorphose. La cause de leur absence m'est du reste absolument inconnue.

Désirant contrôler l'observation que je viens de rapporter, et m'assurer que les corpuscules coniques ou virguliformes qui se trouvaient dans la poche copulatrice du sujet B étaient bien les renflements terminaux des spermatozoïdes, j'essayai d'obtenir artificiellement le même résultat. L'acide acétique me le donna immédiatement. Du sperme pris dans le canal de la glande hermaphrodite et étalé entre deux lames de verre, au contact de l'acide, reproduisit en peu de temps, avec une fidélité singulière, l'aspect du sperme altéré dans la poche copulatrice : une immense quantité de têtes de zoospermes, au milieu d'une substance pâle, finement granuleuse, résidu des filaments. Un peu après, les têtes à leur tour commencèrent à s'altérer. On peut, en se servant d'acide plus ou moins étendu, voir plus ou moins lentement les filaments spermatiques devenir plus transparents et plus minces, et prendre ainsi l'apparence du sperme récemment mort dans la poche copulatrice. Je dirai cependant que le contenu de la poche copulatrice m'a paru avoir une réaction faiblement alcaline.

Lorsque l'altération normale du sperme dans la poche copulatrice est très avancée, lorsqu'il n'y a plus de trace des têtes elles-mêmes, on voit à la place du sperme une masse blanche qui en a conservé l'aspect physique, mais qui se résout au microscope en fines granulations très brillantes dans une substance amorphe, visqueuse, difficile à étaler par la pression (fig. 5). Plus tard encore, cette matière granuleuse s'agglomère en grumeaux plus cohérents; elle roussit peu à peu en se solidifiant, et prend enfin cette teinte brune connue de tous les observateurs. Tant que sa coloration est encore assez claire, on voit au milieu des débris de la portion flagellaire du spermatophore,

débris qui deviennent de plus en plus méconnaissables, à mesure que la teinte de la masse s'assombrit davantage. Cette matière brune est toujours composée de couches superposées plus claires à la surface, plus colorées au centre, dont l'épaisseur est plus considérable du côté de l'orifice du canal de la poche. Ces différentes couches correspondent à des accouplements plus ou moins éloignés; la couche blanche extérieure, quand elle existe, toujours très épaisse dans le bas de la poche, est formée du résidu du sperme et du spermatophore provenant du dernier accouplement. Quand on voit cette couche extérieure et inférieure trancher d'une manière très marquée par sa vive blancheur sur la teinte foncée de la couche immédiatement sous-jacente, c'est le signe d'un accouplement récent, séparé par un long intervalle de l'accouplement précédent. Le cas est particulièrement fréquent soit au printemps, soit après une pluie succédant à une longue sécheresse.

Il n'est pas rare de trouver dans la poche copulatrice, au milieu du sperme frais ou altéré, d'énormes cellules épithéliales, remarquables par leur forme atténuée, qui ont dû s'introduire dans la poche en même temps que le spermatophore, et paraissent provenir des régions inférieures de l'appareil générateur.

Baudelot, dans le travail déjà cité, a plus d'une fois observé dans la poche copulatrice de divers Gastéropodes (*Lymneus stagnalis, Doris tuberculata,* etc.) des spermatozoïdes en voie de destruction. « La plus grande partie du sperme déposé dans » la vésicule copulatrice, dit ce savant anatomiste, paraît se » détruire sans concourir à la fécondation. » (P. 286.) Mais le fait de la migration du sperme lui ayant échappé, et son opinion étant du reste que la fécondation s'opère sur les œufs mûrs, au moment de leur passage dans les régions inférieures de l'appareil femelle, la destruction du sperme dans la poche, qui est corrélative de la migration, ne pouvait avoir pour cet auteur l'importance qu'elle me paraît avoir.

Le sperme se détruisant dans la poche copulatrice et même assez promptement, comme on l'a vu plus haut, on ne peut plus admettre qu'un seul accouplement puisse suffire à plusieurs pontes successives, à moins toutefois qu'elles ne se produisent

à de très courts intervalles. L'étude du contenu de la poche copulatrice fait déjà entrevoir que les accouplements sont multiples chez les Gastéropodes terrestres; nous verrons plus loin d'autres faits venir confirmer cette interprétation, et indiquer même qu'ils sont assez fréquents.

En quel point précis de l'appareil femelle s'opère la rencontre des ovules et des éléments séminaux? Nous avons vu le sperme introduit par la copulation parvenir dans la partie supérieure de l'oviducte, non loin de la glande de l'albumine. Il est donc à présumer que c'est vers ces régions que l'imprégnation s'opère. Mais c'est en vain que j'ai cherché à être témoin du mélange des ovules et des spermatozoïdes mobiles de l'oviducte. Jamais je n'ai rencontré un ovule dans l'oviducte. Jamais je n'en ai découvert dans le canal efférent de la glande hermaphrodite, que j'ai toujours vu gorgé de sperme. Cet insuccès tient-il aux conditions anormales dans lesquelles étaient maintenus les Mollusques, conservés à sec, sans aliments, dans des vases clos? La captivité aura-t-elle mis obstacle à la descente des ovules? Cela est possible; je dirai toutefois que je n'ai pas été plus heureux avec les Hélices prises à l'état de liberté, non accouplées, pour être examinées à l'instant même.

Une hypothèse assez naturelle consisterait à penser que l'émission des deux éléments produits par la glande hermaphrodite n'est pas simultanée, que les ovules ne descendent pas en même temps que le sperme dans le canal efférent. Un auteur a même été plus loin, il y a quelques années : Bourguignat (1) a supposé que la glande hermaphrodite ne fonctionne pas simultanément comme testicule et comme ovaire, en sorte que le Gastéropode androgyne agirait seulement comme individu unisexué au moment du rapprochement. Mais, ainsi que le remarque justement Milne Edwards, « toutes les observations relatives à la coexistence des ovules dans les parties profondes de l'appareil reproducteur sont défavorables à cette manière de voir (2). » J'ajouterai qu'elle semble formellement

(1) *Malacologie de la Grande Chartreuse*, 1864, p. 71.

(2) *Leçons sur la Physiologie et l'Anatomie comparées de l'Homme et des Animaux*, t. IX, p. 365.

en désaccord avec le fait de l'intromission d'un spermatophore dans les organes de chacun des sujets accouplés, non moins qu'avec l'identité, chez l'un et l'autre, des phénomènes consécutifs à cette intromission.

Dans la pensée que ce pourrait être au moment de l'accouplement que le canal efférent, vidé de sperme par la formation du spermatophore, reçoit les ovules venant de la glande hermaphrodite, j'ai ouvert nombre d'Hélices accouplées, aussitôt après les avoir séparées, ou bien après les avoir plongées tout accouplées dans l'alcool. Mais dans tous les cas le canal contenait du sperme. Il est d'ailleurs facile de voir que son contenu est de beaucoup plus considérable que celui du spermatophore. Un accouplement unique est donc loin de pouvoir suffire à vider le canal efférent.

Cependant, comme on voit les Hélices s'accoupler dès le premier printemps, et encore dans les mois les plus chauds de l'année, on pouvait espérer, à la suite d'un assez grand nombre d'accouplements, et à mesure que la saison avancerait, voir le sperme diminuer dans le canal efférent, et laisser enfin le passage libre aux ovules. L'attente a été vaine : toujours du sperme et jamais d'ovules dans le canal.

Ainsi restait absolument indécise la question de savoir en quel instant précis s'opère, chez les Limaces et les Hélices, la descente des ovules, si cette descente est ou non simultanée avec celle du sperme.

N'ayant pu déterminer par l'observation directe le lieu où s'opère la fécondation, j'essayai de tourner en quelque sorte la difficulté, en abordant tout autrement le problème. Je crois l'avoir enfin résolu. Le lecteur voudra bien me permettre d'exposer comment, et à la suite de quelles vicissitudes, ma conviction s'est formée. De même en effet que toute question a son histoire dans la science, elle a la sienne aussi dans l'esprit de chaque chercheur; et si la première est toujours importante, la seconde a quelquefois aussi son intérêt.

On sait que chez divers Gastéropodes, le canal efférent de la glande hermaphrodite forme, à sa partie terminale inférieure, une sorte de talon ou *diverticulum* (V. les planches du Mémoire de Baudelot), très immédiatement appliqué près de la base de

à de très courts intervalles. L'étude du contenu de la poche copulatrice fait déjà entrevoir que les accouplements sont multiples chez les Gastéropodes terrestres; nous verrons plus loin d'autres faits venir confirmer cette interprétation, et indiquer même qu'ils sont assez fréquents.

En quel point précis de l'appareil femelle s'opère la rencontre des ovules et des éléments séminaux? Nous avons vu le sperme introduit par la copulation parvenir dans la partie supérieure de l'oviducte, non loin de la glande de l'albumine. Il est donc à présumer que c'est vers ces régions que l'imprégnation s'opère. Mais c'est en vain que j'ai cherché à être témoin du mélange des ovules et des spermatozoïdes mobiles de l'oviducte. Jamais je n'ai rencontré un ovule dans l'oviducte. Jamais je n'en ai découvert dans le canal efférent de la glande hermaphrodite, que j'ai toujours vu gorgé de sperme. Cet insuccès tient-il aux conditions anormales dans lesquelles étaient maintenus les Mollusques, conservés à sec, sans a[illegible]ments, dans des vases clos? La captivité aura-t-elle mis obsta[illegible] à la descente des ovules? Cela est possible; je dirai toutefois [illegible] je n'ai pas été plus heureux avec les Hélices prises à l[illegible] liberté, non accouplées, pour être examinées à l'instan[illegible]

Une hypothèse assez naturelle consisterait à [illegible] l'émission des deux éléments produits par la gland[illegible] phrodite n'est pas simultanée, que les ovules ne [illegible] pas en même temps que le sperme dans le canal [illegible] auteur a même été plus loin, il y a quelques an[illegible] gnat (1) a supposé que la glande hermaphrodi[illegible] pas simultanément comme testicule et comm[illegible] que le Gastéropode androgyne agirait seulement [illegible] vidu unisexué au moment du rapprochement [illegible] le remarque justement Milne Edwards [illegible] tions relatives à la [illegible] profondes [illegible] manièr[illegible]

(1) [illegible]

(2) [illegible]
Anim[illegible]

en désaccord [illegible], plongés dans
dans les [illegible] rgiquement, qui
qu'avec [illegible] dant et tremblot-
cutifs [illegible] n ligne droite. Là
[illegible] ous n'avons jamais

Dans [illegible] dans l'œuf, peut-être à
[illegible] que souvent nous ayons
du spermatozo[illegible] la tête à la surface de
[illegible] matozoïdes de la vésicule
après [illegible]? Nous ne pouvons le
[illegible] cas ceux qui produisent
[illegible] ont une coque qui s'op-
[illegible] ermatozoïdes devraient sortir
[illegible] du canal de la poche,
[illegible] ducte jusqu'à la vésicule
[illegible] long trajet, Häckel, comme
[illegible] comme impossible, car, au
[illegible] ricule du canal de la poche
[illegible] ces auteurs, et se referme
[illegible] ches faites par nous sur les
[illegible] t confirmée. »

[illegible] us la publication du travail de
[illegible] l'opinion de ces auteurs.
[illegible] avec elle aucune preuve con-
[illegible] ance relativement à la prove-
[illegible] ans le diverticule. S'il est le
[illegible] t, la question demeure tout
[illegible] la copulation. S'il vient du
[illegible] blir, démontrer avant tout
[illegible] ulatrice et gagner l'oviducte.
[illegible] pas suffisante peut-être. Et
[illegible], bien que, frappé de l'accord
[illegible] des auteurs que je viens de
[illegible] ainsi que moi, dupes d'une
[illegible] s qu'ils avaient vus se mou-
[illegible] t point réellement mobiles
[illegible] agités par les cils dont j'avais

L'opinion de Keferstein et Ehlers, déjà réfutée par avance dans mon esprit, n'ébranla donc nullement ma conviction.

Plusieurs mois après, me plaçant à un point de vue tout autre pour envisager la question, j'entrevis la possibilité de la résoudre.

Les difficultés que l'on rencontre chez les Gastéropodes androgynes pour la détermination du lieu de la fécondation ne peuvent pas exister chez les Gastéropodes unisexués, comme les Paludines et les Cyclostomes. Aucun doute d'abord n'est possible relativement au sperme que l'on rencontre dans leurs organes femelles : il ne peut provenir que de l'accouplement. De plus, le lieu où le sperme parvient et stationne, après migration, si tant est qu'elle existe chez ces espèces, doit être aussi le lieu de l'imprégnation. Reconnaître ce point chez les Gastéropodes unisexués serait donc probablement l'avoir par là même découvert chez les Gastéropodes androgynes.

Chez le *Cyclostoma elegans,* il existe une poche copulatrice accolée sous la partie supérieure de l'oviducte ([1]). C'est un sac globuleux, subpyriforme quand il est médiocrement distendu, dont l'extrémité renflée dépasse un peu le fond de l'oviducte, et reçoit sur le côté l'insertion du canal ovarien. Cet organe tranche par sa blancheur mate ou tantôt par sa coloration rougeâtre sur l'oviducte, et l'en fait immédiatement distinguer. Il contient ordinairement une assez grande quantité de sperme. Ici, comme dans les Gastéropodes déjà étudiés, les spermatozoïdes abandonnent donc la cavité où ils ont été déposés lors de la copulation. Mais c'est en vain qu'on les chercherait dans le long sac boursouflé qui représente la portion prostatique de l'oviducte des Gastéropodes hermaphrodites. C'est au-dessus, dans le canal ovarien lui-même que, à l'époque de l'accouplement, on trouve toujours une assez grande quantité de sperme obstruant ce conduit. Ce sperme occupe une station bien déterminée. Le canal ovarien (fig. 7 *c*), continuation directe du cul-de-sac rameux qui constitue l'ovaire (*o*), est un long tube flexueux, grêle et fragile dans sa partie supérieure, se dilatant

([1]) Baudelot pense, à tort selon moi, que la poche copulatrice est absente, et remplacée par la partie inférieure de l'oviducte.

brane vitelline, vésicule et tache germinatives, plongés dans une masse de spermatozoïdes se mouvant énergiquement, qui dardaient la tête de çà et de là, et qui, en roulant et tremblottant de la queue, se portaient en avant en ligne droite. Là nous a paru se faire la fécondation. Mais nous n'avons jamais constaté la pénétration d'un zoosperme dans l'œuf, peut-être à cause de l'obscurité de celui-ci, bien que souvent nous ayons vu de nombreux zoospermes accolés par la tête à la surface de la membrane vitelline... Ces spermatozoïdes de la vésicule séminale viennent-ils du spermatophore? Nous ne pouvons le décider. Ils doivent être dans tous les cas ceux qui produisent la fécondation, car plus bas les œufs ont une coque qui s'oppose à la pénétration. Ainsi les spermatozoïdes devraient sortir du spermatophore, descendre le long du canal de la poche, parcourir toute la longueur de l'oviducte jusqu'à la vésicule séminale. Qu'ils accomplissent ce long trajet, Häckel, comme Swammerdam, ne le regardent pas comme impossible, car, au temps de la fécondation, le diverticule du canal de la poche s'ouvre dans l'oviducte, disent ces auteurs, et se referme ensuite, opinion que les recherches faites par nous sur les Hélices pondeuses n'ont nullement confirmée. »

Personne, que je sache, depuis la publication du travail de Keferstein et Ehlers, n'a mentionné l'opinion de ces auteurs. Et il faut dire qu'elle n'apportait avec elle aucune preuve convaincante. Ils avouent leur ignorance relativement à la provenance du sperme qu'ils trouvent dans le diverticule. S'il est le même que celui du canal efférent, la question demeure tout entière : on ne voit pas l'utilité de la copulation. S'il vient du spermatophore, il faut, pour l'établir, démontrer avant tout qu'il a pu abandonner la poche copulatrice et gagner l'oviducte. Encore cette preuve ne serait-elle pas suffisante peut-être. Et bien que l'ayant acquise moi-même, bien que, frappé de l'accord de mes observations avec celles des auteurs que je viens de citer, je jugeai qu'ils avaient été, ainsi que moi, dupes d'une illusion, et que les spermatozoïdes qu'ils avaient vus se mouvoir dans le diverticulum n'étaient point réellement mobiles par eux-mêmes, mais simplement agités par les cils dont j'avais constaté la présence.

mer aux spermatozoïdes, si l'on fait sortir par pression le sperme que contient le diverticule, on constate d'une manière évidente que les filaments qui le composent sont mobiles. Ils ont toutes les propriétés qui distinguent les spermatozoïdes cheminant dans l'oviducte. Ils ne perdent pas subitement leur mobilité dans l'eau, et on les voit se mouvoir dans ce liquide un temps plus ou moins long. Chez une Hélice qui, accouplée en avril, avait séjourné jusqu'en juillet dans un vase, privée de toute nourriture, des spermatozoïdes pris dans le diverticule conservèrent leur vitalité pendant plus de cinq minutes dans l'eau. Ceux du canal efférent, au contraire, s'enroulent immédiatement au contact de ce liquide, sans donner le moindre signe de mobilité. Il importe, pour constater ces faits, de faire les observations comparatives sur les spermatozoïdes des deux provenances dans l'eau ordinaire. Si l'on se servait du sang du Mollusque, on verrait les spermatozoïdes du canal efférent, normalement immobiles, se mettre eux-mêmes en mouvement, et ils ne se distingueraient plus dès lors de ceux du diverticule. Il faut dire pourtant qu'il est des cas où ces derniers paraissent être aussi absolument immobiles, dès le premier instant où on les observe dans l'eau; mais ils conservent toujours néanmoins cette résistance à l'enroulement, déjà signalée dans les spermatozoïdes en migration, et tout à fait caractéristique.

Nous avons donc le droit de conclure que les spermatozoïdes du diverticule ont la même provenance que ceux de l'oviducte, comme ils ont les mêmes propriétés. Ils viennent de la poche copulatrice et non de la glande hermaphrodite. Ils ont été introduits par l'accouplement, et n'appartiennent pas au sujet qui les porte. C'est donc dans le diverticule, où stationnent ces zoospermes, qu'a lieu la fécondation. Un seul fait resterait à constater, pour que la démonstration ne laissât plus rien à désirer, la présence d'ovules dans le diverticule. Mais si je n'ai pas eu la bonne fortune d'en rencontrer, Keferstein et Ehlers y en ont observé, et l'affirmation de ces auteurs, ajoutée à tout ce que nous avons déjà vu, acquiert une grande importance; elle complète la démonstration.

Encore une difficulté cependant. Le diverticule, réservoir du sperme destiné à la fécondation, doit, à certains moments,

livrer passage au sperme venant de la glande hermaphrodite, et allant dans le pénis fournir à la production du spermatophore. Ce sperme entraînera-t-il celui du diverticule dans sa descente? Ou bien, si ce dernier n'est pas entraîné, grâce à un artifice organique quelconque, ne restera-t-il pas mélangé à une partie du sperme descendant? On vient de voir que le sperme du diverticule se distingue fort bien de celui du canal efférent. Déjà donc, *à priori,* le mélange paraît ne pas exister. Il y a plus : la conformation du diverticule semble rendre ce mélange impossible, et permettre au sperme descendant de passer, sans se trouver en contact avec le sperme contenu dans cet organe.

En effet, la structure du diverticule est loin d'être aussi simple que le pensent les anatomistes qui y voient seulement une dilatation contournée du canal efférent. Cette structure est au contraire assez compliquée et fort difficile à débrouiller. Il m'a fallu beaucoup de temps et de patience pour n'arriver encore qu'à des résultats à moitié satisfaisants. Keferstein et Ehlers, dans le Mémoire déjà cité, paraissent avoir éprouvé les mêmes difficultés, sans avoir pu en triompher : « Malgré beau» coup de peine, disent ces auteurs, nous n'avons pu clairement » reconnaître la structure de ce corps; toutefois, il n'est point » un simple diverticule, mais un canal très entortillé (ein » mehrfach verschlungenen Gang). Des injections poussées par » l'oviducte, dont nous espérions de bons résultats, n'ont point » pénétré dans cet étroit canal. » Ces injections m'avaient déjà tout aussi peu réussi, avant que je connusse les vaines tentatives de Keferstein et Ehlers.

Voici toutefois ce que j'ai pu y reconnaître. Si l'on porte sous le microscope le diverticule isolé, et débarrassé des fragments de la glande albuminipare qu'il entraîne constamment, on y voit par transparence des traînées de sperme, deux ordinairement, ayant à peu près la forme d'une massue, dont l'extrémité renflée occupe le fond supérieur du diverticule, et dont l'extrémité atténuée est tournée vers l'oviducte. Ces traînées de sperme occupent toujours une portion bien déterminée du diverticule. On sait que ce corps a la forme d'une anse à branches juxtaposées, l'une (fig. 8 *a*), continuation directe du canal

efférent, l'autre (*b*) terminant ce canal à l'origine de l'oviducte et du conduit déférent. La première branche est la plus étroite; la seconde est beaucoup plus volumineuse et plus opaque. C'est dans celle-ci que se voit le sperme; l'autre n'en contient jamais. A la surface de ce sperme s'observe le remarquable spectacle dont nous avons déjà parlé, la turbulente agitation des spermatozoïdes emmêlés, et les ondulations de la paroi tapissée de longs cils.

Si l'on exerce sur le diverticule des pressions ménagées, on fait courir dans la cavité des traînées de sperme qui, en partie, s'écoulent au dehors par la base oviductale, ou bien vont s'accumuler dans le fond supérieur. Mais jamais on ne parvient à faire passer du sperme dans la première branche, du côté du canal efférent; le sperme trop comprimé fait plutôt éclater la paroi supérieure du diverticule. Un obstacle insurmontable semble s'opposer à son introduction dans le canal de la glande hermaphrodite. Bien plus, les deux traînées de sperme ne se mêlent point l'une à l'autre; on les voit fluer parallèlement, montant ou descendant, sans jamais se confondre.

Il existe donc dans le diverticule une complication inattendue. Il semble qu'il y ait là plusieurs conduits dont il est fort difficile de démêler les rapports, mais qui certainement ne sont pas la continuation les uns des autres, ne résultent pas de contournements d'un même tube. Je crois cependant, sauf vérification ultérieure, qu'on peut, d'après ce qui précède, y admettre la disposition suivante :

La branche grêle de l'anse diverticulaire, celle qui continue directement le canal efférent, est un conduit simple, ainsi qu'il a été dit; l'autre branche est plus compliquée. Des apparences qu'il m'est impossible de désigner autrement qu'en les appelant des cloisons, en divisent la cavité en plusieurs compartiments longitudinaux, dont un, médian, est la continuation de la première branche, et du canal efférent par conséquent; deux autres, latéraux, sont des sortes de cœcums annexés à ce conduit, ou peut-être des sillons larges et profonds naissant à la terminaison même du conduit médian, de plus en plus approfondis et dilatés vers le sommet du diverticule, et probablement séparés dans la plus grande partie de leur étendue du

canal qu'ils accompagnent. Leur fond aveugle, plus ou moins contourné, forme le fond même du diverticule. La petite branche s'insère à l'autre un peu au-dessous de ce fond et se contourne elle-même entre les culs-de-sac des cœcums.

Voici donc probablement ce qui se passe. Les spermatozoïdes, après avoir gravi toute la longueur de l'oviducte, arrivés à la base du diverticule, s'engagent dans les sillons, origine des cœcums latéraux, sans pénétrer dans le canal efférent lui-même. Dans ces cœcums, ils se trouvent à l'abri de tout mélange avec les spermatozoïdes qui peuvent descendre du canal efférent, lors des accouplements ultérieurs. Par quel mécanisme viennent-ils ensuite à se mêler aux œufs qu'ils fécondent? C'est ce que je ne saurais dire pour le moment. Je me propose, dans des recherches ultérieures, de faire en sorte d'élucider ce point essentiel, et d'arriver enfin, s'il est possible, à une connaissance complète de l'organisation et des usages du diverticule.

Quoi qu'il en soit de ces desiderata, on ne saurait, je crois, mettre en doute la réalité de ce fait, que c'est bien dans le diverticule que se fait l'imprégnation. Et ainsi se trouve résolue une question qui a si longtemps intrigué les naturalistes, occasionné de si nombreux travaux, amené tant de théories contradictoires. La fécondation des Gastéropodes hermaphrodites, tout compliqués et même étranges qu'en soient les détails, n'est plus du moins un mystère.

Le diverticule acquiert désormais une importance autrement considérable que ne pouvaient le supposer les anatomistes qui y voyaient seulement la portion terminale du canal efférent, sans se préoccuper des particularités constantes de forme et de structure qu'il présente chez diverses espèces. J'ajouterai que cet organe est essentiellement une dépendance de l'appareil femelle, et que son existence n'a aucun rapport avec les fonctions de l'appareil mâle. Lorsque l'appareil génital du Gastéropode androgyne se dédouble, dans les Gastéropodes unisexués, le diverticule reste à l'appareil femelle, et l'appareil mâle en demeure dépourvu; le canal testiculaire se porte directement vers le fond du vestibule ou du réceptacle correspondant à l'oviducte boursouflé des androgynes; il se voit, au contraire,

toujours sous la forme d'une anse à parois élastiques et résistantes, vers la terminaison du conduit efférent de l'ovaire.

Remarquons enfin que le nom de *vésicule séminale,* donné à cet organe par divers auteurs, et en particulier par Keferstein et Ehlers, est tout à fait impropre et doit être rejeté. La vésicule séminale serait plutôt le canal efférent lui-même, qui est un véritable réservoir du sperme destiné à l'accouplement. Il n'y a nul inconvénient à lui laisser le nom peu significatif de diverticule, d'autant plus que ce nom a d'ailleurs l'avantage de la priorité. C'est ainsi qu'il a été pour la première fois désigné par Brand et Ratzeburg en 1833.

§ II. — Du Spermatophore.

Décrit et figuré pour la première fois en 1694 par Martin Lister [1], sous le nom de *capreolus,* le spermatophore des Hélices est longtemps resté un corps énigmatique. Je ne rapporterai point les diverses hypothèses qui ont été émises sur ses usages; cette énumération serait absolument dépourvue d'intérêt, les travaux de Moquin-Tandon [2] ayant définitivement établi que le *capreolus* de Lister est une véritable capsule spermatique.

Mais relativement au lieu et au moment de la formation de ce corps, qu'aucun naturaliste n'a observée directement, il existe encore bien des incertitudes.

Von Siebold fait sécréter le spermatophore par les *glandules muqueuses* qui garnissent la base de l'appareil génital.

Moquin-Tandon se fonde sur des considérations anatomiques, sur les analogies de la forme du *capreolus* avec celle de la cavité du pénis, pour induire que cet organe est le lieu de sa formation. « En disséquant avec attention la partie de la » verge voisine du flagellum, dit cet auteur, j'ai observé inté- » rieurement une multitude de petites papilles qui paraissent

(1) M. Lister, *Exercitatio anatomica in qua de Cochleis maxime terrestribus et Limacibus agitur.*

(2) Moquin-Tandon, *Hist. nat. des mollusques terrestres et fluviatiles de France,* 1855.

» de nature glanduleuse. J'ai remarqué de plus quatre canne- » lures longitudinales, profondes, qui semblent répondre aux » lamelles du *capreolus*. Dans le flagellum, il y a aussi le moule » du ruban étroit, courbé sur lui-même, qui constitue le fila- » ment inférieur du *capreolus*. » Ainsi, la partie de la verge voisine du flagellum formerait la portion antérieure du sperma- tophore, le flagellum la partie postérieure enroulée en spirale.

L'opinion de Moquin-Tandon semble avoir pour elle toutes les probabilités. Elle est pourtant rejetée par Fischer ([1]), qui suppose que le spermatophore est formé dans le canal déférent lui-même, soit dans sa portion adhérente à la matrice, soit dans sa partie libre, mais sans fournir aucun fait à l'appui de cette manière de voir. Cet auteur ajoute : « La formation du » spermatophore n'a pas lieu de toutes pièces; nous ne pensons » pas que dans toute la longueur du canal, il y ait exsudation » instantanée d'albumine; nous sommes porté à croire plutôt » que de nouvelles couches s'ajoutent d'arrière en avant, à » mesure que la partie antérieure est poussée par les contrac- » tions musculaires du canal déférent (dans sa partie libre), et » de l'organe femelle, lorsqu'elle y est engagée. »

Baudelot partage entièrement la manière de voir de Moquin-Tandon et la précise encore davantage.

Keferstein et Ehlers, dont Baudelot n'a malheureusement pas connu le Mémoire, avaient déjà confirmé d'une manière ingénieuse l'induction de Moquin-Tandon. Ils remarquent d'a- bord, comme ce dernier l'avait fait, la similitude de la forme extérieure du spermatophore et de la cavité de la verge : « Les » sillons limités par cinq côtes longitudinales, qui se trouvent » à la partie postérieure du pénis *(H. pomatia)*, correspondent » parfaitement à la partie antérieure côtelée du spermatophore, » si bien que les côtes semblent être le moulage des sillons. » Ces auteurs ont fait mieux : ils ont injecté des matières coagu- lables dans l'intérieur du pénis et du flagellum, et les moulages ainsi obtenus ont reproduit par fragments, disent-ils, le sper- matophore, avec ses formes et sa longueur, sauf l'enroulement

([1]) P. Fischer, *Études sur les spermatophores des Gastéropodes pulmonés.* (*Ann. des Sc. nat.*, 4e série, t. VII, 1857.)

du fil terminal. Ils reconnaissent toutefois, pour que la question fût résolue définitivement, la nécessité de rencontrer le spermatophore dans ses divers états de formation, mais ils déclarent avoir fait en vain beaucoup de recherches dans ce sens.

Longtemps avant que j'eusse pu consulter le Mémoire de Keferstein et Ehlers, la même nécessité s'était imposée à moi, et, pendant plus d'une année, j'avais aussi cherché en vain à être témoin de la formation du spermatophore. J'y suis enfin parvenu.

Ainsi que la plupart des auteurs en font la remarque, le spermatophore ne se trouve point chez les Hélices en dehors du temps des amours. Bien plus, il n'a même jamais été vu que sur des Hélices accouplées ou venant de s'accoupler. C'est donc pendant l'accouplement même que le spermatophore doit se former. Or, si l'on ouvre des Hélices surprises dans les préludes de l'accouplement, on ne leur trouve point de spermatophore. Sur des sujets séparés au moment même où ils entraient en accouplement, le spermatophore n'existe pas encore. On sait, d'autre part, qu'il est fort ordinaire de le rencontrer chez les Hélices que l'on trouve accouplées. Cela semble indiquer que le spermatophore met assez peu de temps à se former, tandis que le coït est fort long et dure plusieurs heures.

Un jour me furent apportées deux *Helix aspersa,* séparées 15 à 20 minutes après le début de l'accouplement, et plongées aussitôt dans l'alcool (Ch. Kirsch). L'examen des organes génitaux montra ce qui suit :

Point de spermatophore sur l'un et l'autre sujet. Mais la paroi intérieure du pénis de l'un d'eux était enduite d'une substance gélatineuse, à demi-concrétée, analogue à celle dont le spermatophore est formé, en couche beaucoup trop mince pour pouvoir être enlevée autrement que par lambeaux. Rien de semblable n'existait dans le flagellum. Du reste, pas de sperme dans le pénis, ni dans toute l'étendue du canal déférent, jusqu'à la glande de l'albumine.

Nous voyons déjà que la descente du sperme dans le pénis ne précède pas le commencement de la formation du spermatophore. De plus, c'est dans le pénis même que cette formation débute, le flagellum n'y concourant point tout d'abord.

Chez la seconde Hélice, l'intérieur du pénis était aussi tapissé de la même matière concrète, mais en couche plus épaisse, et ayant l'apparence d'une membrane plissée, chiffonnée, par suite de la rétraction du pénis sous l'action de l'alcool. Dans le haut du pénis, au-dessous de l'orifice du canal déférent, était un gros bouchon de sperme, équivalent à peu près à la moitié de ce que contient ordinairement le nodus. Ce sperme n'était englobé qu'en partie dans le rudiment membraneux du spermatophore. Il n'y avait pas de trace de la matière concrète sur la portion de paroi avoisinant l'embouchure du canal déférent. Dans le tiers inférieur du flagellum, existait, comme dans le pénis, un dépôt peu abondant de la substance du spermatophore, irrégulièrement plissée aussi, mais point de sperme; le fond du flagellum paraissait entièrement vide. Contre mon attente, le canal déférent, soit dans sa région prostatique, soit dans sa partie libre, ne me montra pas un seul spermatozoïde.

Nous voyons donc, sur ce dernier individu, le spermatophore déjà un peu plus avancé, et le dépôt de sa substance s'étendre jusque dans une portion du flagellum. Le sperme n'est qu'en partie descendu dans le pénis. Sa descente, quoique postérieure au début de la production du spermatophore, ne trouve point dans ce fait un obstacle : la matière du spermatophore ne se dépose point d'abord dans le voisinage de l'orifice du canal déférent, par lequel le sperme s'écoule dans le pénis. Mais comment s'expliquer l'absence de sperme dans le canal déférent, du moment que la verge en contenait beaucoup moins qu'il n'y en a d'ordinaire dans le nodus? Il faut admettre, ou bien que la descente du sperme n'est point continue, mais subit des temps d'arrêt, et que l'animal avait été tué pendant un de ces intervalles; ou bien que la descente du sperme, normalement continue, aura été brusquement interrompue par l'immersion dans l'alcool; mais le sperme déjà arrivé dans le canal déférent aura pu néanmoins poursuivre sa marche et atteindre sa destination, par l'effet des contractions propres, quelque temps persistantes, des parois de ce canal.

Divers autres sujets, pris à des époques inconnues de l'accouplement, ont montré le spermatophore beaucoup plus avancé que dans les sujets précédents. Le nodus notamment

contenait la quantité ordinaire de sperme, mais la face concave de ce nodus, celle qui est en regard de l'embouchure du canal déférent, était souvent d'une mollesse et d'une fragilité extrêmes, indices d'une formation récente. Le nodus ne se complète en ce point qu'en dernier lieu, et après l'entière descente du sperme. La portion filiforme du spermatophore que secrète le flagellum était très grêle et très délicate dans certains cas. L'extrémité antérieure du spermatophore, souvent très molle, ne m'a pas paru être la première à se former.

En résumé, quelques minutes après le début de l'accouplement, la paroi interne de la cavité du pénis commence à sécréter la matière du spermatophore; un peu après, le sperme descend le long du canal déférent, et va se tasser dans la partie supérieure du pénis, au-dessous de l'embouchure de ce canal. De ce tassement résulte l'arrangement particulier en long écheveau ployé sur lui-même, que le sperme affecte dans le nodus, et que Baudelot a déjà remarqué. La sécrétion de la substance du spermatophore ne se fait pas simultanément dans toute l'étendue de l'organe sécréteur; elle ne s'établit au voisinage de l'embouchure du canal déférent qu'après que le sperme a cessé d'affluer dans le pénis. Dans le flagellum, le dépôt se fait en premier lieu à la base de ce tube, et s'étend ensuite de proche en proche vers le fond aveugle.

Quant au trajet du sperme dans toute la longueur du canal déférent, il semble évident que les spermatozoïdes n'y prennent aucune part active; ils sont immobiles dans le spermatophore comme dans le canal de la glande hermaphrodite, et vraisemblablement aussi durant leur passage de ce canal dans le pénis. Ce passage ne peut être dû qu'aux contractions du canal de la glande hermaphrodite d'abord, du canal déférent ensuite. C'est une véritable éjaculation.

Le spermatophore, complètement constitué, remplit exactement le flagellum jusqu'à son sommet, d'une part, et il distend, de l'autre, toute la cavité du pénis jusque tout près de son extrémité inférieure. Le pénis est en ce moment notablement plus long que dans les circonstances ordinaires, bien que Moquin-Tandon affirme que la longueur du pénis égale celle de la portion dilatée du spermatophore. Aussi ai-je quelque peine

à croire que Keferstein et Ehlers, dans l'excellente idée qu'ils ont eue d'injecter le pénis et le flagellum, pour reproduire par tronçons le spermatophore, aient pu en obtenir exactement la forme et les dimensions.

Quoi qu'il en soit, et indépendamment de tout ce qui précède, il suffirait d'observer une seule fois le pénis d'une Hélice accouplée, avec le spermatophore venant de se terminer, pour avoir par là même le lieu précis de la formation de chacune des parties de ce corps. L'un reproduit alors si parfaitement la forme de l'autre, que, sauf la base du pénis dont la paroi musculeuse est fort épaisse, tout le reste du tube fortement distendu ne paraît pas exister, et l'on croit avoir sous les yeux un spermatophore nu. On voit alors très bien que l'extrémité supérieure du nodus correspond à peu près à l'orifice du canal déférent, que le bout antérieur du spermatophore s'avance jusque près de l'extrémité du pénis, qui, dans la copulation, fait saillie dans l'organe femelle.

C'est seulement alors que le spermatophore est entièrement constitué, qu'il commence à pénétrer dans le vagin du conjoint par un mécanisme qu'il ne m'a pas été donné de découvrir. P. Fischer avait supposé, on l'a vu plus haut, que la formation des diverses parties du spermatophore est successive, et que sa partie antérieure, formée la première, a déjà pénétré dans l'organe femelle, quand la partie postérieure n'existe pas encore ou est en train de se former.

Je n'ai jamais trouvé de sperme ailleurs que dans le nodus, soit dans un spermatophore en train de se former, soit dans un spermatophore complet, mais non encore sorti de l'appareil formateur. La portion flagellaire en est toujours complètement dépourvue. Cependant Baudelot, et avant lui Keferstein et Ehlers, affirment que l'on trouve du sperme dans la portion enroulée du spermatophore. Je présume que c'est là une erreur tenant à ce que ces auteurs auront observé des spermatophores trouvés dans la poche copulatrice ou le canal accessoire. Il m'est arrivé, en effet, de voir des spermatozoïdes dans le filament spiral, en pareilles circonstances; mais je regarde leur entrée dans ce tube comme fortuite, et résultant de la rupture préalable du nodus.

On trouve parfois dans le nodus, au milieu du sperme, un ou plusieurs individus du *Rhabditis terricola*, ou d'autres Nématoïdes plus volumineux, d'espèce indéterminée. J'en ai même rencontré jusque dans le filament spiral. Ces vers ne sont pas rares, en effet, dans les diverses régions de l'appareil génital, jusque dans le canal de la glande hermaphrodite. S'il s'en trouve par hasard dans le pénis ou le flagellum lors de l'accouplement, ils sont forcément englobés dans le spermatophore au moment de sa formation; s'il y en a dans le canal déférent, ils doivent être balayés par le sperme lors de sa descente dans ce canal, jusque dans le pénis, et par suite enveloppés avec lui dans le nodus. Portés ensuite dans les organes de l'autre Hélice avee le spermatophore, c'est là, pour ces Helminthes, un moyen de propagation très efficace.

§ III. — Du dard.

Tout le monde est d'accord aujourd'hui pour considérer le stylet calcaire, connu sous le nom de *dard,* comme un organe d'excitation, et divers auteurs ont décrit l'usage qu'en font les Hélices dans les préludes de la copulation. La plupart des observateurs disent en outre que le dard tombe durant l'accouplement. Mais le dard tombé se régénère-t-il, ou bien ne se produit-il qu'une fois? Les opinions sont partagées : les uns croient que le dard existe seulement chez les Hélices qui s'accouplent pour la première fois; d'autres pensent qu'un nouveau dard se produit pour chaque accouplement. Mais toute l'histoire du dard n'est pas, comme on va le voir, dans la réponse à ces questions. Je m'empresse de dire qu'une partie des faits qui suivent avaient été déjà, à mon insu, constatés par Keferstein et Ehlers. Bien que mes recherches aient ainsi perdu en plusieurs points le mérite de la nouveauté, elles confirment souvent celles de ces naturalistes, et les complètent plus d'une fois. Il ne sera donc pas inutile, je le crois, de rapporter telles quelles mes observations.

Il est d'abord un fait bien certain, c'est que, dans la plupart des cas, le dard tombe pendant l'accouplement. Si l'on ouvre

le sac du dard sur une Hélice qui s'est accouplée depuis peu de temps, on voit qu'il est vide. Deux fois seulement, sur le nombre considérable d'Hélices accouplées que j'ai examinées, le dard existait encore dans le sac. Nous reviendrons plus loin sur ce fait. Mais la chute du dard hors du sac est le cas le plus ordinaire. De plus, il est fréquent de retrouver, à côté de deux Hélices accouplées, leurs deux dards détachés, tombés à terre.

Les choses ne se passent pourtant pas toujours aussi simplement. Très souvent j'ai vu, soit sur un seul des individus formant le couple, soit sur les deux à la fois, le dard de l'autre plus ou moins profondément fiché dans le flanc, tantôt tout à côté de l'orifice génital, tantôt plus en arrière, jusqu'à huit ou dix millimètres de cet orifice. C'est donc un véritable *telum Veneris* que le dard, et cette dénomination que lui donnait Moquin-Tandon est encore plus exacte que ce savant ne pouvait le supposer lui-même. Ce fait est profondément surprenant, sans doute, mais il est beaucoup trop fréquent néanmoins pour qu'il soit permis de le regarder comme un simple accident. Keferstein et Ehlers l'avaient déjà observé trois fois; je l'ai, pour ma part, constaté plus de vingt fois. Ainsi s'explique la rencontre, autrement incompréhensible, d'un dard complètement libre dans la cavité splanchnique, en différentes régions, mais plus particulièrement vers la base de la glande de l'albumine, à laquelle il adhère faiblement. Suivant l'époque à laquelle remonte l'accouplement qui l'a fait pénétrer dans le corps du Mollusque, ce dard est plus ou moins altéré; il est toujours enveloppé d'une couche de matière brunâtre, déposée sans doute par les organes voisins, un reste peut-être aussi des mucosités épaisses excrétées par la peau au pourtour de la blessure : sa blancheur, sa friabilité, le font ressembler à un petit éclat d'os calciné. Il n'est pas rare de trouver ainsi deux dards au lieu d'un au milieu des viscères; j'en ai même une fois rencontré trois à différents degrés d'altération. Le dard, dans ces circonstances, est très souvent cassé et privé de l'une ou de l'autre de ses extrémités.

D'autres fois il arrive, et plus fréquemment peut-être, de trouver un vieux dard, non point dans la cavité splanchnique,

mais dans le canal de la poche copulatrice. Keferstein et Ehlers signalent le fait en rappelant que déjà, avant eux, Swammerdam l'avait observé plusieurs fois. Mais ces auteurs ne mentionnent pas la présence du dard dans le canal accessoire. Il s'y rencontre pourtant tout aussi souvent que dans le canal propre. Bien plus, on trouve quelquefois un dard dans chacun de ces conduits. Une fois même, indépendamment de ces deux dards, il y en avait un troisième, libre en dehors, adossé contre la glande de l'albumine. Du reste, qu'ils soient contenus dans la cavité viscérale, ou dans l'un ou l'autre des canaux de la poche copulatrice, l'aspect de ces dards est le même dans tous les cas : toujours la même pulpe brune les entoure, et leur altération est plus ou moins profonde.

Comment le dard peut-il se trouver dans le canal de la poche? Keferstein et Ehlers pensent, sans toutefois indiquer les motifs de leur opinion, que ce dard appartient à l'Hélice même qui le porte, et qu'il a dû tomber dans le vagin au moment où le sac, d'abord retroussé en dehors, est revenu sur lui-même. L'explication est parfaitement légitime *à priori*, et, en fait, les choses ne peuvent se passer autrement : il suffit de remarquer, pour s'en convaincre, que tout dard contenu dans le canal de la poche ou le canal accessoire a sa pointe inférieure et sa base supérieure; or, la position serait exactement inverse, si ce dard n'appartenait pas à l'Hélice et avait pénétré dans l'appareil femelle par intromission.

Une seule fois j'ai trouvé le dard dans la poche copulatrice. On s'explique aisément qu'il parvienne avec peine dans cette cavité; en effet, le canal de la poche, appliqué dans une grande partie de son étendue contre l'oviducte, se contourne transversalement en anse dans le voisinage de la glande de l'albumine pour aller déboucher dans la poche copulatrice, déjetée de côté. Ce contournement met obstacle à la progression du dard, qui s'arrête ordinairement à une certaine distance de la poche. Dans le canal accessoire, au contraire, le dard atteint facilement le fond du tube.

On rencontre assez souvent, soit dans le canal de la poche, soit dans le canal accessoire, soit même dans la poche copulatrice, un corpuscule ayant la forme d'une sorte de tronc de

cône creux, ou plutôt d'une petite couronne munie de plusieurs dents. Ad. Schmitt (¹), qui le premier a décrit cet organe et lui donne le nom de *couronne (krone),* a reconnu qu'il est une dépendance du dard. On le voit, en effet, coiffant l'extrémité de la papille qui supporte le dard dans le sac, et soutenant par conséquent la base du dard. En outre, quand le dard se détache, la couronne se détache aussi, et quelquefois elle lui demeure adhérente; en sorte que l'on voit alors le dard, soit qu'il tombe à l'extérieur, soit qu'il remonte dans le canal de la poche ou le canal accessoire, encore muni de sa courone. Il est cependant plus fréquent de trouver dans ces conduits la couronne toute seule. Cela tient-il à ce que la couronne, qui est de nature épidermique, résisterait plus longtemps que le dard à la résorption? Il est plus probable que cela vient plutôt de ce que souvent le dard et la couronne se séparent l'un de l'autre au moment de leur chute du sac; la couronne peut alors rester dans le vestibule, et remonter ensuite dans l'un ou l'autre des tubes de la poche, tandis que le dard est émis à l'extérieur.

Keferstein et Ehlers ont aussi vu plusieurs fois la couronne isolée ou tenant encore au dard, dans le canal de la poche copulatrice. Baudelot, qui l'a souvent rencontrée dans le canal accessoire, la regarde comme une dépendance de l'extrémité antérieure du spermatophore, et la figure même tenant à cette extrémité. Mais cette portion de spermatophore n'était certainement qu'un dard en voie de résorption, ayant perdu sa pointe, comme on peut en juger d'ailleurs par le dessin qu'en donne ce savant lui-même (pl. 3, fig. 13).

La présence d'un, deux ou même trois dards dans le corps de beaucoup d'Hélices, aussi bien que certains faits exposés dans la première partie de ce travail, montrent que les accouplements sont multiples chez ces animaux, et qu'un seul ne peut suffire à toutes les pontes d'un même individu. Si l'on tient compte, en outre, de cette circonstance, que le plus souvent le dard, détaché du sac, tombe à l'extérieur; que les dards qu'on trouve dans le corps d'une Hélice sont loin, par consé-

(¹) A. Schmitt, *Ueber die Artunterschiede von* Helix nemoralis *und* H. hortensis *mit Berücksichtigung ihrer Liebespfeile,* in Monke und Pfeiffer. *Zeitschr. f. Malacologie,* 1849.

quent, de représenter le nombre des accouplements qu'elle a subis, on sera disposé à penser que ces accouplements sont assez fréquents. Et en effet, durant toute la belle saison, depuis avril jusqu'à la fin de septembre, il est très fréquent de rencontrer des Hélices accouplées, malgré l'assertion de divers auteurs, qui limitent à mai, juin et août, l'époque des amours chez ces Mollusques.

Nous avons déjà dit que certains naturalistes ont cru que le dard ne se produit qu'une fois. Mais la plupart sont d'avis qu'un nouveau dard se forme pour chaque accouplement. Telle est aussi l'opinion de Keferstein et Ehlers. Ces auteurs remarquent, en effet, que les plus petits dards qu'ils aient observés chez l'*Helix pomatia*, n'avaient que 2 millimètres de long, et se trouvaient chez des Hélices qui s'étaient accouplées deux jours auparavant. Ces dards, et même d'autres plus longs, n'avaient point de couronne, comme si, disent ces auteurs, la formation de la couronne marquait l'achèvement du dard. Ils présument que le temps nécessaire à sa régénération doit être très court, parce que, dans plusieurs observations, ils ont presque toujours trouvé le dard complètement achevé, et très rarement n'ayant que 2 millimètres de long.

Il est certain que la régénération du dard est très prompte; il est d'ailleurs facile de l'observer dans ses différentes phases. On n'a pour cela qu'à ouvrir le sac d'un assez grand nombre d'Hélices dans les jours qui suivent l'accouplement.

Chez l'*Helix aspersa*, 24 heures après l'accouplement, le sac contient déjà une fine aiguille calcaire longue de $1^{mm},5$ à $1^{mm},75$ ordinairement, mais pouvant atteindre cependant, comme je l'ai vu une fois, jusqu'à $3^{mm},25$; sa largeur est de 1/5 à 1/4 de millimètre. Elle a la forme d'un cône légèrement courbé, creux à sa base sur une longueur de 1^{mm} environ (fig. 9 *a*).

Le deuxième jour après l'accouplement, le dard a environ de 3 à 5^{mm}. Sa courbure est alors assez sensible (fig. 9 *b*), et l'on voit déjà parfaitement indiquées les ailes latérales dont le développement constitue la forme en lame de poignard.

Le troisième jour, les arêtes sont très nettement accusées, et le dard, long de 6 à 7^{mm}, a déjà acquis sa forme caractéristique (fig. 9 *c*). Il n'a plus qu'à s'allonger à sa pointe, à s'élar-

gir un peu, pour arriver à sa forme et ses proportions définitives (fig. 9 *d*). C'est vers le cinquième ou le sixième jour que la régénération est complète. Ces observations proviennent d'Hélices tenues en captivité et absolument privées de nourriture; il peut se faire qu'à l'état de nature la reproduction du dard soit encore plus prompte.

Ainsi que le disent Keferstein et Ehlers, la couronne n'existe pas durant les premiers temps de la formation du dard; le troisième ou le quatrième jour, on voit cependant au sommet de la papille, au dessous de la base du dard, vaguement indiquées les petites crêtes correspondant aux denticules de la couronne. Ces crêtes, et toute la couronne même, sont un développement de l'épiderme qui couvre en ce point la papille, épiderme encore mou et difficile à isoler dans son ensemble, mais qui, un peu plus tard, s'enlève avec la plus grande facilité et donne la forme de la couronne.

Le processus de formation du dard indique bien nettement que si la couronne est une production épithéliale de la papille, celle-ci ne concourt nullement à la sécrétion du dard lui-même. Le dard ne résulte pas de la production de couches successives au sommet de la papille; il est une sécrétion des parois du sac, conformément à l'opinion de Leydig (1). Il ne se forme pas cependant simultanément dans toute sa longueur; il se développe d'abord à sa base, il s'accroît ensuite successivement par le dépôt de couches nouvelles qui l'épaississent et l'allongent.

Nous avons vu qu'il est des cas, très rares, il est vrai, où le dard ne tombe pas dans l'accouplement, mais demeure dans le sac. Qu'advient-il alors du dard? J'ai deux fois seulement observé un fait semblable : la première fois sur une Hélice dont j'avais interrompu l'accouplement, une autre fois chez une Hélice accouplée la veille. Dans la première, le dard était intact, et semblable de tout point à ceux que l'on trouve dans le sac avant l'accouplement; cet acte n'ayant point été entièrement accompli, il était permis d'attribuer à cette seule circonstance la présence du dard dans le sac, d'autant plus que l'animal avait été ouvert aussitôt. Il faut remarquer

(1) *Traité d'histologie comparée.*

toutefois que son conjoint avait déjà perdu son dard. — Mais la seconde Hélice montra que cette supposition n'était point la vérité : le dard que contenait son sac était en effet, avec sa forme ordinaire, d'une grande mollesse, de telle sorte que l'ouverture du sac avait suffi pour le ployer irrégulièrement en plusieurs endroits, le chiffonner presque, sans le rompre. Les crêtes étaient tout à fait transparentes, l'axe seul avait encore sa blancheur mate ordinaire. Il était tombé spontanément du sac au moment de son ouverture, en entraînant la couronne. Évidemment, ce dard était en voie de résorption. Son altération déjà assez profonde indiquait que sa disparition complète eût été très prompte; la couronne elle-même était sensiblement atteinte. Ainsi donc, alors même que le dard demeure dans le sac, il se résorbe. Le même dard ne sert pas à deux accouplements.

Résumé et Conclusions.

Nous pouvons résumer de la manière suivante les observations renfermées dans ce travail et les conséquences principales qui en découlent :

1° La fécondation chez les *Limax* et les *Helix*, et vraisemblablement aussi chez les autres Mollusques Gastéropodes, ne se fait point au moment de la ponte ou peu de temps avant, lors de la descente des œufs mûrs dans les régions inférieures de l'oviducte.

2° Une partie du sperme déposé dans la poche copulatrice sort de cette cavité quelques heures après l'accouplement, descend le long de son canal, en vertu des mouvements propres des éléments séminaux, et remonte dans l'oviducte, pour s'aller loger dans le diverticule, qui termine inférieurement le canal efférent de la glande hermaphrodite. C'est en ce lieu que doit s'opérer la fécondation.

3° Le sperme qui n'est point sorti de la poche copulatrice ne tarde pas à s'y désorganiser.

4° Le spermatophore des Hélices se produit durant l'accouplement, par une sécrétion des parois du pénis et de ses dépendances, qui englobe le sperme venu par le canal déférent.

La formation de ses diverses parties est successive : les régions voisines de l'orifice de ce dernier canal n'y prennent part qu'après la descente du sperme; dans le flagellum, la production du spermatophore a déjà commencé vers la base, avant la descente du sperme; elle s'étend graduellement de là vers le fond.

5° Le dard ne sert jamais qu'à un seul accouplement. Tantôt, il tombe à l'extérieur; tantôt, les Hélices s'en transpercent l'une l'autre, et on le retrouve alors plus tard en voie de résorption dans la cavité viscérale; tantôt, le retour du sac sur lui-même fait tomber le dard dans le vestibule, et il remonte en ce cas dans le canal de la poche ou le canal accessoire, où il se résorbe à la longue; tantôt enfin, il reste dans le sac, où sa résorption paraît être très prompte. Dans tous ces cas, le dard se régénère : cinq à six jours suffisent à sa complète reproduction.

EXPLICATION DES FIGURES.

Fig. 1. Faisceau de sperme en progression dans le canal de la poche copulatrice ou dans l'oviducte, montrant l'arrangement des spermatozoïdes par la manière dont les têtes s'en détachent.

Fig. 2. Faisceau très délié, pris dans l'oviducte, faisant mieux voir l'arrangement des spermatozoïdes.

Fig. 3. Sperme vivant de *Planorbis corneus,* examiné dans le sang de cet animal, et progressant avec beaucoup d'activité.

Fig. 4. Sperme désorganisé dans la poche copulatrice. Il ne reste plus que les têtes des spermatozoïdes.

Fig. 5. Sperme plus altéré, réduit à l'état de simples granulations.

Fig. 6. Régions inférieures de l'appareil génital femelle d'un *Helix aspersa : a,* sillons de la partie inférieure du canal de la poche copulatrice, contournant la saillie de l'orifice du canal accessoire *c; b,* sillons allant de la terminaison du canal de la poche dans l'oviducte; *p,* canal de la poche.

Fig. 7. Appareil génital femelle de *Cyclostoma elegans : a,* oviducte; *o,* ovaire; *c,* canal efférent; *d,* anse représentant le diverticulum des Hélices.

Fig. 8. Diverticulum du canal efférent d'un *Helix aspersa* : *a*, branche supérieure ; *b*, branche inférieure. — 8'. Structure schématique de ce diverticulum ; *cc*, cœcums latéraux, faisant office de réservoirs du sperme de la fécondation.

Fig. 9. Dards d'*Helix aspersa* à divers états de développement : *a*, dard de un jour ; *b*, de deux jours ; *c*, de trois jours ; *d*, dard complet, reposant sur la couronne.

NOTE

SUR

LE SÉLÉNIUM

PAR J.-P. PRAT

Présentée a la Société par M. ALEXANDRE

Dans mon travail analytique sur le minéral de l'Ariége, ne m'étant occupé que de la recherche des métaux principalement, j'ai confondu avec le soufre le *Sélénium* qui y existe à l'état de séléniure. Cette confusion était d'autant plus naturelle que ce minéral englobe des Pyrites, et que les produits odorants du Sélénium ont de grands rapports avec ceux du soufre.

Le Sélénium étant considéré jusqu'ici comme fort peu répandu dans la nature, il est utile de signaler, premièrement, son existence dans un minéral gisant en grande abondance. (J'ai des raisons pour croire qu'il contient aussi du Tellure.) Secondement, je crois devoir communiquer à la Société les résultats curieux de mes dernières expériences sur le Sélénium, expériences qui tendent à prouver que cet élément doit être très répandu dans la nature, dans les terres propres à la culture et dans les végétaux probablement en coexistence avec le soufre. En effet, les crucifères contiennent du Sélénium.

C'est en étudiant le Sélénium retiré de mon minéral que j'ai eu l'idée de le rechercher dans les plantes, me fondant sur ce que les terres des vallées contiennent les parties désagrégées des minéraux des montagnes dont les débris sont entraînés par les vents et les pluies principalement.

La complète analogie qu'il y a entre l'odeur des divers produits du Sélénium et celle du raifort, de la rave pourrie, etc.,

explique pourquoi j'ai été conduit à commencer la recherche du Sélénium dans les crucifères.

Les plantes de cette famille sur lesquelles j'ai opéré appartiennent aux genres *Brassica, Raphanus* et *Sinapis*. Elles ont toutes fourni du Sélénium, ce qui autorise à croire que toute crucifère en contient plus ou moins.

Voici comment on peut retirer cet élément des racines et des feuilles seulement :

On incise la plante, on la fait bouillir dans une dissolution étendue de potasse ou de soude, on passe la liqueur à travers un linge serré et on fait évaporer jusqu'à consistance d'extrait mou. Ensuite, on délaye cet extrait dans une nouvelle quantité de lessive alcaline, on fait bouillir, on sature avec excès par l'acide azotique, on évapore à siccité et on continue à chauffer jusqu'à déflagration complète. Enfin, on traite le résidu par l'eau chaude, on filtre, et l'on obtient ainsi une dissolution incolore contenant tout le soufre (s'il y en a) et tout le Sélénium, l'un à l'état de sulfate de potasse et l'autre à l'état de Séléniate ou Sélénite de la même base.

On sait que le sulfate de potasse ne subit point l'effet des corps réducteurs, par la voie humide, et qu'au contraire, les séléniates et les sélénites sont facilement réduits. Il suffit donc de profiter de cette propriété pour séparer le Sélénium du soufre dans la liqueur ci-dessus. Pour cela, on ajoute à la liqueur sulfo-sélénique un peu d'acide chlorhydrique, et on y plonge une lame de zinc en même temps qu'on y fait passer un courant d'acide sulfureux. La liqueur se colore immédiatement en rouge-brun, plus ou moins vif, et abandonne bientôt tout le Sélénium en flocons rouge-brun foncé que l'on recueille.

Cette méthode ne saurait être appliquée à l'extraction du Sélénium des huiles essentielles.

Voici, par conséquent, la marche que j'ai suivie en traitant l'essence de moutarde :

Faire agir environ 20 parties d'acide azotique sur 1 partie d'essence; la réaction est vive et se manifeste par un grand dégagement de vapeurs rutilantes et de chaleur. Lorsque les vapeurs ont cessé, on sature la liqueur par la potasse, on évapore et on chauffe jusqu'à déflagration complète. On traite

ensuite le résidu par l'eau chaude, on filtre, et on examine si la liqueur contient du Sélénium par les moyens indiqués précédemment. Si elle n'en contient pas, c'est que le Sélénium constitue le résidu insoluble que l'on recueille pour le faire dissoudre dans la potasse caustique d'où l'on peut ensuite facilement le retirer.

On sait que le Sélénium se présente sous deux états allotropiques bien tranchés : l'état vitreux et l'état métallique. Le Sélénium retiré des radis et des choux appartient à la modification vitreuse, tandis que celui qui procède de l'essence de moutarde (Sulfo-cyanure d'Allyle) semble affecter la forme métallique.

Maintenant, pourquoi le Sélénium des crucifères a-t-il été pendant si longtemps confondu avec le soufre qui indubitablement l'accompagne? C'est que la question de savoir s'il y existait ne s'est probablement pas présentée à l'esprit; c'est qu'ensuite cela a dû tenir à la méthode de dosage du soufre dans les principes immédiats; c'est qu'enfin une combinaison de soufre et de Sélénium est difficile à distinguer du soufre.

On dose le soufre, dans les matières organiques, à l'état de sulfate de baryte; or, dans les mêmes circonstances, les agents qui oxydent le soufre peuvent oxyder le Sélénium qu'il contient; par conséquent, lorsque l'on a cru avoir formé du sulfate de baryte pur, il a dû souvent arriver que ce sulfate de baryte contenait du séléniate de la même base.

La découverte du Sélénium dans les crucifères considérée au point de vue thérapeutique ne me semble pas d'une mince importance à raison de cette question qu'elle soulève : Est-ce à l'action du Sélénium ou à celle du Soufre que doivent être attribuées les propriétés anti-scorbutiques des crucifères?

On peut répondre implicitement à cette question, que c'est le Sélénium qui agit, attendu que les odeurs de tous les principes immédiats des crucifères rappellent trop bien les produits du Sélénium, et se distinguent de celles des produits du soufre.

S'il en était ainsi, on pourrait bien augurer de l'emploi du Sélénium et ses dérivés en thérapeutique : il constituerait le seul spécifique du scorbut.

ERRATA.

Pages.	Lignes.		Au lieu de :	Lisez :
23	10		$-D_x u$	$-D_y u$
27	9		D^z	D_z
32	1	(en rem.)	$\lim_{s=o}$	$\lim_{s=e}$
45	4	mettez le signe — après le signe =		
72	6		$A_n z_n$	$A_n z^n$
110	2	(en rem.)	c	z
			z	c
112	6	(en rem.)	D_n^{n-1}	D_e^{n-1}
179	5	(en rem.)	$+ 0{,}0002\,v$	$+ 0{,}0002\,v\,P$
180	4	(au dénominateur)		
204	4		essieu moteur	essieu d'arrière.
206	9			
207	10	(en rem.)		
206	5		roues motrices	roues d'arrière.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

